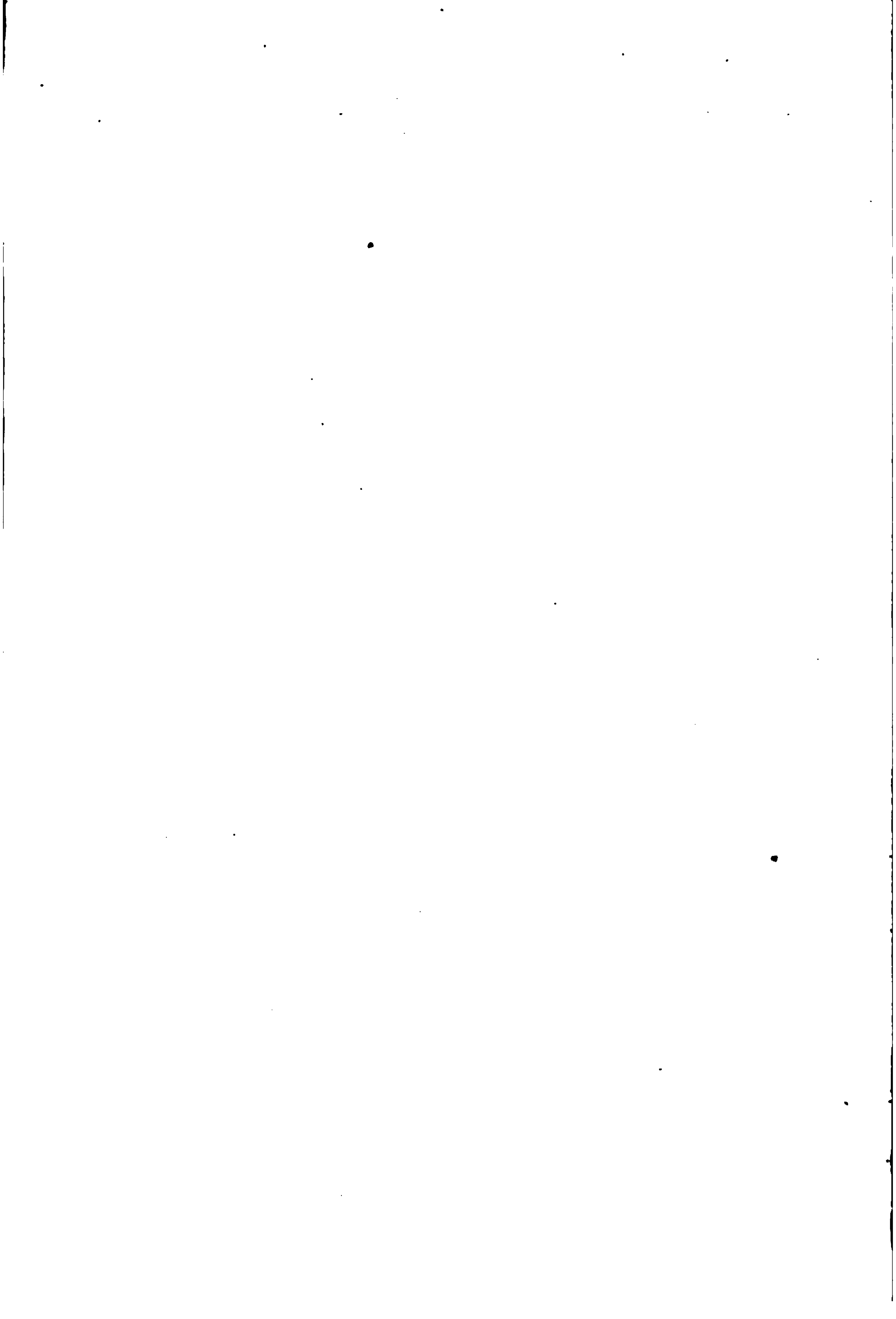




THEORIE

DER

BEWEGUNG UND DER KRÄFTE.

EIN LEHRBUCH

DER

THEORETISCHEN MECHANIK.

MIT BESONDERER RÜCKSICHT

AUF DAS

WISSENSCHAFTLICHE BEDÜRFNISS TECHNISCHER HOCHSCHULEN

BEARBEITET VON

DR. WILHELM SCHELL,

GROSSHERZOGL. BADISCHEM GEHEIMEN HOFRATHE UND PROF. AM POLYTECHNICUM ZU CARLSRUHE.

„Geometrica geometrice“.

ZWEITE, UMGEARBEITETE AUFLAGE.

II. BAND.

3. THEORIE DER KRÄFTE U. IHRER AEQUIVALENZ (DYNAMIK IM WEITEREN SINNE EINSCHL. STATIK).
4. THEORIE DER DURCH KRÄFTE ERZEUGTEN BEWEGUNG (KINETIK OD. DYNAMIK IM ENGEREN SINNE).

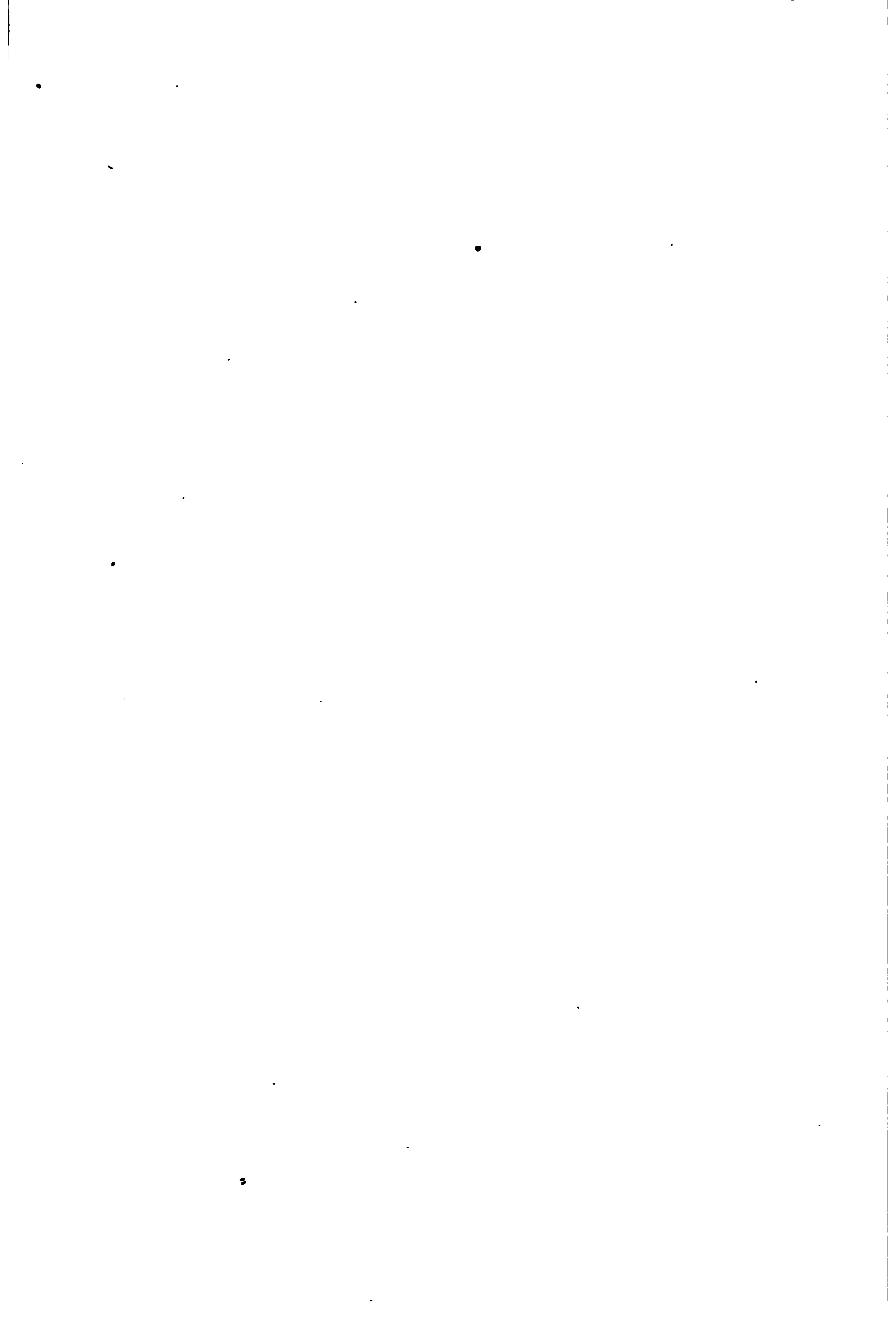
MIT VIELEN IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1880.



Inhalt des zweiten Bandes.

Dritter Theil.

Theorie der Kräfte und ihrer Aequivalenz.

(Dynamik im weiteren Sinne, einschl. Statik.)

I. Capitel. Allgemeine Erörterungen über die Kräfte und das Maass derselben. (S. 1—15.)

II. Capitel. Aequivalenz der Kräfte am freien Punkte. Aequivalenz derselben am Punkte, welcher gezwungen ist, auf einer Curve oder Fläche zu bleiben. (S. 16—26.)

III. Capitel. Aequivalenz der Kräftesysteme am freien unveränderlichen Punktsystem. (S. 26—50.)

X. Capitel. Virtueller Coefficient und Cylindroid. Reciprocale Axensysteme. (S. 211—236.)

XI. Capitel. Astatisches Gleichgewicht und astatische Aequivalenz von Kräftesystemen am unveränderlichen Punktsystem. (S. 236—266.)

XII. Capitel. Sicherheit des Gleichgewichts. Virial. Gauss' Princip. (S. 266—279.)

XIII. Capitel. Reduction der Attractions- und Repulsionskräfte von Massen, Agentien etc. Theorie des Potentials. (S. 279—342.)

XIV. Capitel. Reduction der Widerstände von Flächen und Curven. (S. 342—351.)

Vierter Theil.

Theorie der durch Kräfte erzeugten Bewegung.

(Kinetik oder Dynamik im engeren Sinne.)

I. Capitel. Allgemeine Erörterungen. Kinetik der Momentankräfte am unveränderlichen System. (S. 352—386.)

II. Capitel. Kinetik der Kräfte erster Ordnung am unveränderlichen System; Aequivalenz und Reduction derselben. Die Bewegungsgleichungen von Euler. (S. 387—415.)

V. Capitel. Die Bewegungsgleichungen eines beliebig veränderlichen Systems. D'Alembert's Princip. Das Gauss'sche Princip des kleinsten Zwanges. Newton's Satz über die Aehnlichkeit der Bewegungen. (S. 492—516.)

VI. Capitel. Die Principe der Bewegung des Massenmittelpunktes, der Flächen, der invariabelen Ebene und der lebendigen Kraft für das veränderliche System. (S. 516—544.)

VII. Capitel. Die Differentialgleichungen der Bewegung von Lagrange; das Hamilton'sche Princip; das Princip der kleinsten Wirkung. Die Hamilton'sche canonische Form der Bewegungsgleichungen und die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung. (S. 544—571.)

VIII. Capitel. Ball's Kinetik der Dynamen am unveränderlichen System. (S. 571—582.)

IX. Capitel. Einige Probleme der Bewegung veränderlicher Systeme. (S. 582—618.)

Verbesserungen.

Im ersten Bande.

S. 147, Z. 4 lies π statt $\frac{1}{2}\pi$.

S. 148, Z. 12 v. u. tilge die Worte „voll lauter Doppelpunkte".

S. 265, Z. 33—35 ist der Satz: „Umgekehrt reducirt sich etc." zu streichen.

S. 312, Z. 10 lies B. 21, p. 186—228.

S. 390, Z. 11 lies an beiden Stellen N statt ψ.

S. 401, Z. 2 ist vor den Ausdruck für v ein Minuszeichen zu setzen.

S. 580, Z. 1 v. u. lies 268 statt 208.

Im zweiten Bande.

S. 64, Z. 11 v. u. lies $\operatorname{tg}^2 \sigma$ statt $\operatorname{tg} \sigma$.

S. 178, Z. 4 lies $-\delta s \,.\, \sin(\alpha - \vartheta) = -\delta x \,.\, \cos\vartheta + \delta y \,.\, \sin\vartheta$.

S. 242, Z. 9 lies „Gleichgewichtsaxe" statt „Gleichgewichtslage". In den Formeln des §. 4 auf dieser Seite sind überall in den Grössen $a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{31}, \ldots$ die beiden Indices zu vertauschen.

S. 336, Z. 24 lies „unveränderliches" statt „veränderliches".

S. 387, Z. 14 v. u. lies R statt Rv.

S. 420, Z. 7, 2. Formel lies $=$ statt $-$.

S. 448, Z. 31—36 lies G statt J.

S. 457, Z. 1 u. 2 lies $\left(K - t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)$ statt $\sqrt{\frac{g}{a}}\,(T - t)$.

S. 463, Z. 1 tilge den Buchstaben g; desgl. in Z. 2 im 2. und 3. Gliede.

S. 529—543 lies in dem Columnenindex VI statt V.

S. 544, Z. 9 v. u. lies VII. Capitel statt VI. Capitel.

S. 582, §. 13 ist am Schlusse des ersten Satzes zuzufügen: „sowie auf Fiedler, Geometrie und Geomechanik. (Vierteljahrsschr. d. Züricher naturf. Gesellsch. B. 21, S. 186—228)".

Dritter Theil.

Theorie der Kräfte und ihrer Aequivalenz.

(Dynamik, einschl. Statik.)

I. Capitel.

Allgemeine Erörterungen über die Kräfte und das Maass derselben.

§. 1. Die Punkte eines in Bewegung begriffenen Systems wurden bisher von gleicher Beschaffenheit angenommen, sie waren daher von rein geometrischen Punkten nicht verschieden. Wir werden jetzt Mittel suchen, um sie quantitativ oder intensiv und in gewisser Hinsicht auch qualitativ von einander zu unterscheiden und den Einfluss dieser Unterschiede auf die Bewegung auszudrücken.

Ein System gleichartiger Punkte sei in irgend einer Bewegung begriffen; dieselbe sei vollständig bekannt, insbesondere seien zu jeder Zeit t die Beschleunigungen aller Ordnungen, die Geschwindigkeit mit inbegriffen, gegeben. Ein zweites, diesem congruentes System besitze dieselbe Bewegung und sei über jenes hingelagert, so dass je zwei homologe Punkte A', A'' zusammenfallen. Dieselben werden dann während der Bewegung fortwährend vereinigt bleiben und beide Systeme werden ein System bilden, dessen Punkte A die Punkte A', A'' enthalten. Die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen aller Ordnungen der Punkte A', A'' sind nach Richtung, Sinn und Grösse dieselben, wie die des Gesammtpunktes A, dagegen wird der Punkt selbst ein doppelwerthiger. Die Summe der Geschwindigkeiten der Punkte A', A'' drückt den Aufwand von Geschwindigkeit aus, welcher dem Gesammtpunkte A zu Theil werden muss, damit er dieselbe Geschwindigkeit erlange, wie die Partialpunkte, welche zu ihm zusammentreten. Dasselbe gilt von den Beschleunigungen aller Ordnungen. In gleicher Weise können wir 2, 3, 4, ... m congruente Systeme übereinanderlagern, welche ein Gesammtsystem von derselben Bewegung bilden, die sie selbst besitzen, in welchem aber jeder Punkt als ein 2-, 3, 4, ... m werthiger Punkt aufzufassen ist. Umgekehrt können wir ein System in 2, 3, 4, ... m andere spalten, welche dieselbe Bewegung wie das ursprüngliche besitzen; die

Punkte dieses besitzen dann gegenüber den Punkten jenes $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... $\frac{1}{m}$ der Werthigkeit jener. Auch können Systeme der eben erhaltenen Art mit Systemen der vorigen Art zu Systemen von derselben Bewegung verbunden werden, deren Punkte im Vergleich mit den Punkten des ursprünglichen Systems m-werthig sind, wo m eine ganze oder gebrochene oder auch eine Irrationalzahl sein kann. Sind v, $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, ... die Geschwindigkeit und die Beschleunigungen der verschiedenen Ordnungen der im m-werthigen Gesammtpunkte A zusammentretenden Punkte A', A'', ..., so drücken die Grössen mv, $m\varphi^{(1)}$, $m\varphi^{(2)}$, ... den Gesammtaufwand an Geschwindigkeit und Beschleunigung der verschiedenen Ordnungen aus, welcher dem Gesammtpunkte A ertheilt werden muss, damit er die Geschwindigkeit v und die Beschleunigungen $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$ ... erlange. Man findet diese Geschwindigkeit und diese Beschleunigungen, indem man jenen Gesammtaufwand mit der Zahl m dividirt, welche die Werthigkeit ausdrückt.

Lagern wir jetzt über ein System ein anderes, ihm nicht congruentes, dessen Punkte unter einander gleichwerthig, aber mit den Punkten jenes gleichwerthig oder ungleichwerthig sein mögen. Beide sollen dieselbe Bewegung besitzen. Dann bildet sich aus ihnen ein neues System, welches ungleichartige Punkte enthält. Es wird Punkte von der Art der Punkte des ersten Systems, solche von der Art des zweiten und endlich solche enthalten, in welchen ein Punkt des ersten mit einem Punkte des zweiten verbunden ist. Das Gesammtsystem wird dieselbe Bewegung haben, wie die beiden Systeme, aus welchen es gebildet ist. Lagern wir drei oder mehrere Systeme auf diese Weise übereinander, so gelangen wir zu Systemen der heterogensten Beschaffenheit, welche alle dieselbe Bewegung haben, deren Punkte aber die mannigfaltigste Werthigkeit besitzen. Fügen wir hinzu, dass wir Systeme auch trennen können, so übersieht man leicht, wie durch diese Uebereinanderlagerung Aggregate von Systemen entstehen, deren Punkte selbst eine Nullwerthigkeit oder auch eine negative Werthigkeit besitzen. In allen Fällen stellen auch hier die Grössen mv, $m\varphi^{(1)}$, $m\varphi^{(2)}$, ... den Gesammtaufwand an Geschwindigkeit und Beschleunigung dar, welcher einem Gesammtpunkte A zuertheilt werden muss, damit er die Geschwindigkeit v und die Beschleunigungen $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, ... erlange.

Der Coefficient, welcher die Werthigkeit eines Punktes ausdrückt, kann nach dem Vorstehenden jede reelle positive oder negative, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale Zahl sein, die Null mit inbegriffen. Erlangt ein Punkt des Gesammtsystems den Coefficienten Null, so verschwinden für ihn die Grössen mv, $m\varphi^{(1)}$, $m\varphi^{(2)}$, ... In Untersuchungen, in welchen diese eine Rolle spielen, tritt ein solcher Punkt nicht auf; er scheidet für sie aus dem System aus, obgleich er sich mit ihm bewegt.

Trifft dies bei allen Punkten einer ganzen Parthie des Systems ein, so scheidet auch sie aus. Durch das Verschwinden jenes Coefficienten ist also das Mittel gegeben, ein System auf einen bestimmten Raum zu beschränken oder in bestimmter Weise abzugrenzen. Man kann als das System den ganzen Raum ansehen, aber so dass die Punkte den Coefficienten Null besitzen, welche der Untersuchung fremd bleiben. Jener Coefficient spielt hier vollständig die Rolle des Discontinuitätsfactors der bestimmten Integrale. Ein negativer Coefficient eines Punktes deutet auf einen Mangel an Werthigkeit desselben und einen Wechsel des Sinnes in dem Aufwande an Geschwindigkeit und Beschleunigung. Er kann auf zwei Arten entstehen: entweder durch Abtrennen einer vorgeschriebenen Punktparthie oder durch Combination von Systemen mit vollkommen entgegengesetzten Beschleunigungen aller Ordnungen.

Man kann den Coefficienten m, welcher die qualitative Verschiedenheit der Systempunkte charakterisirt und ihre Beschleunigungscapacität aller Ordnungen misst, den Beschleunigungscoefficienten derselben nennen, indem man die Geschwindigkeit unter dem Namen Beschleunigung mitbegreift, nämlich als Beschleunigung nullter Ordnung. In den Anwendungen der Mechanik auf Physik stellt er in vielen Untersuchungen die Menge der Materie dar, welche in den Systempunkten concentrirt gedacht wird, in anderen Gebieten dieser Wissenschaft drückt er das Quantum Agens der Punkte aus und die positive oder negative Beschaffenheit stellt den Gegensatz der Agentien (z. B. bei Electricität und Magnetismus) dar, das Verschwinden derselben die Neutralität. Die Lehrbücher der Mechanik nennen diesen Coefficienten durchweg die Masse. Allein wenn wir auch weit entfernt sind, irgend einen allgemeineren Namen einführen zu wollen, so dient das Gesagte doch wohl hinreichend dazu, auf das Bedürfniss eines solchen hinzudeuten. Andere möchten vielleicht lieber „Actionscoefficient" oder „Beschleunigungsgewicht" sagen.

Man erkennt aus der Entstehungsweise des Beschleunigungscoefficienten, dass seine Beschaffenheit sich auf alle Ordnungen der Beschleunigungen fortpflanzt, sodass, wenn er an irgend einer Stelle des Systems für die Beschleunigung erster Ordnung verschwindet, er an dieser Stelle für die Beschleunigungen aller Ordnungen Null ist, die Geschwindigkeit mit inbegriffen. Bei gewissen Vorgängen, bei welchen er die Materialität ausdrückt, bleibt er constant, bei anderen, wo eine Veränderung im Agens auftritt, wie z. B. bei der Vertheilung der Electricität, ist er mit der Zeit oder mit dem Orte veränderlich. Für die in diesem Buche durchzuführenden Betrachtungen wird er als constant angenommen und steht nichts im Wege, ihn die Masse zu nennen, obgleich dieser Name nicht die Allgemeinheit seines Wesens ausdrückt.

Um die Werthigkeit der Punkte eines Systems zu bestimmen, ist erforderlich, dass man eine bestimmte Werthigkeit annimmt, welche durch den Coefficienten 1 ausgedrückt werden soll. Die Beschleunigung irgend einer Ordnung eines solchen Punktes sei φ. Ist alsdann m der Beschleunigungscoefficient des Punktes, wenn seine Werthigkeit m wird, so treten in ihm Beschleunigungsbestandtheile zusammen, deren Resultante $m\varphi$ den Gesammtaufwand an Beschleunigung dieser Ordnung ausdrückt, in Folge deren er aber dennoch dieselbe Beschleunigung φ erlangt, weil die Resultante sich auf die Bestandtheile des Gesammtpunktes vertheilt.

§. 2. Die Grössen mv, $m\varphi^{(1)}$, $m\varphi^{(2)}, \ldots$, welche den Aufwand an Geschwindigkeit, Beschleunigung erster, zweiter, dritter Ordnung u. s. w. ausdrücken, welcher erfordert wird, um einem m-werthigen Punkte die Geschwindigkeit v, die Beschleunigung erster Ordnung $\varphi^{(1)}$, die zweiter Ordnung $\varphi^{(2)}$ u. s. f. zu ertheilen, nennen wir Kräfte und zwar mv eine Kraft nullter, $m\varphi^{(1)}$ eine Kraft erster, $m\varphi^{(2)}$ eine solche zweiter Ordnung u. s. f. Sie sind die Grössen, welche mit der Masse m des Punktes dividirt, dessen Geschwindigkeit und dessen Beschleunigungen geben. Sie verschwinden, wenn die Masse oder die Geschwindigkeit (Beschleunigung) oder beide verschwinden, sie wechseln das Zeichen, wenn einer der Factoren es wechselt, aus denen sie gebildet sind.

Man pflegt die Kraft n^{ter} Ordnung durch eine Strecke darzustellen, welche man von dem afficirten Punkte aus in der Richtung der Beschleunigung n^{ter} Ordnung, dem Sinne nach mit dieser übereinstimmend aufträgt. Den Punkt nennt man den Angriffspunkt der Kraft, ihre Richtung und ihr Sinn sind die Richtung und der Sinn der ihr entsprechenden Beschleunigung und ihre Grösse oder Intensität $m\varphi^{(n)}$ wird durch die aufzutragende Strecke dargestellt, welche das m-fache der Strecke von derselben Richtung ist, welche die Beschleunigung $\varphi^{(n)}$ ausdrückt. Kräfte sind daher geometrische Grössen im Sinne von B. I, Th. I, Cap. I. Die Figur, welche von den Kräften gebildet wird, ist daher ähnlich und ähnlich liegend mit der aus den Beschleunigungen gebildeten und können die Beziehungen, welche zwischen den Beschleunigungen der verschiedenen Ordnungen bestehen, auf die ihnen entsprechenden Kräfte übertragen werden.

Sowie zu der Beschleunigung $\varphi^{(n)}$, welche der Zeit t entspricht, die Elementarbeschleunigung $\varphi^{(n+1)}dt$ nächsthöherer Ordnung hinzutritt, um sie in die der Zeit $t + dt$ entsprechende Beschleunigung überzuführen, so tritt zu der Kraft $m\varphi^{(n)}$ der n^{ten} Ordnung die unendlichkleine Kraft $m\varphi^{(n+1)}dt$ nächsthöherer Ordnung hinzu, um dieselbe nach Grösse und Richtung in die Kraft umzuwandeln, welche dem folgenden Zeitmomente entspricht. Die Elementarkraft $m\varphi^{(n+1)}dt$ ist daher das geometrische Differential der Kraft $m\varphi^{(n)}$ und die Kraft $m\varphi^{(n+1)}$ ist die geometrische

Derivirte der Kraft $m\varphi^{(n)}$ nächst niederer Ordnung. Die Kräfte verschiedener Ordnungen können daher nicht mit einander verglichen werden, sondern sind Grössen verschiedener Dimensionen und verhalten sich zu einander wie Flächenräume zu Linien oder Körperräume zu Flächen, wenngleich sie alle durch Strecken darstellbar sind.

Die Kraft mv der nullten Ordnung wird auch Quantität der Bewegung oder auch Momentankraft genannt; die Kraft $m\varphi^{(1)}$ der ersten Ordnung ist gemeint, wenn man von Kraft $m\varphi$ schlechthin redet. Man hat sich bis jetzt nicht mit den Kräften höherer Ordnung beschäftigt.

§. 3. Bezeichnen $F_0, F_1, F_2, \ldots F_n$ die Intensitäten der Kräfte der verschiedenen Ordnungen, welchen für dieselbe Masse m die Beschleunigungen $v, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots \varphi^{(n)}$ entsprechen (die Geschwindigkeit v als Beschleunigung $\varphi^{(0)}$ der nullten Ordnung mit inbegriffen), so bestehen die Gleichungen:

$$F_0 = mv, \quad F_1 = m\varphi^{(1)}, \quad F_2 = m\varphi^{(2)}, \ldots F_n = m\varphi^{(n)};$$
$$m = \frac{F_0}{v} = \frac{F_1}{\varphi^{(1)}} = \frac{F_2}{\varphi^{(2)}} = \ldots \frac{F_n}{\varphi_n}.$$

Aus ihnen folgt, dass die Masseneinheit von der Krafteinheit irgend einer Ordnung die Einheit der Beschleunigung derselben Ordnung erlangt und dass die Krafteinheit irgend einer Ordnung die ist, welche der Masseneinheit die Einheit der Beschleunigung ertheilt. Wählt man also die Längeneinheit zur Maasseinheit der Beschleunigungen, so ist die Wahl der Krafteinheiten und die Wahl der Masseneinheit von einander abhängig, so dass mit der Wahl der einen die der andern bestimmt ist. So kann man z. B. für die Kräfte erster Ordnung F_1 eine beliebige Kraft erster Ordnung als Einheit wählen; sobald dies geschehen, ist die Masseneinheit bestimmt; sie ist die Masse, welcher jener Krafteinheit die Einheit der Beschleunigung erster Ordnung ertheilt. Eine der Schwere unterworfene Masse erlangt die Beschleunigung erster Ordnung $\varphi^{(1)} = g = 9{,}81$ Meter. Die Kraft F_1, welche der Masse m diese Beschleunigung ertheilt, heisst das Gewicht P dieser Masse, sodass die Gleichung besteht $P = mg$. Man wählt ein bestimmtes Gewicht zur Einheit für die Kräfte erster Ordnung, nämlich das Kilogramm (oder für kleinere Kräfte auch das Gramm) und die Masseneinheit ist demnach diejenige Masse, welcher diese Kraft die Beschleunigung Eins zu ertheilen vermag. Das Gewicht dieser Masseneinheit, wenn sie als der Schwere unterworfen gedacht wird, folgt aus der Gleichung $P = mg$ für $m = 1$ und ist folglich gleich g Kilogramm (oder Gramm). Hiermit sind die Krafteinheiten aller Ordnungen bestimmt. Die Einheit der Momentankräfte F_0 z. B. ist diejenige Momentankraft, welche der so gewählten Masseneinheit die Einheit der Geschwindigkeit zu ertheilen vermag.

Ist P das Gewicht der Masse m, so folgt aus der Gleichung $P = mg$ für die Masse m die Formel $m = \frac{P}{g}$ und indem man diesen Ausdruck in die obigen Gleichungen einführt: $F_0 = \frac{P}{g} v$, $F_1 = \frac{P}{g} \varphi^{(1)}$ u. s. w., Formen, welche übrigens heutzutage weniger Gebrauch finden können.

§. 4. Wir haben hier die Kräfte rein mathematisch und frei von allen der reinen Theorie fremden Vorstellungen definirt und ihren Zusammenhang mit den Beschleunigungen nachgewiesen. Es ist aber wünschenswerth, auch eine andere, sonst übliche Auffassungsweise kennen zu lernen, welche weniger abstract verfährt, nicht frei von der Vorstellung menschlicher Thätigkeit ist und ein Axiom erfordert. Nach ihr hat man zu jeder Veränderung eine Ursache hinzuzudenken, welche diese hervorbringt und deren Wirkung die Veränderung genannt wird. Die Frage nach der Art des Zusammenhanges zwischen Ursache und Wirkung bleibt dabei vorläufig offen. Die Bewegung ist continuirliche Ortsänderung, ihre Ursache ist demnach im strengsten Sinne der Inbegriff alles dessen, was den Punkt oder das System fortführt und ihm Geschwindigkeit und Beschleunigung aller Ordnungen ertheilt. Indessen pflegt man den Begriff der Ursache der Bewegung etwas beschränkter zu fassen und sich vorzugsweise für die Beschleunigung erster Ordnung eine Ursache zu denken. Die Ursache der Beschleunigung erster Ordnung definirt man als die Kraft und ihre Wirkung besteht darin, dass sie die Beschleunigung erster Ordnung hervorbringt, d. h. die Geschwindigkeit nach Richtung und Grösse ändert, indem sie in jedem Momente die Elementarbeschleunigung zur Geschwindigkeit hinzutreten lässt. Diese Wirkung ist eine continuirliche, so lange die Geschwindigkeit sich continuirlich ändert. Wo keine Beschleunigung erster Ordnung ist, wirkt keine Kraft; mit dem Aufhören der einen verschwindet die andere. Die Kraft ist nicht die unmittelbare Ursache der Geschwindigkeit, sondern nur der Aenderung der Geschwindigkeit. Sie kann niemals augenblicklich Geschwindigkeit hervorbringen oder tilgen, sondern nur allmählich sie wachsen oder abnehmen lassen. Indessen denkt man sich oft die Geschwindigkeit durch das momentane Wirken einer besondern Ursache erzeugt und nennt eine solche, weil sie nur einen Moment wirkt, eine Momentankraft und im Gegensatz zu ihr die vorhin betrachteten Kräfte continuirlich wirkende oder kurz continuirliche Kräfte.

Ist die Beschleunigung erster Ordnung nach Grösse und Richtung unveränderlich, so reicht die Kraft aus, um alle Veränderung der Bewegung hervorzubringen und sie ist selbst unveränderlich, weil es ihre Wirkung ist. Ist sie aber veränderlich, sei es nach Grösse oder nach Richtung allein oder in beiderlei Hinsicht zugleich, so setzt die Beschleunigung zweiter Ordnung, welche diese Aenderung veranlasst, eine neue Ursache oder Kraft zweiter Ordnung voraus, welche selbst als Ursache der Veränderung der Kraft erster Ordnung anzusehen ist. In gleicher Weise gibt es Kräfte aller Ordnungen, wo es Beschleunigungen aller Ordnungen gibt und fallen die Kräfte von einer gewissen Ordnung an hinweg, sobald die Beschleunigung der nächstvorhergehenden Ordnung nach Grösse und Richtung constant wird.

Um zu einem Maasse der Kräfte zu gelangen, bedarf die vorliegende Auffassungsweise eines Princips über den Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung. Dasselbe lautet: J e d e U r s a c h e i s t i h r e r W i r k u n g p r o p o r t i o n a l u n d u m g e k e h r t. Die Wirkung der Kraft ist die dem beweglichen Punkte er-

theilte Beschleunigung; ihre Intensität muss daher der mitgetheilten Beschleunigung proportional sein. Ist die Masse m die Beschleunigung der Bewegung φ, so muss die Kraft $\mathfrak{F}$ dem m-werthigen Punkte die Beschleunigung φ auch m-fach ertheilen; ihr Ausdruck ist daher $\mathfrak{F} = K \cdot m\varphi$, wo K ein Proportionalitätsfactor ist. Für eine zweite Kraft $\mathfrak{F}'$, welche einem m'-werthigen Punkte die Beschleunigung φ' ertheilt, hat man ebenso $\mathfrak{F}' = K \cdot m'\varphi'$. Daher wird das Verhältniss beider

$$\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}'} = \frac{m}{m'} \cdot \frac{\varphi}{\varphi'}$$

d. h. die Intensitäten zweier Kräfte stehen im zusammengesetzten Verhältnisse der Massen der Punkte und der Beschleunigungen, die sie ihnen ertheilen. Wählt man nun zum Messen der Kräfte überhaupt die Schwere (die Ursache des Fallens der Körper), welche ihnen die Beschleunigung $g = 9{,}81$ ertheilt, zur Krafteinheit das Kilogramm und zur Einheit der Masse die Masse, welcher die Krafteinheit die Einheit der Beschleunigung ertheilt, so wird, wenn man diese Grössen an die Stelle von $\mathfrak{F}'$, m', φ' treten lässt und die Masszahl $\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}'}$ der Kraft $\mathfrak{F}$ mit F bezeichnet

$$F = m\varphi,$$

d. h. die Masszahl F der Intensität der Kraft, welche der Masse m die Beschleunigung φ zu ertheilen vermag, ist gleich dem Produkte aus den Masszahlen der Masse und der Beschleunigung.

In Betreff der Momentenkräfte schliesst man ähnlich. Sind $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}'_0$ zwei Momentankräfte, welche den Massen m, m' die Geschwindigkeiten v, v' zu ertheilen vermögen, so wird

$$\frac{\mathfrak{F}_0}{\mathfrak{F}'_0} = \frac{m}{m'} \cdot \frac{v}{v'}$$

und wenn man zur Einheit der Momentankräfte diejenige Momentankraft wählt, welche der Masseneinheit die Geschwindigkeit $v' = 1$ zu ertheilen vermag, so folgt

$$f_0 = mv,$$

wo f_0 die Masszahl der Momentankraft $\mathfrak{F}_0$ bedeutet, d. h. die Masszahl der Momentankraft ist das Produkt der Masszahlen der Masse und der Geschwindigkeit.

§. 5. Hauptsächlich die Nothwendigkeit der Annahme des Princips, dass zwischen Ursache und Wirkung Proportionalität stattfinde, hat uns veranlasst, die Kräfte direct zu definiren. An sich liegt nämlich keine Nöthigung vor, Proportionalität aufzustellen; viele andere Arten der Abhängigkeit könnten mit gleichem Rechte vorausgesetzt werden; die Mechanik, welche sie zur Folge hätten, wäre aber eine ganz andere. Es ist Newtons Verdienst die Fundamente der Mechanik gelegt zu haben. Er stellt an der Spitze seines berühmten Werkes „Principia philosophiae naturalis mathematica" drei Grundsätze über die Wirkung von Kräften auf, welche von da in alle Lehrbücher der Mechanik übergegangen sind. Dieselben sind aber nicht nothwendig Grundsätze der theoretischen Mechanik, sondern vielmehr der Physik. Sie betreffen die Vorgänge der physischen Welt und vermitteln die Anwendung der reinen Mechanik auf die Erklärung der Naturphänomene, indem sie die Voraussetzungen bezeichnen, unter welchen die abstracten Lehren dieser Wissenschaft dort zur Geltung kommen. Diese Grundsätze sind folgende:

1. Jeder Körper verharrt in dem Zustande der Ruhe oder der geradlinigen gleichförmigen Bewegung, so lange er nicht durch äussere Kräfte zur Aenderung dieses Zustandes gezwungen wird (Princip der Trägheit der Materie).

1. Die Aenderung der Bewegung ist proportional der bewegenden Kraft und erfolgt in der Richtungslinie derselben.

3. Die Kraftwirkungen zwischen zwei Körpern sind stets einander entgegengesetzt gleich (Princip der Action und Reaction).

Die Beschleunigung ist definirt worden als das, was die Aenderung der Geschwindigkeit eines Punktes nach Grösse und Richtung bewirkt und die Kraft ist die Ursache der Beschleunigung. Ohne Kraft ist daher eine Aenderung in der gleichförmig geradlinigen Bewegung nicht möglich. Für die theoretische Mechanik ist daher das Princip der Trägheit nicht erforderlich, es sagt nichts Neues. Für die Physik sagt es aber aus, dass die abstracten Vorstellungen von Beschleunigung und Kraft auf die Materie angewandt werden dürfen. Das zweite Princip drückt nichts weiter aus, als dass die Kraft die Beschleunigung hervorbringt und wie jede Ursache ihrer Wirkung proportional ist. Das Princip der Action und Reaction spricht im Grunde die Behauptung aus, dass in der Natur alle Ursachen der Beschleunigung paarweise vorhanden und entgegengesetzt gleich sind. Ueber die Existenz von Ursachen in der Natur lehrt nur die Physik, nicht die abstracte Mechanik; daher gehört dies Princip streng genommen jener Wissenschaft allein an. In der That kommt es auch nur in den Anwendungen der Mechanik vor, welche noch zum Theil experimentelle Resultate zu Grunde legen müssen.

Man hat die Newton'schen Sätze vielfach commentirt und erweitert, ihre Stellung zur Mechanik aber vielfach missverstanden, weil man eine Forderung theoretischer Auffassung von dem durch die Sinne Wahrnehmbaren nicht trennte. Dass Kraft nur etwas Gedachtes ist und nicht etwas Handgreifliches, in der Natur Beobachtbares, hat Newton bereits auszusprechen für nöthig gefunden und wenn eine gewisse Naturbetrachtung die Kräfte beobachten zu können glaubt, sogar von ihrem Sitz spricht und sozusagen eine Dogmatik über die reale Existenz von Kräften in der Natur aufstellt, so genügt es wohl, sie auf folgende Stelle in den *Principiis philosophiae naturalis* zu verweisen: „*Voces attractionis, impulsus vel propensionis cuiuscunque in centrum indifferenter et pro se mutuo promiscue usurpo, has vires non physice sed mathematice tantum considerando. Unde caveat lector, ne per huiusmodi voces cogitet, me speciem vel modum actionis causamve aut rationem physicam alicubi definire, vel centris (quae sunt puncta mathematica) vires vere et physice tribuere, si forte aut centra trahere aut vires centrorum esse dixero*“. (Newton, princ. phil. natur. Lib. I. ad definitionem VIII).

§. 6. Ist die Bewegung eines Systems vollständig bekannt, so lassen sich die Kräfte jeder Ordnung aufstellen, welche den Beschleunigungen derselben Ordnung der einzelnen Punkte entsprechen. Sie bilden zusammen ein Streckensystem, auf welches die Lehren des ersten Theiles dieses Buches Anwendung finden können. Für dies System von Kräften, in welchem jede Kraft einem bestimmten Punkte angehört, ist die besondere Beschaffenheit des Punktsystems gleichgültig. Es macht keinen Unterschied, ob dasselbe unveränderlich oder nach gewissen Gesetzen veränderlich ist. Weil durch dies

Kräftesystem die Beschleunigungen aller Punkte sofort gegeben sind, indem man jede Kraft durch die Masse des Punktes, dem sie angehört, blos zu dividiren braucht, so nennen manche Autoren dasselbe auch das System der Effectivkräfte, zum Unterschiede von gewissen andern Kräftesystemen, welche das Punktsystem afficiren können. Für jede Ordnung gibt es ein besonderes Effectivkräftesystem.

Das unveränderliche System ist nur gewisser Bewegungen fähig und alle anderen sind ausgeschlossen. Dasselbe kann daher nur gewisse Beschleunigungen besitzen. Das System dieser Beschleunigungen ist aber gegeben, sobald die Beschleunigungen dreier Punkte oder die ihnen äquivalenten Beschleunigungen der Capp. XIII, XIV, XV des II. Th. gegeben sind. Daher ist das System der Effectivkräfte des unveränderlichen Systems äquivalent dem System der Kräfte, welche die Beschleunigung dreier Punkte bestimmen oder Systemen von Kräften, welche jene anderen, diesen Beschleunigungen äquivalenten Beschleunigungen zu geben im Stande sind. Es gibt daher verschiedene Kräftesysteme, welche am unveränderlichen System einander äquivalent sind, d. h. denselben Beschleunigungszustand einer bestimmten Ordnung zur Folge haben. Gibt man ein beliebiges Kräftesystem an einem unveränderlichen Punktsystem, so wird aus ihm nicht in allen Fällen ein möglicher Beschleunigungszustand folgen. Werden z. B. mehr als drei Kräfte für bestimmte Punkte gegeben, so müssen, damit ein bestimmter Beschleunigungszustand daraus folge, noch weitere Relationen zwischen ihnen gegeben oder willkührlich angenommen werden, damit die Bewegung vollständig bestimmt sei. Diese Bedingungen drücken einen gewissen Zwang aus, welchen das System erleiden muss, wenn es anders ein unveränderliches bleiben soll. Dieser Zwang kann auf mancherlei Weise ausgeübt werden; in vielen Fällen reicht es hin, das System als aus einem festen Material gearbeitet anzusehen, in anderen Fällen denkt man sich die Systempunkte durch Fäden miteinander verknüpft. Wie dem auch immer sei, in allen Fällen kann man den Zwang durch Kräfte ersetzen, welche zwischen denjenigen Punkten wirken, deren unveränderlicher Abstand durch die Wirkung der gegebenen Kräfte bedroht ist. Diese Kräfte nennt man innere Spannungen oder Pressungen.

Wenn zwei Kräftesysteme als Streckensysteme in Bezug auf ein unveränderliches System äquivalent sind, so können die Spannungen, welche sie veranlassen, demnach sehr verschieden sein.

Aehnliches gilt nicht blos für unveränderliche, sondern auch für veränderliche Systeme, wenn ihre Veränderlichkeit an gewisse Bedingungen geknüpft ist.

Dies gilt für alle Ordnungen. Dagegen findet beim unveränderlichen System eine gewisse Freiheit hinsichtlich der Wahl des Angriffspunktes

der Kräfte statt, wie sich bald zeigen wird. In Bezug auf die Fragen über die Möglichkeit, Bestimmtheit, Mehrdeutigkeit und Ueberbestimmtheit der Bewegung, welche die Folge eines gegebenen Kräftesystems ist, sind verhältnissmässig noch sehr wenig Untersuchungen vorhanden.

Ist ein System nicht frei, sondern an gewisse Bedingungen gebunden, welche Hindernisse seiner Beweglichkeit darstellen, so werden diese die aus einem gegebenen Kräftesystem bestimmter Ordnung folgenden Beschleunigungen für jede Ordnung modificiren. Daher kann ihr modificirender Einfluss selbst durch Kräfte derselben Ordnung ausgedrückt werden. Indem man diese dem gegebenen Kräftesystem hinzufügt, kann man das System als ein freies behandeln. Wir nennen solche Kräfte, welche die, die Beweglichkeit hindernden oder beschränkenden Bedingungen ausdrücken, Widerstände (oft auch Spannungen) oder Reactionen gegenüber den gegebenen Kräften, deren Einfluss durch sie beschränkt wird, welche die Actionen sind. Wenn die Beschleunigung eines Punktes, die er in Folge der Actionen und seines Zusammenhanges mit dem System erlangt, durch das Hinderniss als die Reaction vernichtet wird, so heisst die Kraft, welche dieser vernichteten Beschleunigung entspricht, der Druck auf den Punkt. Druck und Widerstand sind stets gleich, weil letzterer die Beschleunigung des ersteren an demselben Punkte tilgt. Ebenso wird man die Bedingungen, welche einem Kräftesystem auferlegt werden müssen, damit aus ihm an einem Punktsystem von bestimmter Gattung der Veränderlichkeit ein Beschleunigungszustand möglich sei, durch Kräfte ausdrücken und alsdann das System als vollkommen veränderlich (oder je nach dem Ausdruck der Bedingungen auch als unveränderlich) ansehen. Auch solche Kräfte nennen wir innere Spannungen und Pressungen.

§. 7. Unter der Wirkung eines Kräftesystems 1. Ordnung auf ein Punktsystem zur Zeit t verstehen wir den Beschleunigungszustand des Systems, welcher aus ihm folgt. Sie besteht darin, dass die Systempunkte die Elementarbeschleunigungen erlangen, welche den Geschwindigkeitszustand des Punktsystems zu dieser Zeit in den der Zeit $t + dt$ entsprechenden Geschwindigkeitszustand überführen. Diese Wirkung ist verschieden nach der Beschaffenheit des Punktsystems; sie ist eine andere, wenn dasselbe unveränderlich und anders, wenn es veränderlich ist. Ist der Geschwindigkeitszustand zur Zeit $t + dt$ derselbe, wie zur Zeit t, so ist die Wirkung des Kräftesystems zur Zeit t Null, d. h. es tilgen sich die einzelnen Kräfte gegenseitig so, dass sie auf diesen Zustand keinen Einfluss üben. Man nennt diesen Zustand des Kräftesystems und auch, wenngleich weniger passend, den gleichzeitigen Zustand des Punktsystems, das Gleichgewicht des Kräfte- oder Punktsystems. Zum Gleichgewicht ist der Zustand der Ruhe des Punktsystems nicht erforderlich, wenngleich er damit

verbunden sein kann. Das Gleichgewicht der Kräfte kann momentan oder dauernd sein. Entsprechendes gilt für alle Ordnungen der Kräfte.

Zwei Kräftesysteme heissen in Bezug auf ein Punktsystem äquivalent, wenn sie auf dasselbe die nämliche Wirkung auszuüben im Stande sind, d. h. den Geschwindigkeitszustand desselben auf gleiche Weise abzuändern vermögen. Kehrt man von zwei äquivalenten Kräftesystemen das eine so um, dass alle Kräfte unter Beibehaltung ihrer Intensitäten in entgegengesetztem Sinne an denselben Punkten angreifen, wie vorher, und lässt dies umgekehrte System mit dem ursprünglichen zugleich wirken, so bilden beide ein im Zustande des Gleichgewichtes befindliches Gesammtsystem. Denn alle Elementarbeschleunigungen, welche die Kräfte des einen veranlassen, werden durch die entgegengesetzten Elementarbeschleunigungen des anderen getilgt, so dass der Geschwindigkeitszustand des Punktsystems durch das Gesammtsystem nicht alterirt wird. Umgekehrt sind zwei Kräftesysteme äquivalent, wenn das eine von ihnen umgekehrt mit dem anderen im Gleichgewicht ist; Untersuchungen über die Aequivalenz der Kräfte sind daher zugleich auch Untersuchungen über das Gleichgewicht und umgekehrt. Statik heisst die Theorie des Gleichgewichtes oder der Aequivalenz der Kräfte.

Kräfte, welche an einem Systeme im Gleichgewichte sind, können unbeschadet der Wirkung des ganzen Kräftesystems getilgt oder in beliebiger Menge zugefügt werden. Im ersten Falle fallen zugleich mit ihnen Spannungen hinweg, welche durch die Bedingungen, denen das Punktsystem seiner Constitution nach unterworfen ist, unter Einfluss jener Kräfte veranlasst wurden, im letzten Falle müssen solche hinzutreten.

Oft ist eine einzelne Kraft einem ganzen Kräftesysteme äquivalent; man nennt sie die Resultante desselben und die Kräfte des Systems ihre Componenten. Dieselbe, in entgegengesetztem Sinne genommen, bringt mit dem Kräftesysteme Gleichgewicht hervor. Ist ein Kräftesystem im Gleichgewichte, so ist jede einzelne Kraft desselben, in umgekehrtem Sinne genommen, die Resultante aller übrigen.

§. 8. Wir wollen jetzt noch einige Grundbegriffe erläutern, die mit den Kräften erster Ordnung in Verbindung stehen. Unter allen Zerlegungen der Beschleunigung φ erster Ordnung war die Zerlegung in Tangential- und Normalbeschleunigung die wichtigste (Thl. II, Cap. VIII, §. 6). Die diesen beiden Componenten entsprechenden Kräfte heissen die Tangentialkraft und Normal- oder Centripetalkraft. Ihre Intensitäten sind $F_t = m\varphi_t = m\dfrac{dv}{dt}$ und $F_n = m\varphi_n = m\dfrac{v^2}{\varrho}$. Die erstere hat die Richtung der Tangente, die zweite ist normal zur Bahn, nach dem Krümmungsmittelpunkte hingewandt, wie die betreffenden Beschleunigungen. Die totale Kraft $F = m\varphi$ setzt sich aus ihnen zusammen nach der Formel

$$F = m\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\varrho^2}} = \sqrt{F_t^2 + F_n^2}$$

und nennt man F_t und F_n die Tangential- und Normalcomponente von F.

Mit der Componenten F_t der Kraft F stehen in innigem Zusammenhang die Begriffe von **Kraftantrieb, Bewegungsgrösse, Arbeit** und **lebendiger Kraft.**

Multiplicirt man nämlich die Gleichung $F_t = m\frac{dv}{dt}$ mit dt und integrirt sie, indem man F_t als Function der Zeit dargestellt denkt, nach t zwischen den Grenzen t_0 und t, welchen die Werthe v_0 und v der Geschwindigkeit entsprechen, so erhält man:

$$\int_{t_0}^{t} F_t \,.\, dt = mv - mv_0.$$

Das Element des Integrales zur Linken, gebildet aus der Intensität der Tangentialkraft und dem Zeitelemente, heisst der **Elementarantrieb der Kraft** F und das Integral selbst der **Antrieb der Kraft** F **während der Zeit** $t - t_0$. Nun ist mv die Bewegungsgrösse oder die Momentankraft des Punktes und da $mv - mv_0$ die Aenderung derselben während des Zeitintervalles $t - t_0$ darstellt, so kann der Inhalt der vorstehenden Gleichung in dem Satze ausgesprochen werden: **Bei jeder Bewegung eines Punktes ist der Antrieb der Kraft während irgend eines Zeitintervalles gleich der Aenderung, welche die Bewegungsgrösse während dieser Zeit erleidet.**

Ist die Bewegung geradlinig, so ist $F_t = F$; ist sie gleichförmig, so ist der Antrieb Null. Die vorstehende Gleichung für den Antrieb geht aus Th. II, Cap. VIII, §. 10 unmittelbar hervor, wenn man die dortige Gleichung $v - v_0 = \int_{t_0}^{t} \varphi_t dt$ mit der Masse m des beweglichen Punktes multiplicirt.

Drückt man in der Gleichung $F_t = m\frac{dv}{dt}$ die Tangentialbeschleunigung $\frac{dv}{dt}$ durch $\frac{d \cdot \frac{1}{2} v^2}{ds}$ aus, multiplicirt mit ds und integrirt, indem man F_t als Function des Curvenbogens s dargestellt denkt, zwischen zwei Grenzen s_0 und s, welche den Geschwindigkeiten v_0 und v entsprechen, so erhält man:

$$\int_{s_0}^{s} F_t ds = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2.$$

Das Element des Integrales zur Linken, nämlich das Produkt aus der

Tangentialkraft und dem Wegelemente ds, durch welches der bewegliche Punkt fortgeführt wird, heisst die Elementararbeit der Kraft F und das Integral selbst die Arbeit der Kraft F längs des Weges $s - s_0$. Die Grösse mv^2, das Produkt aus der Masse des beweglichen Punktes und dem Quadrate seiner Geschwindigkeit heisst die lebendige Kraft des Punktes. Mit Hülfe dieser Begriffsbestimmungen lautet der Inhalt der Gleichung: Bei jeder Bewegung eines Punktes ist die Arbeit der Kraft längs irgend eines Weges gleich der Aenderung, welche die halbe lebendige Kraft des Punktes längs dieses Weges erleidet. Diese Gleichung geht auch aus der analogen Gleichung in Th. II, Cap. VIII, §. 10 hervor, indem man dieselbe mit der Masse m multiplicirt und bedenkt, dass $\varphi \cos \alpha = \varphi_t$, also $m\varphi \cos \alpha = m\varphi_t = F_t$ ist. Alles, was dort über die Arbeit der Beschleunigung und in den folgenden §§ über Momente der Beschleunigung gesagt ist, gilt auch unmittelbar von der Kraft. Die Elementararbeit einer Kraft kann hiernach sowohl als das Produkt der Projection der Kraft auf die Richtung des Wegelementes ds und dieses Wegelementes selbst, als auch als das Produkt der Kraft F selbst und der Projection des Wegelementes auf ihre Richtung aufgefasst werden. Die Elementararbeit der Kraft ist positiv, Null oder negativ, je nachdem die Richtung von ds mit der Richtung von F einen spitzen, rechten oder stumpfen Winkel bildet.

Die eigenthümliche Benennung „lebendige Kraft" rührt von Leibnitz her; sie hat mit der Vorstellung des Belebten nichts gemein, auch ist es rathsam, den Gedanken fern zu halten, als sei der bewegliche Punkt der Sitz einer Kraft, die ihn treibt. Leibnitz unterschied zwischen todten und lebendigen Kräften; erstere waren für ihn diejenigen, welche keine Bewegung hervorbringen, sondern nur Druck oder Spannung ausüben; letztere waren die Kräfte, welche Bewegung hervorrufen. Die ersteren mass er durch die Intensität, die zweiten durch die Arbeit oder durch die Aenderung von $\frac{1}{2}mv^2$, also, wenn ursprünglich keine Geschwindigkeit vorhanden war, durch $\frac{1}{2}mv^2$. Die Geschichte der Mechanik kennt einen heftigen Streit über das richtige Maass der Kräfte, geführt zwischen Verfechtern der Leibnitz'schen und d'Alembert'schen Ansicht über diesen Punkt; derselbe endete von selbst, als man die Benennungen sorgfältiger wählte und nicht mehr Intensität und Arbeit verwechselte.

Bezeichnet man die Arbeit einer Kraft F mit T, setzt man nämlich:

$$\int_{s_0}^{s} F_t ds = T,$$

so folgt

$$F_t = \frac{dT}{ds},$$

d. h. die Intensität der Tangentialkraft ist die Derivirte der Arbeit nach dem Wege.

Setzt man den Antrieb der Kraft F gleich J, nämlich

$$\int_{t_0}^{t} F_t dt = J,$$

so folgt

$$F_t = \frac{dJ}{dt},$$

d. h. die Intensität der Tangentialkraft ist die Derivirte des Antriebes nach der Zeit.

Die Arbeit einer Kraft kann immer als das Produkt einer Intensität und einer Länge dargestellt werden. Die Einheit der Arbeit ist die Arbeit der Krafteinheit längs der Längeneinheit in ihrer Richtung. Ist die Krafteinheit das Kilogramm und die Längeneinheit das Meter, so heisst die Arbeitseinheit das Kilogrammeter.

Die hier erläuterten Begriffe lassen sich auf Kräfte aller Ordnungen ausdehnen. Construirt man nämlich die Hodographen aller Ordnungen, indem man von einem beliebig annehmbaren Pole aus mit den Geschwindigkeiten und den Beschleunigungen der 1., 2., 3., ... Ordnung Radienvectoren parallel zieht und die Endpunkte zu continuirlichen Curven verbindet, so ist das Bogenelement des Hodographen H_n der n^{ten} Ordnung die Elementarbeschleunigung n^{ter} Ordnung $\varphi^{(n)}dt$ und wenn gleichzeitig mit dem Hauptpunkte ein beweglicher Punkt den Hodographen beschreibt, $\varphi^{(n)}$ dessen Geschwindigkeit und parallel der Tangente des Hodographen gerichtet. Die Beschleunigung der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung $\varphi^{(n+1)}$ zerfällt dann in eine Componente $\varphi_\tau^{(n+1)} = \frac{d\varphi^{(n)}}{dt}$ längs der Tangente des Hodographen und eine andere $\varphi_\nu^{(n+1)}$ in der Richtung der Hauptnormalen nach dem Krümmungsmittelpunkte des Hodographen H_n hin gerichtet. Letztere ist, wenn $d\varepsilon_n$ den Contingenzwinkel von H_n bedeutet, $\varphi_\nu^{(n+1)} = \varphi^{(n)} \cdot \frac{d\varepsilon_n}{dt}$, oder wenn $ds_n = \varphi^{(n)}dt$ das Bogenelement und $\varrho_n = \frac{ds_n}{d\varepsilon_n}$ der Krümmungshalbmesser von H_n ist, $\varphi_\nu^{(n+1)} = \frac{[\varphi^{(n)}]^2}{\varrho_n}$. Man kann daher auch die Kraft $F^{(n+1)}$ der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung zerlegen in die Tangentialkraft $F_\tau^{(n+1)} = m\frac{d\varphi^{(n)}}{dt}$ und die Normalkraft $F_\nu^{(n+1)} = m\frac{[\varphi^{(n)}]^2}{\varrho_n}$, welche die Richtungen der Tangente und Hauptnormalen der Curve H_n besitzen. Man erhält daher, wie früher

$$m\varphi^{(n)} - m\varphi_0^{(n)} = \int_{t_0}^{t} F_\tau^{(n+1)} dt$$

und da $ds_n = \varphi^{(n)} dt$, also $\frac{d\varphi^{(n)}}{dt} = \varphi^{(n)} \frac{d \cdot \varphi^{(n)}}{ds_n}$ ist,

$$\tfrac{1}{2} m [\varphi^{(n)}]^2 - \tfrac{1}{2} m [\varphi^{(n)}]_0^2 = \int_{s_0}^{s} F_\tau^{(n+1)} ds_n.$$

Wenn man die Kraft $F^{(n)}$ der n^{ten} Ordnung nach drei Coordinatenaxen der x, y, z zerlegt, so ergibt sich, da $F_\tau^{(n)} = m \frac{d\varphi^{(n-1)}}{dt} = \frac{dF^{(n-1)}}{dt}$ ist, dass die Componenten sind: $F_x^{(n)} = m \frac{d^n x}{dt^n}$, $F_y^{(n)} = m \frac{d^n y}{dt^n}$, $F_z^{(n)} = m \frac{d^n z}{dt^n}$. Die Intensität und die Richtungscosinusse $\cos \alpha_n$, $\cos \beta_n$, $\cos \gamma_n$ ergeben sich hieraus als

$$F^{(n)} = m \sqrt{\left(\frac{d^n x}{dt^n}\right)^2 + \left(\frac{d^n y}{dt^n}\right)^2 + \left(\frac{d^n z}{dt^n}\right)^2},$$

$$\frac{\cos \alpha_n}{\frac{d^n x}{dt^n}} = \frac{\cos \beta_n}{\frac{d^n y}{dt^n}} = \frac{\cos \gamma_n}{\frac{d^n z}{dt^n}} = \frac{1}{F^{(n)}}.$$

Denkt man sich eine Curve, welche die Bahn des Punktes an der Stelle, wo er zur Zeit t sich befindet, n-punktig berührt, so stimmen die $n-1$ ersten Differentialquotienten der Coordinaten beider überein und beginnen die Coordinatendifferenzen in der Entwickelung der Coordinaten des Hauptpunktes und eines Punktes, welcher auf der berührenden Curve mit jenem zugleich vom Berührungspunkte ausgeht und eine Bewegung besitzt, für welche die Beschleunigungen bis zur $n-1^{\text{sten}}$ Ordnung den Beschleunigungen jenes gleich sind mit

$$\frac{1}{n!} \vartheta^n \left[\frac{d^n x}{dt^n} + \cdots\right], \quad \frac{1}{n!} \vartheta^n \left[\frac{d^n y}{dt^n} + \cdots\right], \quad \frac{1}{n!} \vartheta^n \left[\frac{d^n z}{dt^n} + \cdots\right].$$

Hieraus schliesst man, wie B. I, S. 324, dass die Verbindungslinie beider Punkte die Richtung der Kraft $F^{(n)}$ in der Grenze angibt und dass, wenn man die verschwindend klein werdende Entfernung beider mit δ_n (Deviation n^{ter} Ordnung) bezeichnet,

$$\frac{\delta_n}{\frac{1}{n!} dt^n} = \varphi^{(n)}, \qquad \delta_n = \frac{1}{n!} \varphi^{(n)} dt$$

ist.

II. Capitel.

Aequivalenz der Kräftesysteme am freien Punkte. Aequivalenz derselben am Punkte, welcher gezwungen ist, auf einer Curve oder auf einer Fläche zu bleiben.

§. 1. Ein Kräftesystem $[P]$, $[P']$, $[P'']$, ... $[P^{(n)}]$ an einem freien, d. h. keinen seine Beweglichkeit beschränkenden Bedingungen unterworfenen Punkte ist äquivalent einer einzigen Kraft, deren Richtung durch den Punkt hindurchgeht, d. h. es hat eine Resultante $[R]$. Reducirt sich dieselbe auf Null, so ist das System im Gleichgewicht. Denn von Seiten jeder einzelnen Kraft $[P^{(i)}]$ erlangt der Punkt eine bestimmte Beschleunigung $[\varphi^{(i)}]$, welche nach Richtung und Sinn mit $[P^{(i)}]$ übereinstimmt. Das System dieser Beschleunigungen ist äquivalent einer Beschleunigung $[\varphi] = \Sigma[\varphi^{(i)}]$; es gibt daher eine Kraft, deren Folge diese Beschleunigung ist, welche mithin durch den Punkt geht und nach Richtung und Sinn mit ihr übereinstimmt. Sie ist äquivalent dem System der Kräfte, weil aus ihr dieselbe Beschleunigung folgt, wie aus ihm. Das Streckensystem der Kräfte $[P^{(i)}]$ ist ähnlich dem System der Beschleunigungen $[\varphi^{(i)}]$ und mit ihm ähnlich liegend. Hieraus folgt, dass die Resultante $[R]$ des Kräftesystems die geometrische Summe der Kräfte, nämlich $[R] = \Sigma[P^{(i)}]$ ist.

Reducirt sich $[R]$ auf Null, so ist auch $[\varphi^{(i)}]$ Null, d. h. das Kräftesystem hat keine Beschleunigung des Punktes zur Folge, es ist im Gleichgewicht.

§. 2. Diesem Satze reihen sich als Folgerungen an (vgl. B. I, S. 16—18): Die Resultante zweier Kräfte, deren Richtungen sich in einem Punkte schneiden, geht durch ihren Schnittpunkt und ist die Diagonale des Parallelogramms, welches über den Strecken, welche die Kräfte darstellen, vom Schnittpunkte aus construirt werden kann. Fallen beide Kräfte in dieselbe Richtung, so ist ihre Resultante gleich ihrer Summe oder Differenz, je nachdem sie übereinstimmenden oder entgegengesetzten Sinnes sind. Sind sie entgegengesetzt gleich, so tritt Gleichgewicht ein.

Der Satz heisst der Satz vom Parallelogramm der Kräfte. Es gibt für denselben sehr viele Beweise.*) Bei dem hier befolgten Gange, nach welchem die Theorie der Kräfte der Theorie der Beschleunigung nachfolgt, ist ein ausführlicher Beweis nicht nöthig.

*) Vgl. Westphal, J. H., Demonstrationum compositionis virium expositio de iisque iudicium. Goettingae, 1817.

Umgekehrt kann jede Kraft in zwei andere (Componenten) zerlegt werden, welche ihr zusammen äquivalent sind und zwar auf unendlich viele Arten.

Die Resultante von drei Kräften, deren Richtungen sich in einem Punkte schneiden, geht durch diesen Punkt hindurch und wird nach Grösse, Richtung und Sinn durch die Diagonale des Parallelepipeds dargestellt, welches die drei Strecken, welche die Kräfte darstellen, zu Eckkanten hat.

Da die Diagonale eines Parallelepipeds, ohne dass die Kanten verschwinden, nur Null werden kann, wenn die Eckkanten in eine Ebene fallen, so folgt, dass drei an einem Punkte wirkende Kräfte nur dann im Gleichgewichte sich befinden können, wenn ihre Richtungen in einer Ebene liegen. Im Falle des Gleichgewichtes ist jede von ihnen der Resultanten der beiden übrigen entgegengesetzt gleich.

Zum Gleichgewichte von Kräften, deren Richtungen sich in einem Punkte schneiden, ist erforderlich und hinreichend, dass die Summe ihrer Projectionen auf irgend drei Axen des Raumes verschwindet, von denen keine zwei parallel sind und welche auch nicht alle drei einer Ebene parallel laufen.

Behufs der analytischen Bestimmung der Resultante des Kräftesystems tritt hier B. I, S. 16, §. 8 unmittelbar ein. Ebendaselbst sind auch die Bedingungen des Gleichgewichtes desselben aufgeführt, nämlich $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$.

§. 3. Ist der Angriffspunkt der Kräfte P genöthigt, auf einer Curve zu bleiben, so kann er als frei betrachtet werden, sobald der Widerstand der Curve den Kräften P hinzugefügt wird. Derselbe zerfällt in zwei Componenten, den Normalwiderstand N und den tangentialen Widerstand oder die Reibung. Die Reibung ist proportional N und wird, wenn f den Reibungscoefficienten darstellt, durch fN ausgedrückt. Zerlegt man die Resultante R der gegebenen Kräfte P in zwei Componenten, von denen die eine normal, die andere tangential zur Curve ist, und bezeichnet mit ϑ den Winkel, welchen R mit seiner Normalcomponente bildet, so sind $R \cos \vartheta$ und $R \sin \vartheta$ diese beiden Componenten. Von diesen stellt die erstere den Druck auf die Curve dar und wird durch den Normalwiderstand N getilgt, während die andere sich mit der Reibung fN zusammensetzt. Die Reibung ist stets der tangentiellen Componente $R \sin \vartheta$ entgegengesetzt. So lange $R \sin \vartheta < fN$ also $R \sin \vartheta - fN < 0$ ist, kann eine tangentiale Beschleunigung nicht erfolgen und findet daher Gleichgewicht statt. Die äusserste Grenze dieses Gleichgewichts wird erreicht, wenn $R \sin \vartheta = fN$ oder also $R \sin \vartheta - fN = 0$ ist. Da nun zugleich

$R \cos \vartheta = N$ ist, so folgt, dass bei derselben Intensität von R, diese Grenze erreicht wird, wenn $\operatorname{tg} \vartheta = f$, d. h. wenn R gegen die Normalebene unter einem Winkel geneigt ist, dessen Tangente gleich dem Reibungscoefficienten ist. Es findet daher Gleichgewicht statt, wenn $R \sin \vartheta - fN \overline{\overline{<}} 0$ ist. Da die Reibung der Componenten $R \sin \vartheta$ entgegengesetzt ist, so hängt ihr Sinn von dem Sinne dieser Componenten ab. Je nachdem $R \sin \vartheta$ in der Richtung der Tangente den einen oder andern Sinn hat, ist daher an der äussersten Grenze des Gleichgewichts $R \sin \vartheta - fN = 0$ oder $R \sin \vartheta + fN = 0$.

Um den Punkt zu nöthigen, auf der Curve zu bleiben, kann man die Curve als eine unendlich enge Röhre ansehen, innerhalb welcher er sich befindet.

Hinsichtlich der Kräfte, welche am Punkte angreifen, sind folgende Untersuchungen zu führen: 1. Die Lage des Punktes auf der Curve ist gegeben, das Kräftesystem ist vollständig bestimmt, man soll entscheiden, ob dasselbe in Verbindung mit dem Widerstande der Curve im Gleichgewichte ist, oder nicht und 2. Die Lage des Punktes auf der Curve soll so bestimmt werden, dass ein Kräftesystem, dessen Natur für jede solche Lage bestimmt werden kann, ins Gleichgewicht kommt. In beiden Fällen wollen wir die einfachere Aufgabe, dass nämlich die Reibung Null, also die Curve glatt sei, von der complicirteren trennen, dass Reibung stattfinde.

§. 4. Sind X, Y, Z die Componenten einer der Kräfte P, N_x, N_y, N_z die des Normalwiderstandes N, so müssen im Falle, dass keine Reibung stattfindet, für das Gleichgewicht die Bedingungen erfüllt sein:

$$\Sigma X + N_x = 0, \quad \Sigma Y + N_y = 0, \quad \Sigma Z + N_z = 0,$$

zu welchen noch die Gleichungen der Curve hinzutreten, nämlich:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \varpi(t),$$

worin t die unabhängige Variabele ist, von welcher die Lage des Punktes (xyz) auf der Curve abhängt. Da N senkrecht zur Tangente ist, so besteht die weitere Bedingung

$$N_x x' + N_y y' + N_z z' = 0,$$

wo $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$, $z' = \frac{dz}{dt}$ gesetzt ist. Eliminirt man N_x, N_y, N_z, so folgt

$$x' \Sigma X + y' \Sigma Y + z' \Sigma Z = 0$$

als die vom Widerstande unabhängige Bedingung des Gleichgewichtes der gegebenen Kräfte P. Sie drückt aus, dass die Resultante derselben normal zur Curve sein müsse. Ist sie erfüllt an einer Stelle (x, y, z), so ergibt sich für den Widerstand $N_x = -\Sigma X$, $N_y = -\Sigma Y$, $N_z = -\Sigma Z$,

$N^2 = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2$ und die Richtung (α, β, γ) desselben: $\cos\alpha = N_x : N$, $\cos\beta = N_y : N$, $\cos\gamma = N_z : N$.

Sind $U = 0$, $V = 0$ die Gleichungen der Curve, wo U, V Functionen von x, y, z sind, so genügen x', y', z' den Gleichungen

$$x'U'_x + y'U'_y + z'U'_z = 0,$$
$$x'V'_x + y'V'_y + z'V'_z = 0,$$

welche mit

$$x'\Sigma X + y'\Sigma Y + z'\Sigma Z = 0$$

die Gleichgewichtsbedingung unter der Form

$$\begin{vmatrix} \Sigma X & \Sigma Y & \Sigma Z \\ U'_x & U'_y & U'_z \\ V'_x & V'_y & V'_z \end{vmatrix} = 0$$

liefern.

Ist nicht die Stelle (x, y, z) der Curve, sind dagegen die Kräfte als Functionen des Ortes gegeben, so gibt die Gleichgewichtsbedingung in der ersten Form die Werthe von t für die Punkte der Curve, an welchen das Gleichgewicht der Kräfte möglich ist; in der zweiten Form stellt sie die Gleichung einer Fläche dar, welche die Curve in den Punkten schneidet, in welchen das Gleichgewicht eintreten kann.

Beispiele. 1. Für einen schweren Punkt ist, bei verticaler z-Axe, positiv nach oben gerichtet: $\Sigma X = \Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = -mg$; $N_x = N_y = 0$, $N_z = mg$, daher die Bedingung des Gleichgewichts in der ersten Form $z' = 0$, d. h. die Stellen der Curve, an welchen das Gleichgewicht für die Schwere möglich ist, sind die höchsten und tiefsten Punkte der Curve. In der zweiten Form ist die Bedingung

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -mg \\ U'_x & U'_y & U'_z \\ V'_x & V'_y & V'_z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \begin{vmatrix} U'_x & U'_y \\ V'_x & V'_y \end{vmatrix} = 0.$$

2. Für den schweren Punkt auf der Schnittcurve des Ellipsoids

$$U \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

mit der Kugel $V \equiv x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ wird die Bedingung $xy = 0$, also $x = 0$ oder $y = 0$. Das Gleichgewicht ist demnach in 8 Punkten möglich.

3. Ebenso für die Curve $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} - \frac{1}{p^2} = 0$ (Polodie).

§. 5. Für den Fall, dass Reibung fN stattfindet, hat man für deren Componenten, da sie in die Richtung der Tangente fällt und doppelten Sinn haben kann $\mp fN\frac{dx}{ds}$, $\mp fN\frac{dy}{ds}$, $\mp fN\frac{dz}{ds}$, wo $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ die Richtungscosinusse der Tangente darstellen. Fügt man diese Componenten den übrigen hinzu, so hat man als Gleichgewichtsbedingungen

$$\Sigma X + N_x \mp fN\frac{dx}{ds} = 0,\quad \Sigma Y + N_y \mp fN\frac{dy}{ds} = 0,\quad \Sigma Z + N_z \mp fN\frac{dz}{ds} = 0,$$

$$x'N_x + y'N_y + z'N_z = 0,$$

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \varpi(t) \text{ oder } U = 0,\ V = 0.$$

Um den Widerstand und seine Componenten zu eliminiren, ziehen wir aus den drei ersten Gleichungen

$$\begin{vmatrix} \Sigma Y & \Sigma Z \\ \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} N_y & N_z \\ \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \Sigma Z & \Sigma X \\ \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} N_z & N_x \\ \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \Sigma X & \Sigma Y \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} N_x & N_y \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix}$$

und hieraus durch Quadriren und Addiren mit Rücksicht auf

$$(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2 = R^2 \text{ und } N_x\frac{dx}{ds} + N_y\frac{dy}{ds} + N_z\frac{dz}{ds} = 0:$$

$$R^2 - \left(\Sigma X\cdot\frac{dx}{ds} + \Sigma Y\cdot\frac{dy}{ds} + \Sigma Z\cdot\frac{dz}{ds}\right)^2 = N^2;$$

andererseits ergibt sich durch Multiplication derselben drei Gleichungen mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ nach ihrer Addition:

$$\Sigma X\cdot\frac{dx}{ds} + \Sigma Y\cdot\frac{dy}{ds} + \Sigma Z\cdot\frac{dz}{ds} = \pm fN.$$

Beide Gleichungen liefern nach Elimination von N die gesuchte Gleichgewichtsbedingung

$$\Sigma X\cdot\frac{dx}{ds} + \Sigma Y\cdot\frac{dy}{ds} + \Sigma Z\cdot\frac{dz}{ds} = \pm\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\cdot R,$$

zu welcher noch hinzutreten

$$U'_x\frac{dx}{ds} + U'_y\frac{dy}{ds} + U'_z\frac{dz}{ds} = 0,$$

$$V'_x\frac{dx}{ds} + V'_y\frac{dy}{ds} + V'_z\frac{dz}{ds} = 0.$$

Ist diese Bedingung an einer Stelle (x, y, z) erfüllt, so folgen N_x, N_y, N_z und N nebst dessen Richtungen aus den vorstehenden Gleichungen. Ist die Stelle x, y, z nicht gegeben, so führt die Elimination von $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ zu der Gleichung einer Fläche, welche auf der Curve die äussersten Grenzen derjenigen Bereiche bezeichnet, innerhalb welcher die Punkte liegen, in denen Gleichgewicht stattfinden kann. Durch Auflösung der Gleichungen nach diesen Grössen findet sich nämlich, wenn

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \Sigma X & \Sigma Y & \Sigma Z \\ U'_x & U'_y & U'_z \\ V'_x & V'_y & V'_z \end{vmatrix}, \quad \delta_1 = \begin{vmatrix} U'_y & U'_z \\ V'_y & V'_z \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} U'_z & U'_x \\ V'_z & V'_x \end{vmatrix}, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} U'_x & U'_y \\ V'_x & V'_y \end{vmatrix}$$

gesetzt wird,

$$\varDelta \cdot \frac{dx}{ds} = \pm \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} \cdot R\delta_1, \quad \varDelta \cdot \frac{dy}{ds} = \pm \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} \cdot R\delta_2,$$

$$\varDelta \cdot \frac{dz}{ds} = \pm \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} \cdot R\delta_3$$

und schliesslich also wegen $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$:

$$\varDelta^2 - \frac{f^2}{1+f^2} R^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2) = 0$$

als die gesuchte Gleichung. Für $f = 0$ reducirt sie sich auf $\varDelta = 0$, wie §. 4. Die Punkte, welche $\varDelta = 0$ auf der Curve bezeichnet, gehören den Gleichgewichtsbereichen an. Sie besteht auch noch fort, wenn f von Punkt zu Punkt auf der Curve veränderlich, aber als Function des Ortes bekannt ist.

Beispiele. 1. Für den schweren Punkt ist $\Sigma X = \Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = R = -mg$, als $\varDelta = -mg\,(U'_x V'_y - U'_y V'_x)$, mithin die Gleichung der Fläche, welche auf der Curve die äussersten Grenzlagen für das Gleichgewicht bestimmt,

$$(U'_x V'_y - U'_y V'_x)^2 - f^2 [(U'_y V'_z - U'_z V'_y)^2 + (U'_z V'_x - U'_x V'_z)^2] = 0.$$

2. Für die Polodie

$$U = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad V = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} - \frac{1}{p^2} = 0$$

wird diese Fläche der Kegel 4. Grades

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{a^4 b^4}\right)^2 x^2 y^2 - f^2 \left[\left(\frac{b^2 - c^2}{b^4 c^4}\right)^2 y^2 z^2 + \left(\frac{c^2 - a^2}{c^4 a^4}\right)^2 z^2 x^2\right] = 0.$$

Er bezeichnet auf der Curve 8 Paar Punkte, für welche die 8 Punkte, welche Gleichgewichtslagen ohne Reibung sind, in die Mitten der Paare fallen.

§. 6. Ist der Angriffspunkt der Kräfte P genöthigt, auf einer Fläche zu bleiben, so kann derselbe nach Einführung des Widerstandes der Fläche als frei angesehen werden. Dieser Widerstand kann in zwei Componenten zerlegt werden, von denen die eine, der Normalwiderstand N, in die Normale der Fläche fällt, während die andere, die Reibung fN, der Tangentenebene der Fläche angehört. Zerlegen wir ebenso die Resultante R der gegebenen Kräfte P in eine normale Componente $R \cos \vartheta$ und eine in die Tangentenebene fallende Componente $R \sin \vartheta$, wo ϑ den Winkel zwischen R und der Normalen der Fläche bedeutet, so wird $R \cos \vartheta$ von N getilgt, d. h. es ist $R \cos \vartheta = N$, während die Reibung fN der tangentiellen Kraft

$R \sin \vartheta$ entgegenwirkt. So lange letztere kleiner als die Reibung ist, erfolgt keine Beschleunigung und findet Gleichgewicht statt. An der äussersten Grenze ist $R \sin \vartheta - fN = 0$ die Bedingung des Gleichgewichts und folglich $\operatorname{tg} \vartheta = f$. Allgemein ist $R \sin \vartheta - fN \overline{<} 0$ die Bedingung des Gleichgewichtes. Dasselbe findet statt, so lange die Richtung von R nicht in den Aussenraum eines mit der halben Oeffnung ϑ um die Normale der Fläche beschriebenen Rotationskegels fällt.

Man kann den Zwang des Punktes auf der Fläche verdeutlichen, indem man die Fläche als eine Doppelschale von unendlich kleiner Dicke denkt, zwischen deren Aussen- und Innenfläche der Punkt sich befindet. Ist $R \cos \vartheta$ nach Aussen gerichtet, so wirkt N nach Innen und umgekehrt. Auch genügt es, den Punkt auf der einen oder der anderen Seite der (einfach gedachten) Fläche liegend anzunehmen, je nachdem $R \cos \vartheta$ nach der einen oder nach der entgegengesetzten Seite gerichtet ist.

Ist die Reibung Null, so verlangt das Gleichgewicht in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem:

$$\Sigma X + N_x = 0, \quad \Sigma Y + N_y = 0, \quad \Sigma Z + N_z = 0;$$

woraus folgt

$$\frac{\Sigma X}{N_x} = \frac{\Sigma Y}{N_y} = \frac{\Sigma Z}{N_z}$$

und wenn $U = 0$ die Gleichung der Fläche ist, so bestehen weiter, weil N die Richtung der Normalen hat, die Gleichungen:

$$\frac{N_x}{U'_x} = \frac{N_y}{U'_y} = \frac{N_z}{U'_z} = \frac{N}{\sqrt{U'^2_x + U'^2_y + U'^2_z}}.$$

Aus beiden Proportionalitäten folgen durch Elimination der Widerstandscomponenten N_x, N_y, N_z:

$$\frac{\Sigma X}{U'_x} = \frac{\Sigma Y}{U'_y} = \frac{\Sigma Z}{U'_z}$$

als die beiden Gleichgewichtsbedingungen, welche die gegebenen Kräfte P erfüllen müssen. Sie drücken aus, dass die Resultante R die Richtung der Flächennormale besitzen muss. Sind sie erfüllt, so ist $N_x = -\Sigma X$, $N_y = -\Sigma Y$, $N_z = -\Sigma Z$ u. s. w. Man kann diese beiden Bedingungen durch die eine ersetzen, welche sich jeden Augenblick in sie spalten lässt:

$$\begin{vmatrix} \Sigma Y & \Sigma Z \\ U'_y & U'_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \Sigma Z & \Sigma X \\ U'_z & U'_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \Sigma X & \Sigma Y \\ U'_x & U'_y \end{vmatrix}^2 = 0 \cdot$$

oder

$$R^2 (U'^2_x + U'^2_y + U'^2_z) - (\Sigma X \cdot U'_x + \Sigma Y \cdot U'_y + \Sigma Z \cdot U'_z)^2 = 0.$$

Ist der Punkt x, y, z nicht gegeben, sondern werden die Gleichgewichtslagen desselben gesucht, so stellen die beiden Bedingungen die Gleichungen

einer Curve dar, welche die Fläche in den gesuchten Lagen des Punktes schneidet.

Beispiele. 1. Für einen schweren Punkt ist $\Sigma X = \Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = -mg$, mithin $U_x'^2 + U_y'^2 = 0$, d. h. $U_x' = 0$ und $U_y' = 0$. Das Gleichgewicht findet daher an den höchsten und tiefsten Stellen der Fläche statt.

2. Das Oval $r = 2a\cos^3\vartheta$ rotire um seine horizontal gedachte Axe. In Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen x-Axe diese Linie, dessen y-Axe gleichfalls horizontal und dessen z-Axe vertikal ist, wird für irgend einen Meridian $\cos\vartheta = x : r$, also die Gleichung der Rotationsfläche

$$U = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2ax^3 = 0$$

und folgt für die Gleichgewichtslagen des schweren Punktes auf der Fläche

$$U_x' = 4(x^2 + y^2 + z^2)x - 6ax^2 = 0, \quad U_y' = 4(x^2 + y^2 + z^2)y = 0,$$

woraus mit Rücksicht auf die Gleichung der Fläche folgt $x = \frac{9}{8}a$, $y = 0$.

§. 7. Für den Fall, dass auf der Fläche Reibung fN stattfindet, sind die Bedingungen des Gleichgewichtes mit Rücksicht auf den doppelten Sinn der Reibung

$$\Sigma X + N_x \mp fN\frac{dx}{ds} = 0, \quad \Sigma Y + N_y \mp fN\frac{dy}{ds} = 0, \quad \Sigma Z + N_z \mp fN\frac{dz}{ds} = 0$$

nebst

$$U = 0, \; U_x'dx + U_y'dy + U_z'dz = 0, \; \frac{N_x}{U_x'} = \frac{N_y}{U_y'} = \frac{N_z}{U_z'} = \frac{N}{\sqrt{U_x'^2 + U_y'^2 + U_z'^2}}.$$

Multiplicirt man die drei ersten Gleichungen mit U_x', U_y', U_z', addirt sie und bedenkt, dass $fN\left(U_x'\frac{dx}{ds} + U_y'\frac{dy}{ds} + U_z'\frac{dz}{ds}\right) = 0$ ist vermöge der Differentialgleichung der Fläche, so bleibt

$$\Sigma X \cdot U_x' + \Sigma Y \cdot U_y' + \Sigma Z \cdot U_z' + N_x U_x' + N_y U_y' + N_z U_z' = 0.$$

Die Proportionalitäten zwischen N_x, N_y, N_z, U_x', U_y', U_z' aber liefern

$$N_x U_x' + N_y U_y' + N_z U_z' = N\sqrt{U_x'^2 + U_y'^2 + U_z'^2};$$

daher wird diese Gleichung

$$\Sigma X \cdot U_x' + \Sigma Y \cdot U_y' + \Sigma Z \cdot U_z' + N\sqrt{U_x'^2 + U_y'^2 + U_z'^2} = 0. \quad (1)$$

Andererseits erhält man aus den drei ersten Gleichungen durch Elimination von N_x, N_y, N_z mit Rücksicht auf dieselben Proportionalitäten, welche $N_y U_z' - N_z U_y' = 0, \ldots$ geben:

$$\begin{vmatrix} \Sigma Y & \Sigma Z \\ U_y' & U_z' \end{vmatrix} = \pm fN \begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ U_y' & U_z' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \Sigma Z & \Sigma X \\ U_z' & U_x' \end{vmatrix} = \pm fN \begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ U_z' & U_x' \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \Sigma X & \Sigma Y \\ U_x' & U_y' \end{vmatrix} = \pm fN \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ U_x' & U_y' \end{vmatrix},$$

oder, indem man quadrirt und addirt, wegen $R^2 = (\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2$:

$$R^2 (U_x'^2 + U_y'^2 + U_z'^2) - (\Sigma X \cdot U_x' + \Sigma Y \cdot U_y' + \Sigma Z \cdot U_z')^2$$
$$= f^2 N^2 (U_x'^2 + U_y'^2 + U_z'^2). \quad (2)$$

Die Combination von (1) und (2) behufs Elimination von N liefert schliesslich

$$R^2 (U_x'^2 + U_y'^2 + U_z'^2) - (1 + f^2)(\Sigma X \cdot U_x' + \Sigma Y \cdot U_y' + \Sigma Z \cdot U_z')^2 = 0 \quad (3)$$

als die von den gegebenen Kräften P behufs des Gleichgewichts unabhängig vom Widerstande zu erfüllende Bedingung. Sie drückt nichts anderes aus, als dass die Tangente der Neigung ϑ der Resultante R gegen die Flächennormale gleich f, oder also $\cos\vartheta = 1 : (1 + f^2)^{\frac{1}{2}}$ sei. Denn aus ihr folgt

$$\frac{1}{\sqrt{1 + f^2}} = \frac{\Sigma X}{R} \cdot \frac{U_x'}{W} + \frac{\Sigma Y}{R} \cdot \frac{U_y'}{W} + \frac{\Sigma Z}{R} \cdot \frac{U_z'}{W}, \text{ wo } W = (U_x'^2 + U_y'^2 + U_z'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Es sind aber $\Sigma X : R$, $\Sigma Y : R$, $\Sigma Z : R$ die Richtungscosinusse der Resultante R und $U_x' : W$, $U_y' : W$, $U_z' : W$ die der Normalen und stellt mithin die rechte Seite dieser Gleichung in der That $\cos\vartheta$ dar.

Für $f = 0$ geht die Gleichgewichtsbedingung in die Gleichung des §. 6. über. Sie bezeichnet auf der gegebenen Fläche die Gleichgewichtsbereiche, dieselben enthalten die Punkte des §. 6, in welchen Gleichgewicht ohne Reibung stattfindet.

Beispiel. Für den schweren Punkt ist $\Sigma X = \Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = R = -mg$, mithin stellt

$$m^2 g^2 (U_x'^2 + U_y'^2 + U_z'^2) - (1 + f^2) \cdot m^2 g^2 \cdot U_z'^2 = 0 \text{ oder } U_x'^2 + U_y'^2 - f^2 U_z'^2 = 0$$

die Fläche dar, welche auf der gegebenen Fläche $U = 0$ die Bereiche bezeichnet, innerhalb welcher Gleichgewicht möglich ist.

§. 8. Im Vorstehenden wurde der Reibungscoefficient als constant für die ganze Fläche angenommen. Ist derselbe veränderlich, eine Function von zweien der Coordinaten x, y, z, so bleiben die Betrachtungen ungeändert, die Gleichung der Fläche (3) wird aber complicirter. So kann man z. B. annehmen, es sei f längs gewisser Linien auf der Fläche constant, aber von Linie zu Linie variabel. Für solche Untersuchungen würde es sich empfehlen, die Punkte der Fläche $U = 0$ durch drei Gleichungen $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \varpi(u, v)$ als Functionen von zwei veränderlichen Parametern u, v darzustellen.

Das zu behandelnde Gleichungssystem ist dann

$$\Sigma X + N_x \mp fN \frac{dx}{ds} = 0, \quad \Sigma Y + N_y \mp fN \frac{dy}{ds} = 0,$$
$$\Sigma Z + N_z \mp fN \frac{dz}{ds} = 0,$$
$$N_x \frac{dx}{ds} + N_y \frac{dy}{ds} + N_z \frac{dz}{ds} = 0$$

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \varpi(u, v),$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv,$$

wovon die Gleichung der dritten Zeile die Rechtwinkligkeit des Normalwiderstandes N gegen die Fläche ausdrückt. Multiplicirt man die Gleichungen der ersten Zeile mit $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ und addirt sie, so kommt

$$\Sigma X \cdot \frac{dx}{ds} + \Sigma Y \cdot \frac{dy}{ds} + \Sigma Z \cdot \frac{dz}{ds} = \pm fN;$$

multiplicirt man aber die dritte derselben Gleichungen mit $\frac{dy}{ds}$, die zweite mit $\frac{dz}{ds}$ und subtrahirt sie, so folgt, wenn die analogen Operationen mit den beiden andern Gleichungspaaren ebenfalls ausgeführt werden:

$$\begin{vmatrix} \Sigma U & \Sigma Z \\ \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} N_y & N_z \\ \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \Sigma Z & \Sigma X \\ \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} N_z & N_x \\ \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \Sigma X & \Sigma Y \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} N_x & N_y \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix}.$$

Hieraus ergibt sich weiter, ähnlich wie oben §. 7:

$$R^2 - \left(\Sigma X \cdot \frac{dx}{ds} + \Sigma Y \cdot \frac{dy}{ds} + \Sigma Z \cdot \frac{dz}{ds}\right)^2 = N^2$$

und beide Resultate führen durch Elimination von N zu der Gleichung:

$$f^2 R^2 - (1 + f^2)\left(\Sigma X \cdot \frac{dx}{ds} + \Sigma Y \cdot \frac{dy}{ds} + \Sigma Z \cdot \frac{dz}{ds}\right)^2 = 0.$$

In dieser Gleichung sind noch $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ durch $\frac{1}{ds}\left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right)$, u. s. w., sowie ds selbst auszudrücken. Setzt man nach der üblichen Bezeichnungsweise

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = E, \quad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = F,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = G,$$

so wird

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

und hiermit die Gleichung

$$f^2 R^2 - (1+f^2) \frac{\left[\begin{array}{l} \Sigma X \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) \\ + \Sigma Y \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv\right) \\ + \Sigma Z \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv\right) \end{array}\right]^2}{E du^2 + 2 F du dv + G dv^2} = 0.$$

Diese Gleichung in u, v drückt eine Curve auf der Fläche aus, welche die Gleichgewichtsbereiche für die Reibung begrenzt.

III. Capitel.

Aequivalenz der Kräftesysteme am freien unveränderlichen Punktsysteme.

§. 1. Ein Kräftesystem, welches an einem freien, d. h. keinen Beschränkungen seiner Beweglichkeit unterworfenen Punktsystem angreift, ist ein Streckensystem, auf welches unter einer gewissen Voraussetzung die im ersten Bande Cap. I bis V entwickelte Streckentheorie Anwendung findet. Diese Voraussetzung ist die, dass jede Kraft auf ihrer Richtungslinie verlegt werden, d. h. dass jeder Punkt ihrer Richtungslinie als ihr Angriffspunkt gelten kann, welcher dem System angehört. Dieselbe kommt auf die andere zurück, dass zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte in derselben Richtungslinie äquivalent Null sind, mögen ihre Angriffspunkte zusammenfallen oder von einander verschieden sein.

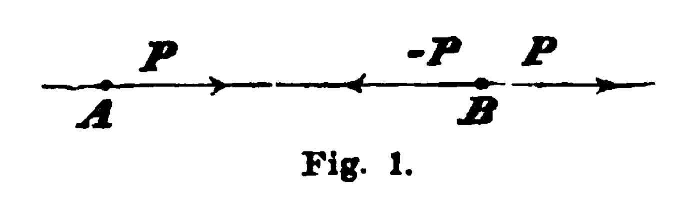


Fig. 1.

Denn ist A der Angriffspunkt der Kraft P, so kann jeder Punkt B ihrer Richtungslinie als Angriffspunkt zweier entgegengesetzt gleicher Kräfte P und $-P$ derselben Richtung angesehen werden, deren Zufügung die Wirkung von P an A nicht ändert, indem sie dem Punkte B gleiche und entgegengesetzte Beschleunigungen ertheilen. Es ist mithin P an A äquivalent dem System der drei Kräfte, d. h. äquivalent der Kraft P an B und den beiden entgegengesetzt gleichen Kräften P und $-P$, welche an A und B angreifen. Es ist daher P an A äquivalent P an B, sobald diese beiden Kräfte zusammen äquivalent Null sind.

Indem wir diese Voraussetzung zulassen, erlangen wir die Berechtigung der Anwendung der Streckentheorie auf die Kräfte. Denn die zweite Voraussetzung, auf welcher diese Theorie beruhte, nämlich dass Strecken, deren Richtungslinien sich in einem Punkte schneiden, ihrer Resultanten, d. h. ihrer durch den Schnittpunkt gehenden geometrischen Summe äquivalent sind, ist für Kräfte erfüllt, sobald sie an ihren Schnittpunkt verlegbar sind (Cap. II, §. 1).

An einen Punkt ausserhalb ihrer Richtungslinie ist eine Kraft gleichfalls verlegbar, jedoch unter Zufügung eines Kräftepaares. Denn liegt B (Fig. 2) nicht auf der Richtungslinie der an A angreifenden Kraft P, so ist P an A äquivalent P an B in Verbindung mit dem Paare $(P, -P)$, dessen Seitenkräfte durch A und B gehen. Das Moment dieses Paares wird Null, sobald die Richtungslinie von P durch B geht.

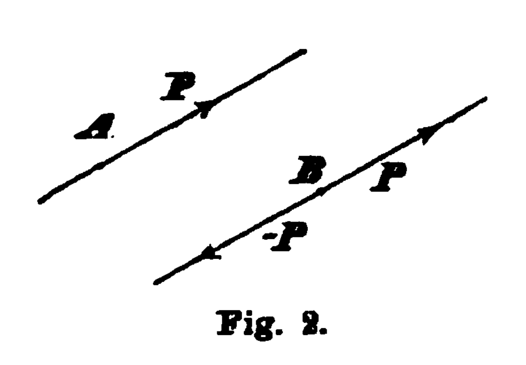


Fig. 2.

§. 2. Die Aequivalenz der Kräfte, deren Richtungen sich in einem Punkte des Systems schneiden, die der Parallelkräfte, sowie die der Kräftepaare einschliesslich der Bedingungen ihres Gleichgewichts sind durch den Inhalt der Capp. I und II des ersten Theiles in B. 1 erledigt. Ebenso enthält Cap. III dortselbst alles, was die Aequivalenz und das Gleichgewicht ebener Kräftesysteme betrifft; desgleichen gilt die Cap. IV entwickelte Theorie unmittelbar für die Aequivalenz und das Gleichgewicht räumlicher Kräftesysteme. Das V. Cap. endlich zeigt, dass mit jedem Kräftesystem ein bestimmter Liniencomplex verbunden ist, dessen Stralen die doppelt conjugirten Geraden eines Nullsystems sind.

Das Kräftesystem ist auf unendlich viele Arten zwei sich kreuzenden Kräften äquivalent, deren Richtungen conjugirte Gerade des Nullsystems sind. Die Pyramide, welche zu Gegenkanten die beiden Kräfte hat, ist für alle solche Aequivalenzen von constantem Volumen. Somoff nennt sie die Invariante des Kräftesystems. Das Kräftesystem ist auf unzählige Arten einer Resultanten und einem resultirenden Paare äquivalent. Die Richtungslinien der Resultanten aller dieser Aequivalenzen bilden einen Parallelstralenbündel; die Richtungen der Axenmomente der resultirenden Paare wechseln von Stral zu Stral dieses Bündels; für die Centralaxe des Complexes, welche dem Bündel angehört, wird das Axenmoment der Resultanten parallel und zugleich ein Minimum u. s. w. Alle Lehren des Cap. V im I. Bande gelten unmittelbar für Kräfte, sobald sie durch Strecken dargestellt sind. Wir fügen den dortigen Betrachtungen einige weitere hinzu, beziehen dieselben aber vorzugsweise auf Kräfte. Ihre kinematischen Analoga sind leicht aufzustellen.

§. 3. Es sei Σ ein System von Kräften $P_1, P_2, \ldots P_u, \ldots$ und Σ' ein anderes von Kräften $Q_1, Q_2, \ldots Q_v, \ldots$ Man reducire beide für denselben Punkt O, das erstere auf (R, G), das zweite auf (R', G') und stelle G in der zu ihm in O senkrechten Ebene durch das Kräftepaar $(F, -F)$ dar, dessen Seitenkraft F durch O gehe; ebenso G' durch das Paar $(F', -F')$ von gleicher Beschaffenheit, wobei F' und F in der Durchschnittslinie der beiden auf G und G' senkrechten Ebenen angenommen werden sollen. Dann ist die Summe aller Pyramiden, welche Q_1 mit den Kräften $P_1, P_2, \ldots P_u, \ldots$

als Gegenkanten bildet nach Bd. I, I. Th., Cap. V, §. 1, S. 58 gleich der Summe der Pyramiden, welche Q_1 mit R, mit F und mit $-F$ bildet. Ebenso ist die Summe der Pyramiden, welche Q_2 mit $P_1, P_2, \ldots . P_u, \ldots$ bildet, gleich der Pyramidensumme von Q_2 mit R, F und $-F$ u. s. w. Daher ist die Summe der Pyramiden, welche die Kräfte Q_v des Systems Σ' einzeln mit den Kräften des Systems Σ bilden, gleich der Summe der Pyramiden, welche diese Kräfte Q_v mit $R, F, -F$ bilden. Die Pyramidensumme, welche die Kräfte Q_v mit R bilden ist aber gleich der Pyramidensumme, welche $R', F', -F'$ mit R bilden; ebenso ist die Pyramidensumme der Kräfte Q_v mit F gleich der von $R', F', -F'$ mit F gebildeten; desgleichen die von den Q_v mit $-F$ gebildete gleich der von $R', F', -F'$ mit $-F$ gebildeten. Hiermit erhält man für die Pyramidensumme aller P_u mit allen Q_v die neun Pyramiden, welche $R, F, -F$ und $R', F', -F'$ mit einander bilden, nämlich, wenn allgemein (U, V) eine Pyramide bedeutet, welche U und V zu Gegenkanten hat:

$$\begin{array}{lll} (R, R'), & (F, R'), & (-F, R') \\ (R, F'), & (F, F'), & (-F, F') \\ (R, -F'), & (F, -F'), & (-F, -F') \end{array}$$

Von diesen neun Pyramiden verschwinden (R, R'), (F, R'), (R, F') und (F, F'), weil ihre Gegenkanten sich in O schneiden und $(-F, F')$, $(F, -F')$, $(-F, -F')$, weil ihre Gegenkanten parallel laufen. Es bleiben daher blos $(R, -F')$ und $(-F, R')$, deren sechsfache Volumina $RG' \cos (RG')$ und $R'G \cos (R'G)$ sind. Man hat daher für die **Momentensumme beider Kräftesysteme Σ, Σ' in Bezug auf einander**, wie wir die hier gebildete Pyramidensumme $\Sigma\Sigma\, Pyr. (P_u, Q_v)$ nennen wollen:

$$6 \Sigma\Sigma Pyr. (P_u, Q_v) = RG' \cos (RG') + R'G \cos (R'G).$$

Diese Momentensumme verschwindet *a)* wenn $(R, G) \equiv 0$ oder $(R', G') \equiv 0$, d. h. wenn eines von beiden Kräftesystemen im Gleichgewichte ist, *b)* wenn $R = 0$ und $R' = 0$, d. h. wenn beide Systeme, jedes für sich, einem Paare äquivalent sind, *c)* wenn $G = 0$ und $G' = 0$, d. h. wenn beide Einzelkräften äquivalent sind, *d)* wenn $\cos (RG') = 0$ und $\cos (RG) = 0$, d. h. wenn ihre Reductionsresultanten auf ihren resultirenden Axenmomenten wechselweise senkrecht stehen, *e)* wenn die Pyramiden $\frac{1}{6} RG' \cos (RG')$ und $\frac{1}{6} R'G \cos (R'G)$, welche die Flächenräume der resultirenden Axenmomente G, G' zu Basen und die von den Endpunkten der Reductionsresultanten R, R' auf diese gefällten Perpendikel wechselweise zu Höhen haben, entgegengesetzt gleich sind. Die Systeme halten in diesem Falle einander Gleichgewicht.

Sind die Systeme äquivalent, so ist

$$6 \Sigma\Sigma Pyr. (P_u, Q_v) = 2 RG \cos (RG).$$

§. 4. Die vorstehende Gleichung ist unabhängig von der Natur der Kräfte und drückt eine allgemeine Relation zwischen irgend zwei Streckensystemen aus, mögen beide Kräftesysteme oder das eine ein Kräftesystem, das andere ein System von Winkelgeschwindigkeiten u. s. w. bedeuten. Bedeuten sie, wie hier, Kräftesysteme und das System der Kräfte Q ist für sich im Gleichgewicht, so stellt die Gleichung $6\Sigma\Sigma Pyr.(P_u, Q_v) = 0$ eine Relation zwischen den Momenten des Kräftesystems der P in Bezug auf Axen, welche die Richtungslinien der Kräfte Q sind, dar. Nennt man nämlich mit Cayley das Produkt aus dem kürzesten Abstande d zweier Geraden u, v und dem Sinus des von ihnen gebildeten Winkels ε, d. h. das Produkt zweier auf diesen Geraden liegenden Linieneinheiten in diesen kürzesten Abstand und diesen Sinus das Moment der beiden Geraden in Bezug aufeinander und bezeichnet dasselbe durch $M(u, v) = d \sin \varepsilon$, so wird $6\Sigma\Sigma Pyr.(P_u, Q_v) = \Sigma\Sigma P_u Q_v M(u, v) = 0$ und bedeutet darin $P_u M(u, v)$ das Moment der Kraft P_u in Bezug auf die Axe v im gewöhnlichen Sinne, nämlich den 6fachen Inhalt der aus P_u und einer auf v liegenden Linieneinheit gebildeten Pyramide und ist $\Sigma P_u M(u, v)$ das Moment des Systems der P in Bezug auf die Axe v. Wird dies kurz mit M_v bezeichnet, so erscheint unsere Relation zwischen den Momenten dieses Systems in Bezug auf die Axen $1, 2, 3 \ldots v, \ldots$ unter der linearen Form

$$Q_1 M_1 + Q_2 M_2 + \cdots + Q_v M_v + \cdots = 0,$$

in welcher die Coefficienten der Momente des Systems der P für die verschiedenen Axen die Kräfte Q sind, welche sich längs diesen Axen wirkend Gleichgewicht halten.

Umgekehrt folgt auch, dass, wenn die obige Gleichung

$$6\Sigma\Sigma Pyr.(P_u, Q_v) = RG' \cos(RG') + R'G \cos(R'G)$$

eine Relation zwischen den Momenten eines beliebigen Systems von Kräften P in Bezug auf ein System von Axen v darstellt, d. h. für alle solche Systeme unabhängig von der Lage gegen die Axen darstellen soll, die rechte Seite der Gleichung verschwinden müsse und folglich, da R, G und ihre Lage beliebig sein können, $R' = 0$ und $G' = 0$ sein müssen, d. h. dass es ein Kräftesystem Q geben müsse, welches sich längs den Axen v wirkend Gleichgewicht halte.

Auch kann man direkt zeigen, dass wenn zwischen den Momenten eines beliebigen Kräftesystems in Bezug auf verschiedene Axen eine Abhängigkeit bestehen soll, dieselbe nur linearer Natur sein kann. Denn es seien M_1, $M_2, M_3, \ldots M_n$ die Momente eines Kräftesystems Σ in Bezug auf n Axen, sowie für ein anderes System Σ' in Bezug auf dieselben Axen gleich $M_1 + N_1$, $M_2 + N_2, \ldots M_n + N_n$, dann werden für ein drittes System, welches aus Σ' und den im umgekehrten Sinne genommenen Kräften von Σ besteht, die Momente bezüglich derselben Axen $N_1, N_2, N_3, \ldots N_n$

sein. Besteht daher eine Gleichung einerseits zwischen $M_1, M_2, M_3, \ldots M_n$, andrerseits dieselbe Gleichung zwischen $M_1 + N_1$, $M_2 + N_2$, $M_3 + N_3, \ldots$ $M_n + N_n$, so muss sie auch für die Aenderungen $N_1, N_2, N_3, \ldots N_n$ der Grössen $M_1, M_2, M_3, \ldots M_n$ bestehen (da sie allgemein für alle Systeme gelten soll). Dies ist aber nur dann möglich, wenn die fragliche Gleichung die Form $q_1 M_1 + q_2 M_2 + q_3 M_3 + \cdots + q_n M_n$ hat, worin $q_1, q_2, \ldots$ constante, von der speciellen Wahl des Systems Σ unabhängige Coefficienten sind.

Denn gesetzt, es sei die fragliche Relation

$$F(M_1, M_2, M_3, \ldots . M_n) = 0, \tag{1}$$

so muss dieselbe auch für $M_1 + \varDelta M_1$, $M_2 + \varDelta M_2, \ldots . M_n + \varDelta M_n$ bestehen, d. h. es muss

$$F(M_1 + \varDelta M_1, M_2 + \varDelta M_2, \ldots . M_n + \varDelta M_n) = F(M_1, M_2, \ldots M_n) \\ + \frac{\partial F}{\partial M_1} \varDelta M_1 + \frac{\partial F}{\partial M_2} \varDelta M_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial M_n} \varDelta M_n + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial M_1^2} \varDelta M_1^2 + \cdots = 0$$

oder also

$$\frac{\partial F}{\varDelta M_1} \varDelta M_1 + \frac{\partial F}{\varDelta M_2} \varDelta M_2 + \frac{\partial F}{\partial M_3} \varDelta M_3 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial M_n} \varDelta M_n + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial M_1^2} \varDelta M_1 + \cdots = 0 \tag{2}$$

sein. Nach dem Obigen muss die Relation aber auch bestehen, wenn man $M_1, M_2, \ldots M_n$ durch ihre Aenderungen $N_1, N_2, \ldots$ d. h. $\varDelta M_1, \varDelta M_2, \ldots$ $\varDelta M_n$ ersetzt. Dies ist identisch damit, dass

$$F(M_1 + \varDelta M_1, M_2 + \varDelta M_2, \ldots M_n + \varDelta M_n) = 0$$

auch fortbestehen muss, wenn man $M_1 = M_2 = \cdots M_n = 0$ setzt, wodurch sie in der That in $F(\varDelta M_1, \varDelta M_2, \ldots \varDelta M_n) = 0$ übergeht. Dies ist nur möglich, wenn $F(M_1 + \varDelta M_1, \ldots .)$ die Grössen $M_1, M_2 \ldots$ nicht enthält. Daher müssen in (2) die Differentialquotienten

$$\frac{\partial F}{\partial M_1}, \frac{\partial F}{\partial M_2}, \ldots \frac{\partial F}{\partial M_n}, \ldots$$

constant sein und die Relation (2) selbst, da die höheren Differentialquotienten Null sind, wenn die der ersten Ordnung sich auf Constante reduciren, übergehen in

$$q_1 \varDelta M_1 + q_2 \varDelta M_2 + \cdots + q_n \varDelta M_n = 0,$$

aus welcher

$$q_1 M_1 + q_2 M_2 + \cdots + q_n M_n = 0$$

folgt, ohne Constante auf der rechten Seite, da sonst durch Ersetzen von $M_1, M_2, \ldots$ durch $\varDelta M_1, \varDelta M_2, \ldots$ die Relation nicht ungeändert bleiben könnte.

Um die Bedeutung der Coefficienten q zu erkennen, wähle man zu dem Kräftesystem Σ eine einzige Kraft. Dann sind $M_1, M_2, \ldots . M_n$

die 6fachen Pyramiden, welche diese Kraft mit Strecken gleich der Längeneinheit, auf den n-Axen liegend, bildet. Die Produkte qM stellen Pyramiden dar, welche die Strecken auf denselben Axen statt Längeneinheiten aufgetragen, mit jener Kraft bilden. Sie sind also auch die Momente von Kräften $q_1, q_2, \ldots q_n$ in Bezug auf eine Axe in der Richtung dieser Kraft. Da diese Axe beliebig ist, so ist die Summe der Momente der Kräfte $q_1, q_2, \ldots q_n$ für alle Axen des Raumes gleich Null und sind mithin die Kräfte $q_1, q_2, \ldots q_n$ im Gleichgewicht.

Wir sprechen den Inhalt der ganzen Betrachtung in dem Satze aus:

Besteht zwischen den Momenten eines beliebigen Kräftesystems in Bezug auf n Axen eine Relation, vermöge welcher eines dieser Momente mit Hülfe der übrigen dargestellt werden kann, so ist diese Relation linear von der Form:

$$q_1 M_1 + q_2 M_2 + q_3 M_3 + \cdots + q_n M_n = 0$$

und ein System von Kräften $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$, welche längs den n Axen wirken und den Coefficienten $q_1, q_2, \ldots q_n$ proportional sind, ist im Gleichgewicht. Ist es nicht möglich, dass Kräfte, längs der Axen wirkend, Gleichgewicht halten, so existirt auch zwischen den Momenten eines beliebigen Kräftesystems in Bezug auf diese Axen keine Relation, vermöge welcher man das Moment dieses Systems für eine der Axen aus den Momenten für die übrigen Axen bestimmen könnte.

§. 5. Wir wollen jetzt die Frage erörtern, unter welchen Bedingungen es möglich ist, dass Kräfte, längs n gegebenen Linien wirkend, ein im Gleichgewicht befindliches System bilden.

Die 6 Gleichgewichtsbedingungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$; $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, welche wir, indem wir die Intensitäten P und die Richtungswinkel α, β, γ der Kräfte einführen, in der Form darstellen können:

$$\Sigma P \cos\alpha = 0, \qquad \Sigma P \cos\beta = 0, \qquad \Sigma P \cos\gamma = 0,$$
$$\Sigma P \begin{vmatrix} y & z \\ \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0, \quad \Sigma P \begin{vmatrix} z & x \\ \cos\gamma & \cos\alpha \end{vmatrix} = 0, \quad \Sigma P \begin{vmatrix} x & y \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix} = 0,$$

sind hinsichtlich der Kräfte und der Coordinaten der Angriffspunkte linear und homogen. Sie bestehen daher blos zwischen den Verhältnissen der Kräfte und den Verhältnissen der Coordinaten und bleiben ungeändert, so lange diese Verhältnisse sich nicht ändern, wenn auch die absolute Grösse der Kräfte und Coordinaten variirt. Ist nun die Zahl der Kräfte gleich 6, so kann man aus diesen 6 Gleichungen die 5 Verhältnisse der Kraftintensitäten P eliminiren und drückt die übrigbleibende Gleichung eine Bedingung für die Richtungen der 6 Kräfte aus. Sind nur 5 Kräfte vorhanden,

so bleiben nach Elimination der 4 Verhältnisse derselben zwei Gleichungen und damit 2 Bedingungen für die Richtungslinien der 5 Kräfte übrig, bei 4 Kräften ergeben sich 3, bei 3 Kräften 4, bei 2 Kräften 5 Bedingungen, welchen die Richtungen derselben genügen müssen, wenn überhaupt Gleichgewicht zwischen diesen Kräften bestehen soll. Sind sie erfüllt, so kann man dann auch die Verhältnisse der Kraftintensitäten so bestimmen, dass Gleichgewicht eintritt.

Bei 7, 8, . . . Kräften bestehen keine solchen Bedingungen für die Richtungslinien; bei 7 Kräften hat man 6 Verhältnisse der Intensitäten und werden diese aus den 6 Gleichgewichtsbedingungen gefunden werden können, welches auch immer die Richtungslinien der Kräfte seien. Bei 8 Kräften kann man ausser den Richtungslinien noch das Intensitätsverhältniss zweier Kräfte willkührlich annehmen, bei mehr Kräften bleibt ein grössrer Spielraum für dergleichen Annahmen.

Die Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, damit es möglich sei, für n Richtungslinien Kräfte zu finden, welche sich Gleichgewicht halten, sind zugleich die Bedingungen dafür, dass für $n-1$ dieser Linien Kräfte gefunden werden können, welche einer Einzelkraft äquivalent sind.

§. 6. Es seien $g_1, g_2, g_3, \ldots g_6$ sechs Gerade, längs welchen sechs Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots P_6$ wirkend einander Gleichgewicht halten. Nach Elimination der 5 Verhältnisse der Kraftintensitäten bleibt eine einzige Bedingung für die Richtungslinien zu erfüllen. Man kann daher 5 von den Geraden g, z. B. g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 willkührlich annehmen und die sechste g_6 jener Bedingung entsprechend bestimmen. Die Lage einer Geraden im Raume wird aber durch vier Bedingungen bestimmt. Daher genügt die eine Bedingung nicht zur vollständigen Bestimmung von g_6 und darf man diese Gerade noch drei weiteren willkührlichen Bedingungen unterwerfen. Es gibt daher zu 5 gegebenen Geraden unendlich viele sechste Geraden, sodass es möglich ist, 6 Kräfte zu finden, welche sich längs derselben Gleichgewicht halten. Die Gesammtheit aller dieser Geraden ist eine dreifache Mannigfaltigkeit; sie bilden daher zusammen einen durch die 5 gegebenen Geraden bestimmten Liniencomplex. Dieser Complex ist vom ersten Grade, d. h. alle Geraden eines Punktes M, welche Richtungslinien der sechsten Kraft P_6 sein können, liegen in einer Ebene μ und alle in einer Ebene μ liegende solche Geraden gehen durch einen bestimmten Punkt derselben. Soll nämlich g_6 durch den Punkt M gehen, so ist dies äquivalent zwei Bedingungen, soll sie in einer Ebene ν liegen, so sind damit ebenfalls zwei Bedingungen gegeben, soll sie aber beides thun, so ist ausser den ersten beiden Bedingungen nur noch die zu erfüllen, dass ein Punkt der Geraden in der durch M gehenden Ebene ν liege, welches eine Bedingung festsetzt. Soll also g_6 in einer bestimmten Ebene ν des

Punktes M liegen, so sind drei Bedingungen zu erfüllen und ist g_6 also vollständig bestimmt, sodass es nicht unendlich viele sechste Geraden durch M geben kann, die in der Ebene ν liegen. Gesetzt es lägen nun alle durch M gehenden sechsten Geraden nicht in einer Ebene, so kann gezeigt werden, dass es dann in ν unendlich viele solcher Geraden geben müsste. Denn es seien g_6', g_6'', g_6''' drei solche Richtungen, welche nicht in einer Ebene liegen und P_1', P_2', P_3', P_4', P_5', P_6'; P_1'', P_2'', P_3'', P_4'', P_5'', P_6''; P_1''', P_2''', P_3''', P_4''', P_5''', P_6''' die drei Systeme von Kräften, welche längs $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6'$; $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6''$; $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6'''$ im Gleichgewicht sind, so wäre auch $P_1' + P_1'' + P_1'''$; $P_2' + P_2'' + P_2'''$; $P_3' + P_3'' + P_3'''$; $P_4' + P_4'' + P_4'''$; $P_5' + P_5'' + P_5'''$; und $[P_6'] + [P_6''] + [P_6''']$ längs g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 und der Richtung der Resultanten von P_6', P_6'', P_6''' im Gleichgewicht. Da es aber beim Gleichgewicht nur auf die Verhältnisse der Kräfte ankommt, so könnte man die Kräfte P_6', P_6'', P_6''' willkührlich annehmen. Hieraus folgt, dass ihre Resultante eine willkührliche Richtung im Raume, also auch jede Richtung in der Ebene ν würde haben können, dass also jede durch M in ν gehende Linie die Richtungslinie einer sechsten Kraft sein müsste, was nach dem obigen unmöglich ist. Daher liegen alle durch M gehenden sechsten Richtunnen in einer gewissen Ebene und eine beliebige Ebene ν des Punktes M enthält nur eine einzige solche, nämlich die Schnittlinie von μ mit der Ebene ν. Der Complex ist also vom 1. Gerade und μ ist die Polarebene von M. Soll umgekehrt g_6 in einer Ebene μ liegen und noch durch einen bestimmten Punkt M derselben hindurchgehen, so überzeugt man sich ähnlich, dass sämmtliche der Ebene ν angehörige sechsten Richtungen eine Curve 1. Classe berühren müssen, d. h. alle durch einen bestimmten Punkt gehen (den Pol von μ). Wir erhalten daher den Satz:

Sechs Gerade, welche die Richtungslinien von sechs im Gleichgewicht befindlichen Kräften sind, sind stets Stralen eines und desselben Liniencomplexes 1. Grades. Sind fünf von ihnen gegeben, so kann zur sechsten jeder Stral des durch sie bestimmten Complexes gewählt werden.

Sind fünf Gerade g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 zu bestimmen, längs welchen fünf Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 sich Gleichgewicht halten können, so bleiben nach Elimination der 4 Intensitätsverhältnisse der Kräfte zwei Bedingungen zu erfüllen. Man kann daher 4 von den Geraden g willkührlich annehmen, z. B. g_1, g_2, g_3, g_4 und die fünfte diesen beiden Bedingungen gemäss bestimmen. Da zur vollständigen Bestimmung von g_5 noch zwei Bedingungen fehlen, so kann man noch zwei solche willkührlich annehmen. Es gibt daher zu 4 gegebenen Geraden unendlich viele fünfte Geraden, sodass es möglich ist 5 Kräfte zu finden, welche sich längs denselben Gleich-

gewicht halten. Sie alle bilden eine doppelte Mannigfaltigkeit von Geraden im Raume oder eine Liniencongruenz. Denn alle Geraden, welche einer Bedingung zu genügen haben, bilden, weil zur vollständigen Bestimmung der Geraden drei Bedingungen fehlen, einen Complex, alle, welche einer andern Bedingung genügen sollen, einen zweiten Complex, alle Geraden also, welche beide Bedingungen zugleich erfüllen, sind die gemeinsamen Stralen zweier Complexe, d. h. sie bilden eine Congruenz. Die Congruenz ist im vorliegenden Falle von der ersten Ordnung, d. h. es gibt durch jeden Punkt M des Raumes nur eine Gerade und liegt in jeder Ebene μ nur eine solche, welche den Bedingungen der Aufgabe genügt. Denn es seien g_5', g_5'' zwei verschiedene fünfte Kraftrichtungen, welche durch M gehen und P_1', P_2', P_3', P_4', P_5'; P_1'', P_2'', P_3'', P_4'', P_5'' die zwei Systeme von Kräften, welche längs g_1, g_2, g_3, g_4, g_5' und g_1, g_2, g_3, g_4, g_5'' Gleichgewicht halten. Dann würden auch $P_1'+P_1''$, $P_2'+P_2''$, $P_3'+P_3''$, $P_4'+P_4''$ und $[P_5']+[P_5'']$ längs g_1, g_2, g_3, g_4 und der Richtung der Resultanten von P_5' und P_5'' im Gleichgewicht sein müssen. Da aber sowohl P_5', als P_5'' ihrer Intensität nach willkührlich angenommen werden können, so wäre auch die Richtung ihrer Resultanten in der Ebene $g_5'g_5''$ durch M willkührlich und wäre jede Linie dieser Ebene eine fünfte Kraftrichtung, was aber nicht möglich ist, da eine Congruenz nur eine bestimmte Anzahl Stralen eines Punktes zulässt. Mithin gibt es durch M nur eine einzige fünfte Richtung. Ebenso zeigt man, dass es in jeder Ebene nur eine einzige solche Richtung gibt. Die Congruenz ist also vom 1. Grade. Daher:

Fünf Gerade, welche die Richtungslinien von fünf im Gleichgewicht befindlichen Kräften sind, sind Stralen einer und derselben Liniencongruenz 1. Grades. Sind vier von ihnen gegeben, so kann jeder Stral der durch diese vier bestimmten Congruenz zur fünften Geraden gewählt werden.

Um vier Gerade g_1, g_2, g_3, g_4 zu bestimmen, längs welchen vier Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 sich Gleichgewicht halten können, sind nach Elimination der Kräfte drei Bedingungen zu erfüllen. Es bleibt daher zur Bestimmung der vierten Geraden blos eine Bedingung willkührlich annehmbar. Die vierten Geraden bilden daher eine Mannigfaltigkeit erster Ordnung, d. h. sie liegen alle auf einer geradlinigen Fläche als dem Inbegriff aller gemeinsamen Stralen dreier Complexe. Diese Fläche ist ein einfaches Hyperboloid, welches g_1, g_2, g_3 enhält. Nach Elimination der 3 Verhältnisse der Kräfte aus den Bedingungen des Gleichgewichts bleiben nämlich noch drei Bedingungen zu erfüllen und kann zur vollständigen Bestimmung der Geraden g_4 blos noch eine einzige weitere Bedingung willkürlich zugefügt werden. Eine solche ist z. B., dass g_4 eine gegebene Gerade γ schneiden solle. Wegen des Gleichgewichts der Kräfte P muss jede Gerade a, welche

g_1, g_2, g_3 schneidet, auch g_4 schneiden. Denn eine beliebige Strecke, welche man auf a annimmt, bildet mit P_1, P_2, P_3, P_4 vier Pyramiden, deren Summe verschwinden muss. Schneidet nun a die drei Geraden g_1, g_2, g_3, so sind die Pyramiden, welche mit P_1, P_2, P_3 gebildet werden, einzeln Null; es muss mithin auch die letzte Pyramide, welche jene Strecke mit P_4 bildet, Null sein. Damit dies eintrete, muss aber a die Richtungslinie g_4 von P_4 schneiden. Aus demselben Grunde muss überhaupt eine Gerade, welche $n - 1$ Richtungslinien von n im Gleichgewicht befindlichen Kräften schneidet, auch die Richtungslinie der n^{ten} Kraft schneiden. Alle Geraden a, welche g_1, g_2, g_3 schneiden, gehören dem Hyperboloid an, welches durch die Bewegung von a längs g_1, g_2, g_3 erzeugt wird. Da a in allen Lagen g_4 schneiden muss, so folgt, dass g_4 auf dem Hyperboloid liegen muss und mit g_1, g_2, g_3 zu derselben Schaar gehört.*) Daher:

Vier Gerade g_1, g_2, g_3, g_4, welche Richtungslinien von vier im Gleichgewicht befindlichen Kräften P_1, P_2, P_3, P_4 sind, gehören stets zu einer und derselben Schaar eines einfachen Hyperboloids. Sind drei von ihnen gegeben, so kann jede Erzeugungslinie, welche derselben Schaar, wie sie, angehört, zur vierten gewählt werden.

Um die Gerade g_4 so zu bestimmen, dass sie eine gegebene Gerade γ schneide, suchen wir die Durchschnittspunkte D_1, D_2 von γ mit dem Hyperboloid (g_1, g_2, g_3); durch jeden von ihnen geht eine der Schaar g_1, g_2, g_3 angehörige Erzeugungslinie g_4, welche der Forderung genügt. Die Aufgabe hat also 2, 1, 0 Lösungen, je nachdem D_1, D_2 von einander verschieden sind, zusammenfallen oder ideell werden. Um aber die Durchschnittspunkte von γ mit dem Hyperboloid zu suchen, construiren wir die beiden Transversalen i, k der vier Geraden g_1, g_2, g_3, γ; ihre Schnittpunkte mit γ sind D_1, D_2. Denn i, k liegen auf dem Hyperboloid und ihre Schnittpunkte mit γ also gleichfalls. Je nachdem i, k getrennt exi-

*) Ohne den Satz über die Pyramidensumme zu Hülfe zu nehmen, kann man folgendermassen zeigen, dass eine Gerade a, welche die $n-1$ ersten Richtungslinien $g_1, g_2 \ldots g_{n-1}, g_n$ von n im Gleichgewicht befindlichen Kräften $P_1, P_2, \ldots P_n$ schneidet, auch die n^{te} schneiden muss. Man reducire die Kräfte für den Schnittpunkt O der Geraden a mit g_{n-1}. Die Ebenen der hiebei auftretenden von $P_1, P_2, \ldots P_{n-2}$ herrührenden Paare gehen sämmtlich durch die Gerade a hindurch, d. h. die Axenmomente dieser Paare stehen auf a senkrecht. Daher ist auch das aus ihnen resultirende Axenmoment senkrecht zu a. Das Axenmoment des von P_n herrührenden Paares muss mit diesem wegen des Gleichgewichts aller Kräfte sich tilgen; es ist dieses gleichfalls senkrecht zu a. Daher geht die Ebene dieses letzten Paares durch a hindurch, d. h. a schneidet g_n. (Diesen Beweis gab Chelini (Sulla composizione geometrica de sistemi di rette ecc., Mem. dell' Accad. di Bologna, Ser. 2[da], T. X, p. 357).

stiren, oder zusammenfallen oder ideell werden, ist dies mit D_1, D_2 ebenso der Fall.

Als Specialfälle sind zu erwähnen: *a*) zwei Gerade g_1, g_2 liegen in einer Ebene. Jede durch den Schnittpunkt $(g_1 g_2)$ gehende, g_3 schneidende Gerade a muss auch g_4 schneiden; daher fallen alle vier Geraden in eine Ebene. Das Hyperboloid degenerirt in diese Ebene. *b*) Die drei Geraden g_1, g_2, g_3 gehen durch einen Punkt $(g_1 g_2 g_3)$. Jede Gerade a, welche sie schneidet, muss auch g_4 schneiden; daher geht g_4 ebenfalls durch $g_1 g_2 g_3$. Das Hyperboloid wird unbestimmt.

Sollen drei Gerade g_1, g_2, g_3 gefunden werden, so dass drei Kräfte P_1, P_2, P_3 sich längs ihnen wirkend Gleichgewicht halten können, so muss jede Gerade a, welche zwei von ihnen schneidet, auch die dritte schneiden, weil die Summe der Pyramiden, welche eine beliebige Strecke auf a mit den drei Kräften bildet, verschwinden muss. Hieraus folgt, dass alle drei in eine Ebene fallen müssen. Da die Pyramidensumme auch für jede durch den Durchschnittspunkt zweier hindurchgehende, nicht in diese Ebene fallende Axen verschwinden muss, so folgt weiter, dass sie alle drei sich in einem Punkte schneiden müssen.

Drei Gerade g_1, g_2, g_3, welche Richtungslinien dreier im Gleichgewicht befindlicher Kräfte P_1, P_2, P_3 sind, sind drei Stralen eines ebenen Stralenbüschels. Sind zwei Gerade gegeben, so kann jeder durch ihren Schnittpunkt gehende Stral zur dritten gewählt werden.

Sind zwei Gerade parallel, so ist jede mit ihnen parallele Gerade ihrer Ebene ein der Forderung genügender Stral.

Die Richtungslinien g_1, g_2 zweier im Gleichgewicht befindlicher Kräfte P_1, P_2 fallen in eine Gerade zusammen. Denn jede, die eine von ihnen schneidende Gerade muss auch die andere schneiden.

§. 7. Wir wollen jetzt die Verhältnisse der Kräfte P bestimmen, welche längs 2, 3, 4, 5, 6 Geraden wirkend im Gleichgewichte sind, die den im vorigen § entwickelten Bedingungen genügen, unter welchen dies Gleichgewicht überhaupt möglich ist. Wir schicken einige allgemeine Betrachtungen voraus über die Bestimmtheit solcher Aufgaben.

Aus der Homogenität der Gleichungen des Gleichgewichtes folgt, wie mehrfach erwähnt, dass das Gleichgewicht fortbesteht, wenn alle Kräfte in demselben Verhältniss sich ändern. Gesetzt, es gebe nun zwei Systeme von Kräften P_1, P_2, ... P_n und P_1', P_2', ... P_n', welche sich längs den n Geraden g_1, g_2, ... g_n Gleichgewicht halten. Dann bilden auch $\lambda P_1 + \lambda' P_1'$, $\lambda P_2 + \lambda' P_2'$, ... $\lambda P_n + \lambda' P_n'$ ein System von Kräften im Gleichgewicht längs g_1, g_2, ... g_n, welchen Werth man immer dem Verhältnisse $\lambda : \lambda'$ bei-

legen möge. Setzt man daher $\lambda P_n + \lambda' P'_n = 0$, d. h. $\lambda' = -\lambda P_n : P'_n$, so folgt, dass die Kräfte $\lambda P_1 + \lambda' P'_1$, $\lambda P_2 + \lambda' P'_2, \ldots \lambda P_{n-1} + \lambda' P'_{n-1}$ ein System von $n - 1$ Kräften bilden, welche sich längs $g_1, g_2, \ldots g_{n-1}$ Gleichgewicht halten. Also:

Gibt es zwei Systeme von Kräften $P_1, P_2, \ldots P_n$ und $P'_1, P'_2, \ldots P'_n$, von denen jedes längs der Geraden $g_1, g_2, \ldots g_n$ wirkend für sich im Gleichgewicht ist, so kann man für jede $n - 1$ dieser Geraden ebenfalls Kräfte finden, welche im Gleichgewicht sind; und umgekehrt:

Gibt es unter den n Geraden $g_1, g_2, \ldots g_n$ kein System von $n - 1$ Geraden, längs welchen Kräfte sich Gleichgewicht halten können, so gibt es keine zwei von einander verschiedene Kräftesysteme, welche sich längs $g_1, g_2, \ldots g_n$ im Gleichgewicht befinden können.

Wenn andrerseits $n - 1$ Gerade $g_1, g_2, \ldots g_{n-1}$ die Richtungslinien von $n - 1$ im Gleichgewicht befindlichen Kräften $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}$ sind und man fügt eine n^{te} Gerade g_n willkührlich hinzu, so dass es zwischen den n Geraden $g_1, g_2, \ldots g_{n-1}, g_n$ keine weitere Gruppe von $n - 1$ Geraden gibt, längs welchen Kräfte im Gleichgewicht sein können, so ist ausser $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}$, 0 kein zweites Kräftesystem möglich, welches längs $g_1, g_2, \ldots g_n$ im Gleichgewicht sein kann, d. h. g_n kann nicht Richtungslinie einer weiteren Kraft sein, welche mit den $n - 1$ andern Gleichgewicht hält. Ist daher n so beschaffen, dass es im Allgemeinen nicht möglich ist, Kräfte zu finden, welche sich längs $n - 1$ Geraden Gleichgewicht halten, soll es dagegen möglich sein, dass zwischen n Graden n Kräfte, welche alle von Null verschieden sind, sich Gleichgewicht halten, so darf unter diesen n Geraden keine Gruppe von $n - 1$ Geraden sich finden, längs welchen Gleichgewicht zwischen $n - 1$ Kräften bestehen kann.

Nehmen wir jetzt an, es gebe zwei verschiedene Systeme von Kräften, welche längs n Geraden im Gleichgewichte sind und es stimmen die Kräfte, welche längs r Geraden wirken in beiden überein, nicht aber weitere, so erhält man durch Subtraction, d. h. für $\lambda : \lambda' = -1$ ein Kräftesystem von $n - r$ Kräften längs $n - r$ Geraden ein Gleichgewicht. Ist daher zwischen $n - r$ Kräften längs $n - r$ Geraden Gleichgewicht nicht möglich, so gibt es längs den n Geraden keine zwei im Gleichgewicht befindliche Systeme, in welchen r Kräfte übereinstimmen.

§. 8. Zwei Kräfte, welche sich Gleichgewicht halten sollen, müssen entgegengesetzt gleich sein. Um drei Kräfte P_1, P_2, P_3 zu finden, welche längs drei in einer Ebene liegenden, sich in einem Punkte schneidenden Geraden g_1, g_2, g_3 Gleichgewicht halten, nehme man P_1 längs g_1 willkührlich

nach Sinn und Intensität an, construire zu ihr die ihr entgegengesetzt gleiche Kraft — P_1 und zerlege diese in Componenten nach den Richtungen von g_2 und g_3, so werden diese Componenten P_2 und P_3 sein. Sind die drei Geraden g_1, g_2, g_3 parallel, so findet man P_1, P_2, P_3 mit Hülfe des Satzes, dass für irgend einen Reductionspunkt O auf g_1 die Bedingungen bestehen $[P_1] + [P_2] + [P_3] = 0$ und $[P_2 p_2] + [P_3 p_3] = 0$, d. h. es muss eine der drei Kräfte den beiden andern entgegengesetzt und ihrer Summe gleich sein und müssen die Momente von P_2 und P_3 in Bezug auf O ebenfalls entgegengesetzt gleiche Werthe haben.

Wenn bei 4 Kräften P_1, P_2, P_3, P_4 die Bedingung (§. 7) für ihre Richtungslinien g_1, g_2, g_3, g_4 erfüllt ist, so findet man die Intensitätsverhältnisse so. Man ziehe durch irgend einen Punkt O vier Gerade parallel den vier Richtungslinien und nehme auf g_1 die Kraft P_1 willkührlich an; indem man die ihr entgegengesetzt gleiche Kraft — P_1 nach den Richtungen g_2, g_3, g_4 zerlegt, liefern die Componenten sofort P_2, P_3, P_4. Auch kann man folgendermassen verfahren. Da die Resultante von P_1 und P_2 der Resultanten von P_3 und P_4 entgegengesetzt gleich sein muss, erstere aber in die Ebene $(g_1 g_2)$, letztere in die Ebene $(g_3 g_4)$ fällt, so ist die Schnittlinie beider Ebenen des Punktes O ihre gemeinsame Richtungslinie. Nimmt man also in dieser Schnittlinie von O zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte beliebig an und zerlegt, die eine nach den Richtungen g_1, g_2, die andere nach den Richtungen g_3, g_4, so erhält man ebenso P_1, P_2, P_3, P_4.

Bei fünf Kräften P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, welche sich längs fünf Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 Gleichgewicht halten sollen, unterscheiden wir zwei Fälle; nämlich den Fall, dass vier von den Geraden g, z. B. g_1, g_2, g_3, g_4 von zwei reellen Transversalen a, a' geschnitten werden und den, bei welchem diese Transversalen imaginär sind. Diese Transversalen sind die Directricen der Liniencongruenz, deren Stralen die Geraden g_5 sind; jede Gerade, welche beide Directricen schneidet, ist ein Stral der Congruenz und also eine Gerade g_5.

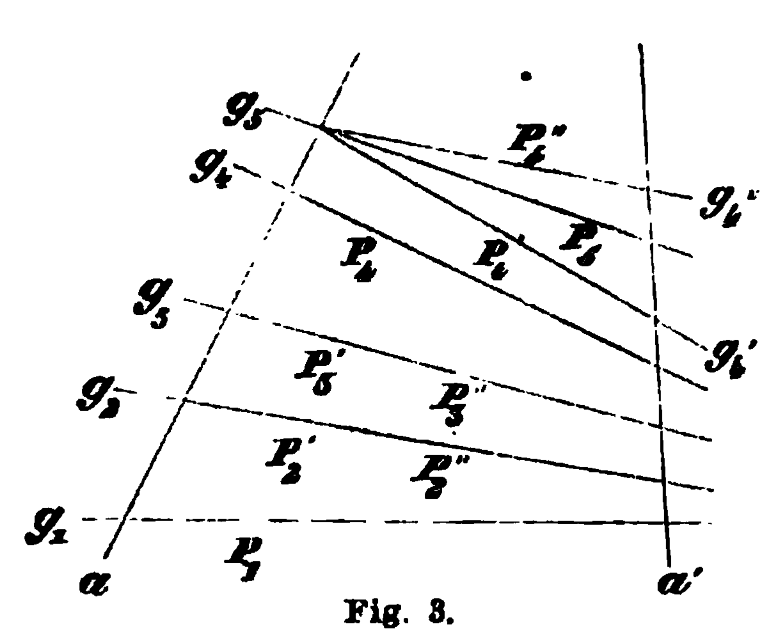


Fig. 3.

Sind a, a' reell, so ziehe man (Fig. 3), um die Kraftintensitäten zu bestimmen, durch den Schnittpunkt von a mit g_5 die Erzeugende g_4' des Hyperboloids $(g_1 g_2 g_3)$, sowie die Erzeugende g_4'' des Hyperboloids $(g_2 g_3 g_4)$, beide von der gleichen Schaar, wie g_1, g_2, g_3, resp. g_2, g_3, g_4. Beide Erzeugende g_4', g_4'' werden von der andern Transversale a' geschnitten, da diese beiden Hyperboloiden angehört. Nun bestimme man vier Kräfte P_1, P_2', P_3', P_4', welche sich längs g_1, g_2, g_3, g_4' Gleichgewicht halten, was möglich ist, da diese Geraden

Erzeugende derselben Schaar eines Hyperboloids sind. Hierauf suche man eine Kraft P_4'' auf g_4'' so zu bestimmen, dass die Resultante P_5 von ihr und P_4' in g_5 fällt. Dies ist möglich, weil die drei Linien g_4', g_4'', g_5 durch den Punkt (ag_5) gehen und in einer Ebene mit a' liegen. Weiter suche man zu P_4'' längs g_2, g_3, g_4 die Kräfte P_2'', P_3'', P_4, welche mit P_5 längs g_2, g_3, g_4, g_4'' im Gleichgewicht sind, was angeht, weil diese Geraden gleichfalls einem Hyperboloid angehören. Dann bilden P_1, P_2', P_3', P_4' und P_2'', P_3'', P_4, P_5 zwei Systeme von 4 Kräften im Gleichgewicht, von denen P_2', P_2''; P_3', P_3'' in dieselben Geraden fallen und mithin 2 Kräfte $P_2 = P_2' + P_2''$, $P_3 = P_3' + P_3''$ liefern. Daher ist auch das durch Vereinigung beider Systeme gebildete neue System P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 im Gleichgewicht längs g_1, g_2, g_3, g_4, g_5.

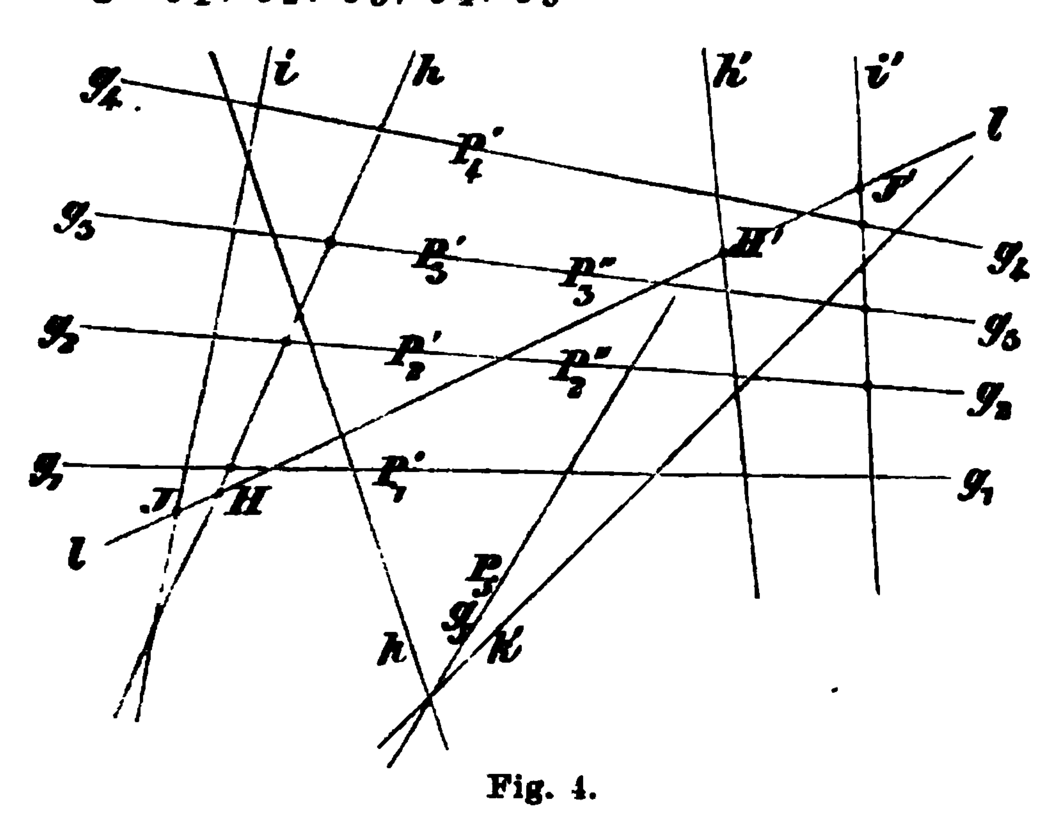


Fig. 4.

Sind die Transversalen a, a' imaginär, so ziehe man (Fig. 4) eine Gerade h, welche g_1, g_2, g_3 schneidet, d. h. eine Ergänzungslinie des Hyperboloids $(g_1 g_2 g_3)$, welche mit diesen Geraden nicht zu derselben Schaar gehört; ebenso eine Gerade h', welche g_2, g_3, g_4 schneidet, also dem Hyperboloid $(g_2 g_3 g_4)$ angehört; endlich ziehe man eine Gerade l, welche h und h' begegnet. Die Gerade l trifft das Hyperboloid $(g_1 g_2 g_3)$ in einem Punkte H auf h und einem weiteren Punkte J; sie trifft das Hyperboloid $(g_2 g_3 g_4)$ ebenso in einem Punkte H' auf h' und einem weiteren Punkte J'. Zieht man nun durch J die Erzeugungslinie i des Hyperboloids $(g_1 g_2 g_3)$ und durch J' die Erzeugungslinie i' des Hyperboloids $(g_2 g_3 g_4)$, so hat man zwei Geraden h, i gewonnen, welche g_1, g_2, g_3, l und zwei andere Geraden h', i', welche g_2, g_3, g_4, l schneiden. Wir ziehen nun noch zwei Gerade k, k' so, dass k die Geraden h, i und k' die Geraden h', i' schneidet und unterwerfen sie der Bedingung entweder, dass sie durch einen gegebenen Punkt M gehen oder in eine gegebene Ebene μ fallen. Da die Geraden g_1, g_2, g_3, l zwei reelle Transversalen h, i besitzen und k diese Transversalen schneidet, so können wir nach dem vorigen Falle 5 Kräfte P_1, P_2', P_3', P_l, P_k finden, welche im Gleichgewichte sind längs diesen Geraden. Ebenso können wir längs g_2, g_3, g_4, l, k' 5 Kräfte P_2'', P_3'', P_4, P_2', P_l' finden, welche gleichfalls im Gleichgewicht sind. Beide Systeme zusammen bilden ein neues, ebenfalls im Gleichgewicht befindliches Kräftesystem. Da es hiebei nur auf die Verhältnisse der Kräfte

ankommt, so können wir P_l und P'_l willkührlich wählen. Nehmen wir sie entgegengesetzt gleich, so erhalten wir, da P'_2 und P''_2, P'_3 und P''_3 zwei Kräfte P_2 und P_3 längs g_2 und g_3 zu Resultanten haben, als das neue System P_1, P_2, P_3, P_4, P_k, P'_k und hiebei gehen P_k, P'_k, weil sie in einer Ebene liegen, in eine Resultante P_5 zusammen, längs einer Geraden g_5, welche in die Ebene (kk') fällt. Das System P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 ist daher im Gleichgewicht längs g_1, g_2, g_3, g_4, g_5. Die 5 Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, l bestimmen einen linearen Complex und k ist ein Stral desselben, weil er die Directricen h, i einer Congruenz schneidet, welche von den vier Stralen g_1, g_2, g_3, l bestimmt wird. Demselben Complex gehört auch k' an, weil diese Gerade die Directricen h', i' der von den Stralen g_2, g_3, g_4, l bestimmten Congruenz schneidet. Die Gerade g_5 gehört diesem Complex an, weil sie durch den Schnittpunkt zweier Complexstralen geht und in die Ebene derselben fällt. Denkt man sich an die Stelle von h, h' zwei andere Erzeugungslinien der Hyperboloide $(g_1 g_2 g_3)$ und $(g_2 g_3 g_4)$, so erhält man eine andere Gerade l und zwei neue Gerade i, i', sowie zwei neue Stralen k, k', welche einem neuen Complexe angehören, bestimmt durch g_1, g_2, g_3, g_4 und die neue Gerade l. Mit Hülfe dieses Complexes kann man ebenso, wie mit Hülfe des vorigen die Gerade g_5 bestimmen. Daher ist g_5 gemeinsamer Stral zweier Complexe oder aber ein Stral der durch g_1, g_2, g_3, g_4 bestimmten Congruenz.

Für die Bestimmung von 6 Kräften P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, welche sich längs 6 Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6 Gleichgewicht halten sollen, kann man zwei Systeme von je fünf Kräften suchen, von denen jedes für sich im Gleichgewicht ist und die zusammen das System der 6 Kräfte bilden. Man bilde nämlich aus g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 zwei Gruppen g_1, g_2, g_3, g_4 und g_2, g_3, g_4, g_5 zu vier Geraden und bestimme nach dem Vorigen 5 Kräfte P_1, P'_2, P'_3, P'_4, P_l, welche sich längs g_1, g_2, g_3, g_4 und einem bestimmten Strale l der durch diese Geraden bestimmten Congruenz Gleichgewicht halten, wobei l der Bedingung genüge, durch einen gegebenen Punkt M zu gehen oder in einer gegebenen Ebene μ zu liegen. Ebenso bestimme man 5 Kräfte P''_2, P''_3, P''_4, P_5, $P_{l'}$, welche längs g_2, g_3, g_4, g_5 und einem Strale l' der durch sie bestimmten Congruenz sich Gleichgewicht halten, wobei l' derselben Nebenbedingung genüge, wie l, nämlich durch jenen bestimmten Punkt M zu gehen oder in der bestimmten Ebene μ zu liegen. Indem man beide im Gleichgewicht befindlichen Systeme zu einem neuen Systeme vereinigt, gehen P'_2 und P''_2, welche längs g_2 gerichtet sind, in eine Kraft $P_2 = P'_2 + P''_2$ zusammen und ebenso erhält man $P_3 = P'_3 + P''_3$ und $P_4 = P'_4 + P''_4$ längs g_3 und g_4. Die beiden Kräfte P_l und $P_{l'}$ liefern, da sie in einer Ebene liegen, eine durch ihren Schnittpunkt hindurchgehende Resultante P_6, welche in dieselbe Ebene

fällt. Man erhält hiedurch P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 als ein System im Gleichgewicht befindlicher Kräfte, welche längs g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 und einem Strale g_6 des durch diese Geraden bestimmten Complexes wirken, welcher zugleich die Nebenbedingung erfüllt, durch einen gegebenen Punkt M zu gehen oder in einer gegebenen Ebene zu liegen. Da man die Intensitäten von P_l und $P_{l'}$ willkührlich wählen kann, so kann g_6 bei unveränderter Lage von l, l' jede Lage in der Ebene $(l\,l')$ erreichen, während sie stets durch deren Schnittpunkt geht. — Haben die Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 zwei reelle Transversalen a, b und die Geraden g_2, g_3, g_4, g_5 ebenfalls zwei reelle Transversalen a', b', so schneidet l die Transversalen a, b und l' die a', b'. Sollen l, l' durch denselben Punkt M gehen, so sind sie die Schnittlinien der Ebenenpaare (M, a), (M, b) und (M, a'), (M, b'); sollen sie in einer Ebene μ liegen, so sind sie die Verbindungslinien der Punktpaare (μa), (μb) und $(\mu a')$, $(\mu b')$. Zu g_6 kann man jede Gerade der Ebene $(l\,l')$ wählen, welche durch deren Schnittpunkt geht. — Wenn jede der Combinationen der 5 Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 zu vieren zwei reelle Transversalen besitzt, so ergeben sich 5 Gerade l, l', l'', l''', l'''', welche alle in einer Ebene liegen. Dies ist der Sylvester'sche Satz. Vgl. B. I, S. 296.

Für 7 Kräfte P_1, P_2, P_3, ... P_7, welche sich Gleichgewicht halten sollen, können alle 7 Richtungslinien g_1, g_2, g_3, ... g_7 willkührlich gewählt werden. Um die Intensitätsverhältnisse der Kräfte zu finden, nehme man auf g_7 einen Punkt M beliebig an und construire seine Polarebene μ in dem Nullsystem, welchem der Complex $g_1 g_2 g_3 g_4 g_5$ angehört; ebenso construire man die Polarebene μ' von M in dem Nullsystem, welches den Complex $g_2 g_3 g_4 g_5 g_6$ enthält; endlich lege man durch g_7 eine beliebige Ebene α und bestimme die Schnittlinien a und a' von μ und μ' mit α. Sucht man nun 6 Kräfte P_1, P_2', P_3', P_4', P_5', P_a, welche längs g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, a im Gleichgewicht sind und ebenso 6 andere Kräfte P_2'', P_3'', P_4'', P_5'', P_6, $P_{a'}$ längs g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, a' im Gleichgewicht, so bilden beide Systeme ein neues im Gleichgewicht befindliches Kräftesystem, in welchem P_a und $P_{a'}$ so gewählt werden können, dass sie eine Resultante P_7 längs g_7 haben. Man erhält dann offenbar die 7 Kräfte P_1, $P_2 = P_2' + P_2''$, $P_3 = P_3' + P_3''$, $P_4 = P_4' + P_4''$, $P_5 = P_5' + P_5''$, P_6, P_7 längs g_1, g_2, ... g_7 im Gleichgewicht.

Für n Kräfte P_1, P_2, ... P_n, welche sich Gleichgewicht halten sollen, sind alle Richtungslinien g_1, g_2, ... g_n willkührlich wählbar. Bestimmt man 7 Kräfte P_1', P_2', P_3', P_4', P_5', P_6', P_7 längs g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, ferner 7 Kräfte P_1'', P_2'', P_3'', P_4'', P_5'', P_6'', P_8 längs g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_8 u. s. f., endlich 7 Kräfte $P_1^{(n-7)}$, $P_2^{(n-7)}$, $P_3^{(n-7)}$, $P_4^{(n-7)}$, $P_5^{(n-7)}$, $P_6^{(n-7)}$, P_{n-7} längs g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_{n-7} im Gleich-

gewicht, so bilden $P_1 = P_1' + P_1'' + P_1''' + \cdots + P_1^{(n-7)}$, $P_2 = P_2' + P_2'' + P_2''' + \cdots + P_2^{(n-7)}, \ldots P_6 = P_6' + P_6'' + P_6''' + \cdots + P_6^{(n-7)}$, P_7, $P_8, \ldots P_n$ ein Kräftesystem, welches längs $g_1, g_2, g_3 \ldots g_n$ im Gleichgewicht ist.

§. 9. Im Anschlusse an den §. 4 am Schlusse entwickelten Satz folgt aus dem vorigen §.:

1. Zwischen den Momenten eines Kräftesystems in Bezug auf zwei Axen findet nur dann eine Abhängigkeit statt, wenn diese Axen in dieselbe Richtungslinie fallen. Die beiden Momente sind gleich und von gleichem oder von entgegengesetztem Zeichen, je nachdem der Sinn der Axen derselbe oder entgegengesetzt ist.

2. Zwischen den Momenten eines Kräftesystems für drei Axen, von denen keine zwei zusammenfallen, findet nur dann Abhängigkeit statt, wenn die drei Axen in einer Ebene liegen und sich in einem Punkte schneiden, der aber auch im Unendlichen liegen kann, so dass die Axen parallel werden.

3. Zwischen den Momenten für vier Axen findet dann eine Abhängigkeit statt, so dass das Moment für die vierte Axe aus den Momenten für die drei ersten gefunden werden kann, wenn die vier Axen Erzeugungslinien derselben Schaar eines einfachen Hyperboloids sind, d. h. also, wenn jede Gerade, welche drei von ihnen schneidet, auch die vierte schneidet.

Vier in einem Punkte M sich schneidende Axen MA, MB, MC, MD, von denen drei nicht in einer Ebene liegen, genügen diesen Bedingungen (das Hyperboloid degenerirt in zwei Ebenen) und liefert ein Parallelepiped über MA, MB, MC durch seine Diagonale die Kraft MD als Resultante der Kräfte MA, MB, MC; halten sich also MA, MB, MC, $-MD$ Gleichgewicht. Bezeichnet daher M_{AB} das Moment eines Kräftesystems in Bezug auf AB als Axe, so folgt

$$MA \cdot M_{AB} + MB \cdot M_{MB} + MC \cdot M_{MC} - MD \cdot M_{MD} = 0$$

oder
$$MD \cdot M_{MD} = MA \cdot M_{MA} + MB \cdot M_{MB} + MC \cdot M_{MC}$$

Ist $ABCD$ ein Parallelogramm, so sind vier Kräfte gleich den Seiten, nämlich AB, BC, CD, DA im Gleichgewicht, mithin ist $(AB, AD) \equiv (BC, DC)$ und folglich

$$AB \cdot M_{AB} + AD \cdot M_{AD} = BC \cdot M_{BC} + DC \cdot M_{DC}.$$

Ist insbesondere D der Pol oder Nullpunkt der Ebene des Parallelogramms, so ist $M_{AD} = M_{DC} = 0$, also $M_{AB} = M_{BC} = BC : AB$ und da das Verhältniss $BC : AB$ gleich dem Verhältniss der Perpendikel ist, welche von D auf die Axen AB und BC gefällt werden können, so folgt der Satz:

Die Momente eines Kräftesystems in Bezug auf die Axen einer Ebene sind den Abständen der Axen von dem Pole der Ebene proportional. Die Momente für die Axen der Ebene, welche gleichen Abstand vom Pole haben, sind einander gleich.

Hiemit kann man den Pol der Ebene finden, wenn die Momente für drei Axen derselben gegeben sind.

4. Zwischen den Momenten für fünf Axen besteht Abhängigkeit und kann das Moment für die fünfte Axe aus den Momenten für die vier übrigen gefunden werden, wenn die fünf Axen Stralen einer Congruenz 1. Grades sind. Es kann also durch jeden Punkt des Raumes eine fünfte Axe gezogen werden, deren Moment aus den Momenten der vier ersten Axen folgt. Gibt es zwei reelle Transversalen für vier Axen, so kann das Moment für jede Axe gefunden werden, welche beide Transversalen schneidet.

5. Zwischen den Momenten für sechs Axen findet eine Abhängigkeit statt, vermöge welcher das Moment für die sechste Axe aus den Momenten für die fünf übrigen gefunden werden kann, wenn die sechs Axen Stralen eines und desselben Liniencomplexes ersten Grades sind. Es gibt daher für jeden Punkt des Raumes eine durch ihn hindurchgehende Ebene und in jeder Ebene des Raumes einen Punkt, so dass aus den Momenten für die 5 ersten Axen das Moment für jede durch den Punkt gehende und in die Ebene fallende Axe erhalten werden kann.

6. Sind die Momente für sechs Axen gegeben, zwischen denen keine weitere Abhängigkeit besteht, so kann aus ihnen das Moment für jede 7. Axe gefunden werden. Sind daher die Momente für 6 solche Axen gleich Null, so ist auch das Moment für jede 7. Axe Null und ist das Kräftesystem im Gleichgewicht. In B. I, S. 33 wurde gezeigt, dass, wenn das Moment eines ebenen Systems für drei nicht in gerader Linie liegende Punkte Null ist, das System äquivalent Null ist. Ebenso kann bei einem räumlichen System die Aequivalenz mit Null oder das Gleichgewicht geschlossen werden, sobald das Verschwinden des Momentes für 6 unabhängige Axen constatirt ist. Dies folgt auch aus dem B. I, S. 59 gegebenen Ausdrucke für das Moment eines Systems von Strecken (oder Kräften). Denn wenn dasselbe für 6 Axen, d. h. für 6 verschiedene Gruppen zusammengehöriger Werthe von x_1, y_1, z_1, α, β, γ, verschwindet, so folgen aus diesen 6 Bedingungen die Gleichungen $A = B = C = 0$, $L = M = N = 0$, welche das Gleichgewicht des Systems bedingen.

Wenn das Moment eines nicht im Gleichgewicht befindlichen Systems für 5 Axen Null ist, so ist es auch Null für jede 6. Axe, welche dem durch die 5 Axen bestimmten Complexe angehört, aber für keine andere.

Alle 6[ten] Axen eines Punktes, für welche also das Moment verschwindet, liegen in einer Ebene und alle Axen einer Ebene, für welche dasselbe der Fall ist, gehen in ihr durch einen Punkt.

§. 10. Die in den §§. 5. und 6. entwickelten Bedingungen für die Existenz von Kräften, welche längs gegebenen Geraden wirkend einander Gleichgewicht halten, sind zugleich die Bedingungen dafür, dass ein Kräftesystem einer Einzelresultante (ohne zugehöriges Paar) äquivalent sei. Denn halten sich n Kräfte P längs n Geraden wirkend Gleichgewicht, so ist jede von ihnen, im entgegengesetzten Sinne genommen, die Resultante der $n - 1$ übrigen. Sind daher diese Bedingungen für n Richtungslinien erfüllt, so kann auch umgekehrt eine Kraft, welche längs einer derselben wirkt, in $n - 1$ Kräfte zerlegt werden, welche längs den übrigen gerichtet sind. Wir wollen dies für einige specielle Fälle näher ausführen.

1. Drei Kräfte können nur dann im Gleichgewicht sein, wenn ihre Richtungslinien in eine Ebene fallen und sich in einem Punkte schneiden, der übrigens auch im Unendlichen liegen kann. Daher kann jede Kraft in 2 andere zerlegt werden, deren Richtungen sich auf ihrer Richtung schneiden oder ihr parallel sind (mit Hülfe des Parallelogramms der Kräfte und des Satzes über die Momente).

2. Bei vier Kräften kann nur dann Gleichgewicht stattfinden, wenn die vier Richtungslinien einem Hyperboloid als Erzeugungslinien derselben Schaar angehören. Daher kann eine Kraft nur dann nach drei gegebenen Richtungen zerlegt werden, wenn diese drei Richtungen mit ihrer eigenen Richtung einem Hyperboloid als solche Erzeugungslinien angehören. Da diese Bedingung z. B. für 4 in einer Ebene liegende Geraden erfüllt ist, so folgt, dass jede Kraft P nach den Seiten eines Dreiecks ABC zerlegt werden kann, dessen Ebene durch ihre Richtungslinie hindurchgeht. Denn man verlege P an den Durchschnitt D ihrer Richtung mit BC und zerlege sie dort in zwei Kräfte Q längs BC und T längs DA. Die Kraft T zerlege man weiter in A nach den Richtungen AB und AC in die Componente R und S, so ist $P \equiv (Q, R, S)$.

Drei Kräfte, längs den Seiten eines Dreiecks wirkend, können nicht im Gleichgewicht sein, da die Resultante von zweien der dritten nicht entgegengesetzt gleich werden kann. Ist ihre geometrische Summe nicht Null, so sind sie äquivalent einer einzigen Kraft, die man findet, indem man die Resultante zweier mit der dritten zusammensetzt. Im andern Falle sind sie äquivalent einem Paare, dessen Moment der doppelte Inhalt des Dreiecks ist, wie sich durch Reduction der Kräfte für irgend eine Ecke des Dreiecks ergibt.

Man kann die drei Strecken Q, R, S in den Seiten des Dreiecks ABC als Coordinaten der Richtungslinie von P ansehen, indem sie diese bestim-

men. Dabei wird man dem Umfang des Dreiecks einen bestimmten Sinn als den positiven beilegen und jede der Coordinaten als positiv oder als negativ betrachten, je nachdem ihr Sinn mit dem Sinne der betreffenden Seite harmonirt oder nicht harmonirt. Sind q, r, s die von einem Punkte M der Richtungslinie von P auf Q, R, S gefällten Perpendikel, so ist $qQ + rR + sS = 0$ als die Summe der Momente der Kräfte Q, R, S, oder also als Moment von P. Diese Gleichung ist daher die Gleichung der Richtung von P.

3. Für 7 Kräfte, welche längs 7 gegebenen Geraden wirken sollen, ist das Gleichgewicht möglich, mithin kann jede Kraft nach 6 gegebenen Richtungen zerlegt werden. Unter allen in diesem Sinne möglichen Zerlegungen einer Kraft P ist die einfachste die nach den 6 Kanten eines gegebenen Tetraëders $ABCD$. Bestimmt man den Schnittpunkt E von P mit der Seitenfläche ABC, so kann man P in zwei Kräfte zerlegen, von denen die eine, S, in die Ebene ABC fällt, während die andere, T, längs ED gerichtet ist. Die Kraft S zerfällt nach 2. in drei Componenten Q_1, R_1, S_1 längs den Kanten BC, CA, AB, die Kraft T in drei andere Q_2, R_2, S_2 längs den Kanten DA, DB, DC und sind folglich die 6 Kräfte Q_1, Q_2; R_1, R_2; S_1, S_2 der Kraft P äquivalent.

Die 6 Grössen $\frac{Q_1}{P}$, $\frac{R_1}{P}$, $\frac{S_1}{P}$, $\frac{Q_2}{P}$, $\frac{R_2}{P}$, $\frac{S_2}{P}$ können als Coordinaten der Richtungslinie von P gebraucht werden. Sie dienten Cayley (Cambridge Philosoph. Transactions Vol. IX) und Zeuthen (Mathem. Annalen, B. I) zu ihren Untersuchungen über Complexe.

§. 11. Im Anschlusse an das, was wir B. I, S. 59—72 und S. 297 u. 298 mitgetheilt haben, fügen wir noch einiges weitere über Complexe und Congruenzen 1. Grades hinzu, was insbesondere die analytische Behandlung derselben betrifft.

In §. 3. fanden wir für die Momentensumme zweier Streckensysteme P_1, P_2, ... und Q_1, Q_2 ... in Bezug auf einander

$$6\Sigma\Sigma\, Pyr.\,(P_u, Q_v) = RG' \cos(RG') + R'G \cos(R'G). \tag{1}$$

Nun ist in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Ursprung O der gemeinsame Reductionspunkt der Strecken beider Systeme ist, wenn

$$[R] = [X] + [Y] + [Z], \quad [G] = [L] + [M] + [N],$$
$$[R'] = [X'] + [Y'] + [Z'], \quad [G'] = [L'] + [M'] + [N'],$$

also mit X, Y, Z, ... abkürzend die Summen ΣX, ΣY, ΣZ, ... bezeichnet werden, wofür wir früher die Bezeichnung A, B, C gebrauchten:

$$\cos(RG') = \frac{XL' + YM' + ZN'}{RG'}, \quad \cos(R'G) = \frac{X'L + Y'M + Z'N}{R'G}$$

und mithin

$$6\Sigma\Sigma\, Pyr.\,(P_u, Q_v) = LX' + MY' + NZ' + XL' + YM' + ZN'.$$

Reduciren wir das System (Q) auf eine Einzelstrecke R', deren Moment in Bezug auf das System (P) verschwindet, so geht die Gleichung über in

$$\Omega = LX' + MY' + NZ' + XL' + YM' + ZN' = 0. \tag{2}$$

Da das System (P) auf unzählige Arten durch zwei conjugirte Strecken r, ϱ ersetzt werden kann, so ist diese Bedingung aequivalent der, dass die Richtungslinie von R' die Richtungslinien zweier solcher conjugirter Strecken zugleich schneide, dass sie also eine doppelt conjugirte Gerade des durch das System (P) bestimmten Nullsystems sei.

Neben derselben besteht die Bedingung $L'X' + M'Y' + N'Z' = 0$ oder $G'_0 = 0$, weil das zweite System sich auf eine Einzelstrecke reducirt. Die Grössen X', Y', Z', L', M', N' können als Coordinaten der Strecke R' angesehen werden und, indem wir sie variabel denken, stellt die Gleichung die Gesammtheit der Richtungslinien aller Strecken R' dar, deren Moment in Bezug auf das Streckensystem (P) verschwindet, d. h. sie ist die Gleichung des durch das System (P) bestimmten Complexes 1. Grades. In dieser Gleichung spielen X, Y, Z, L, M, N die Rolle von Constanten, mit deren Hülfe nach den früheren Lehren auch die Centralaxe und der Parameter $G_0 : R$ des Complexes gefunden werden kann. Die Richtungslinie von R' erhält man, indem man auf die Ebene der Strecken R', G' im Ursprunge O die Normale errichtet, auf ihr die Strecke $G' : R'$ nach links von G' aus gesehen aufträgt und durch deren Endpunkt eine Parallele mit R' legt. Denn da R' und G' zu einander rechtwinklig sind, so folgt, dass durch die Uebertragung von R' an jenen Endpunkt entstehende Paar das Paar G' ist.

§. 12. Wir können die Gleichung (1) vereinfachen, indem wir die beiden Systeme durch ihre Reductionen (R, G_0) und (R', G'_0) auf ihren Centralaxen vertreten lassen. Es sei $CC' = z$ der kürzeste Abstand der Centralaxen R, R' und wählen wir den Fusspunkt C zum Reductionspunkt für R', G'_0. Indem wir R' in seinem und im entgegengesetzten Sinne an den Punkt C verlegen, entsteht das Paar $(R', -R')$, dessen Moment $R'z$ mit G'_0 zusammengeht in das Moment $G' = (G'^2_0 + R'^2 z^2)^{\frac{1}{2}}$. Hiemit wird $G' \cos(RG') = G'_0 \cos(RR') - R'z \sin(RR')$ und hiermit die Gleichung (1)

$$6\Sigma\Sigma\, Pyr.(P_u, Q_v) = (RG'_0 + R'G_0)\cos(RR') - RR'z\sin(RR')$$

oder

$$6\Sigma\Sigma\, Pyr.(P_u, Q_v) = \left[\frac{G_0}{R} + \frac{G'_0}{R'} - z\,\mathrm{tg}\,(RR')\right] RR'\cos(RR'). \tag{3}$$

Im Falle dass das System (Q) sich auf die Einzelkraft R' reducirt, wie in §. 11, ist $G'_0 = 0$ und ergibt sich, wenn R' ein Stral des Complexes (R, G_0) ist

$$\frac{G_0}{R} - z\,\mathrm{tg}\,(RR') = 0$$

als die einfachste Gleichung dieses Complexes. Sie spricht die B. I, S. 71 bewiesene Eigenschaft desselben aus.

§. 13. Die gemeinsamen Stralen zweier Complexe 1. Grades bilden eine **lineare Congruenz** (B. I, S. 297). Sie stellt eine doppelte Mannigfaltigkeit von Geraden dar. Sind

$$\Omega = LX' + MY' + NZ' + XL' + YM' + ZN' = 0$$
$$\Omega_1 = L_1X' + M_1Y' + N_1Z' + X_1L' + Y_1M' + Z_1N' = 0$$

die Gleichungen beider Complexe, so stellt das System derselben die Congruenz dar, nämlich alle Stralen (R', G'), deren Coordinaten X', Y', Z', L', M', N' beiden Gleichungen zugleich genügen. Die Congruenz ist der Durchschnitt der beiden Complexe (R, G) und (R_1, G_1). Wenn die Coordinaten eines Strales den Gleichungen $\Omega = 0$, $\Omega_1 = 0$ genügen, so genügen sie auch der Gleichung $\Omega + \lambda\Omega_1 = 0$,

welche gleichfalls einen Complex darstellt. Die Congruenz gehört also unendlich vielen Complexen zugleich an, welche man erhält, indem man die willkührliche Constante λ variiren lässt. Ein Complex ist durch 5 Stralen bestimmt, 4 bestimmen daher, wenn man den 5. Stral variiren lässt, das ganze Complexbüschel, welches durch die Congruenz hindurchgeht. Zwei conjugirte Gerade, welche mehreren Complexen angehören, die sich paarweise in der Congruenz schneiden, heissen die Directricen der Congruenz; ihr kürzester Abstand ist die Axe, und die Ebene senkrecht zur Axe in deren Mittelpunkt errichtet, die Centralebene derselben. Die Axe der Congruenz schneidet die Centralaxen aller Complexe rechtwinklig.

Die Aufgabe, die Centralaxen und die Parameter aller Complexe zu finden, welche eine gegebene Congruenz mit zwei Directricen Fr, $D\varrho$ gemein haben (Fig. 5), wurde bereits B. I, S. 297 gelöst, jedoch ohne bestimmt ausgeprägte Formeln zu liefern; wir kommen daher nochmals auf sie zurück. Es sei $FD = d$ der kürzeste Abstand und σ der Winkel beider Directricen; ein Complex, welcher aus einem Streckensystem entspringt, welches zwei Strecken r, ϱ auf den Directricen äquivalent ist, deren Verhältniss gegeben ist, hat eine bestimmte Centralaxe mit bestimmtem Parameter $G_0 : R$, wo $[R] = [r] + [\varrho]$ ist, und trifft die Centralaxe den kürzesten Abstand der Directricen in einem bestimmten Punkte C. Indem man das Verhältniss $r : \varrho$ variiren lässt, ergeben sich alle Complexe, um deren Bestimmung es sich hier handelt. Indem man die Reduction der Strecken für den Punkt F ausführt, erhält man

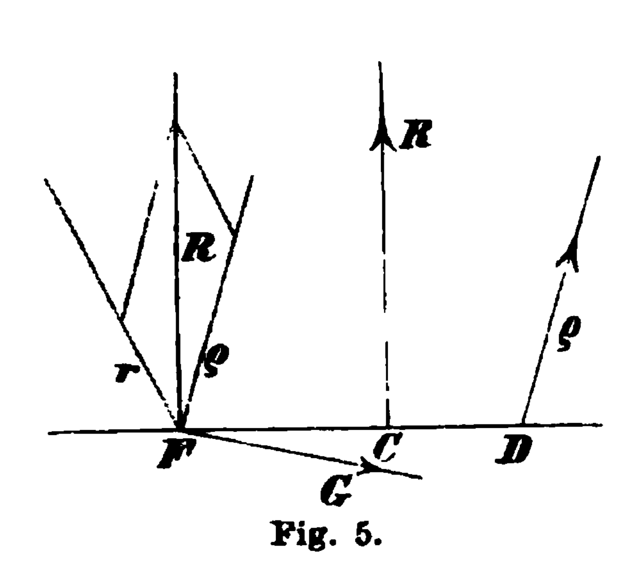


Fig. 5.

$$\frac{R}{\sin\sigma} = \frac{\varrho}{\sin Rr} = \frac{r}{\sin \varrho R}, \quad R^2 = \varrho^2 + r^2 + 2\varrho r \cos\sigma.$$

Das Axenmoment G des bei der Reduction entstehenden Paares ist $G = \varrho d$ und senkrecht zu ϱ. Daher ist seine Projection G_0 auf R, nämlich

$$G_0 = G\cos(RG) = G\cos(\tfrac{1}{2}\pi + R\varrho) = -G\sin R\varrho = -\varrho d \sin R\varrho$$

und hiemit wird wegen $\varrho : R = \sin Rr : \sin\sigma$ der Parameter des Complexes

$$\frac{G_0}{R} = -d\,.\frac{\sin Rr \sin R\varrho}{\sin\sigma} = -d\,.\frac{\sin(\sigma - R\varrho)\sin R\varrho}{\sin\sigma} = \tfrac{1}{2}d\,\frac{\cos(\sigma - 2R\varrho) - \cos\sigma}{\sin\sigma}.$$

Für die Lage C des Schnittpunktes der Centralaxe mit dem kürzesten Abstande d ist $R\,.\,FC = G\sin(RG) = G\cos R\varrho = \varrho d\cos R\varrho$, also

$$FC = d\,\frac{\sin Rr \cos R\varrho}{\sin\sigma}$$

und wenn für die Mitte M von d der Abstand $MC = FC - \frac{1}{2}d = z$ gesetzt wird

$$z = \tfrac{1}{2}d\,\frac{\sin(\sigma - 2Rr)}{\sin\sigma}.$$

Es gibt 4 Complexe, deren Centralaxe gleichen Abstand $\pm z$ von der Mitte M des kürzesten Abstandes d haben. Setzt man nämlich $\sigma - 2\overline{R}r = \pm u$, so ist für zwei derselben $Rr = \frac{1}{2}(\sigma \pm u)$, für die beiden andern $Rr = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(\sigma \pm u)$.

Will man die Formeln für $G_0 : R$ und z rein durch ϱ, r, σ, d darstellen, so hat man in

$$\frac{G_0}{R} = -d\,.\frac{\varrho}{R}\sin R\varrho, \quad FC = d\,.\frac{\varrho}{R}\cos\varrho R$$

zu substituiren

$$\sin R\varrho = \frac{r}{R}\sin\sigma,\quad R\cos R\varrho = \varrho + r\cos\sigma,$$

wodurch man erhält

$$\frac{G_0}{R} = -\tfrac{1}{2}d\cdot\frac{2r\varrho\sin\sigma}{r^2+\varrho^2+r\varrho\cos\sigma},\quad z = \tfrac{1}{2}d\cdot\frac{\varrho^2-r^2}{r^2+\varrho^2+2r\varrho\cos\sigma}.$$

Wir behandeln auch noch die weitere Aufgabe: Wenn zwei Complexe Ω, Ω_1 durch ihre Centralaxen und die Reductionen (R, G_0), (R', G'_0) gegeben sind, die Directricen Fr, $D\varrho$ der ihnen gemeinsamen Congruenz zu finden.

Da die Axe der Congruenz die Centralaxen der beiden Complexe rechtwinklig schneidet, so ist sie die Linie kürzesten Abstandes CC' dieser Centralaxen. Als gegebene Grössen sind daher anzusehen der kürzeste Abstand $CC' = 2\delta$ der Centralaxen, ihr Neigungswinkel $(RR') = \vartheta$ und die Parameter $G_0 : R = p$, $G'_0 : R' = p'$ der Complexe. Indem wir für den Punkt F (S. Fig. 5) reduciren, folgt, wie beim vorigen Problem: $G_0 = -G\sin R\varrho$, $R\,.\,FC = G\cos R\varrho$, mithin $R\,.\,FC = -G_0\operatorname{cotg} R\varrho$ und ebenso $R'\,.\,FC' = -G'_0\operatorname{cotg} R'\varrho$. Hiermit erhält man:

$$\operatorname{cotg} R\varrho = -\frac{FC}{p},\quad \operatorname{cotg} R'\varrho = -\frac{FC'}{p'}.$$

Indem wir die Mitte O von CC' zum Ursprung der Abstände auf CC' wählen, hat man $\delta = OC' = -OC$ und wenn $OF = -z$ gesetzt wird, $FC = z - \delta$, $FC' = z + \delta$, mithin

$$\operatorname{cotg} R\varrho = \frac{z-\delta}{p},\quad \operatorname{cotg} R'\varrho = \frac{z+\delta}{p'}$$

und da $R\varrho = R'\varrho + RR'$, so wird

$$\operatorname{cotg} R\varrho = \frac{1-\operatorname{cotg}\vartheta\operatorname{cotg} R\varrho}{\operatorname{cotg}\vartheta + \operatorname{cotg} R\varrho}.$$

Diese Gleichung liefert nach Einsetzung des Werthes für $\operatorname{cotg} R\varrho$ nach leichten Transformationen:

$$[2z\sin\vartheta - (p'-p)\cos\vartheta]^2 = [2\delta\sin\vartheta - (p+p')\cos\vartheta]^2 - 4pp'.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung für z sind reell, imaginär oder einander gleich, je nachdem $[2\delta\sin\vartheta - (p+p')\cos\vartheta]^2 - 4pp' \gtreqless 0$ ist. Für die Mitte M von FD wird

$$OM = \tfrac{1}{2}(OF + OD) = \tfrac{1}{2}(p'-p)\operatorname{cotg}\vartheta.$$

§. 14. Als Hauptsätze über die lineare Congruenz führen wir an:

1. Jede der beiden Directricen ist der Ort des Mittelpunktes eines Büschels von Stralen der Congruenz, dessen Ebene durch die andere Directrice hindurchgeht. Jede der Directricen ist die Axe eines Ebenenbüschels, von dessen Ebenen jede Congruenzstralen enthält, welche alle in dem Schnittpunkt derselben mit der anderen Directrice zusammenlaufen. Denn die Directricen sind conjugirte Gerade in jedem Complexe, welchem die Congruenz angehört; daher sind alle Geraden, welche beide Directricen schneiden, gemeinsame Stralen aller dieser Complexe, also Stralen der Congruenz.

2. Durch einen Punkt M ausserhalb der Directricen geht nur ein Stral der Congruenz; man kann denselben ansehen als die Schnittlinie der beiden Ebenen, welche in zwei Complexen, denen die Congruenz angehört, den Punkt M zum Pol

haben oder auch als die Schnittlinie zweier Ebenen, welche von M aus durch die Directricen gelegt werden können.

3. Jede Ebene enthält nur einen Congruenzstral; man kann denselben ansehen als die Verbindungslinie der beiden Pole, welche diese Ebene in zwei Complexen besitzt, denen die Congruenz angehört, oder auch als die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Ebene mit den beiden Directricen.

4. Alle Stralen der Congruenz, welche eine gegebene Gerade schneiden, liegen auf einem Hyperboloid. Denn sie schneiden zugleich beide Directricen der Congruenz.

5. Nach B. I, S. 74 liegen zwei Paar conjugirte Gerade eines Complexes auf einem Hyperboloid. Einer Geraden ist in jedem der Complexe $\Omega + \lambda \Omega_1 = 0$, welchen eine Congruenz angehört, eine bestimmte Gerade conjugirt und da die Directricen in allen Complexen sich conjugirt sind, so folgt, dass alle Geraden, welche einer gegebenen Geraden in den verschiedenen Complexen conjugirt sind, die eine bestimmte Congruenz gemein haben, mit ihr auf einem Hyperboloid liegen, welches auch die Directricen der Congruenz enthält, und die eine Schaar dieser Fläche bilden. Die andere Schaar wird von allen Stralen der Congruenz gebildet, welche die gegebene Gerade schneiden.

6. Dreht sich eine Gerade in einer Ebene um einen ihrer Punkte, so erfüllen alle Stralen, welche sie und die beiden Directricen schneiden, in jeder Lage ein veränderliches Hyperboloid, dessen Erzeugungslinien der Schaar, welche die Gerade schneidet, die Congruenz bilden. Denn jeder Stral der Congruenz trifft die Ebene in einem Punkte und durch diesen geht eine Lage der beweglichen Geraden.

Einige Literatur über Kräftesysteme.

Das Verdienst, die von §. 3 dieses Capitels an durchgeführten Untersuchungen zuerst entwickelt zu haben, gebührt Möbius (Lehrbuch der Statik [1838], B. I, Cap. VI und „Ueber die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen", Crelle Journ. T. XVIII, S. 189). Er wurde damit zugleich der eigentliche Begründer der von Plücker eingeführten Theorie der Complexe und Congruenzen.

Sylvester, Sur l'involution des lignes droites dans l'espace, considérées comme des axes de rotation. (Comptes rendus T. LII [1861], p. 741.) (Entwickelt die Bedingungen, unter welchen 6, 5, 4 Geraden die Richtungslinien von Kräften oder die Axen von Winkelgeschwindigkeiten sein können, welche sich im Gleichgewicht befinden.) Note sur l'involution de six lignes dans l'espace (Comptes r. T. LII, p. 815.)

Cayley, Note relative aux droites en involution de M. Sylvester, (Comptes r. T. LII, p. 1039.) — Theorème relatif à l'équilibre de quatre forces. (Comptes r. LXI [1865], p. 829. Führt zuerst den Begriff des Momentes zweier Geraden, nämlich des Produktes ihres kürzesten Abstandes und des Sinus des von ihnen gebildeten Winkels ein.)

An die Sylvester'schen und Cayley'schen Noten schliessen sich an:

Chasles, Observations. Comptes rend. T. LII, p. 745, zur Sylvester'schen Abhandlung C. r. T. LII, p. 741 gehörig und Observation (Comptes r. T. LII, p. 1042, zur Cayley'schen Abhandlung T. LII, p. 1039 gehörig). — Sur les six droites qui peuvent être les directions de six forces en équilibre. Propriétés de

l'hyperboloide à une nappe et d'une certaine surface du quatrième ordre. (Comptes r. T. LII, p. 1094—1104.)

Spottiswoode, Note sur l'équilibre des forces dans l'espace. (Comptes r. T. LXVI [1868], p. 97.)

Chelini, Sulla composizione geometrica de sistemi di rette, di aree e di punti. Memorie dell'Accad. di Bologna, Ser. 2da, T. X, p. 343 (1870) und Nuova geometria de' complessi. Mem. dell' Accad. di Bologna, Ser. 3za, T. I, p. 125 (1871).

Sturm, R., Sulle forze in equilibrio. Annali di matematica, diretti da Brioschi e Cremona, Ser. 2da, T. VII, p. 217 (1875—76).

Lindemann, Ueber unendlichkleine Bewegungen und über Kräftesysteme bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung. Mathem. Annalen, Bd. VII, S. 56 (1874).

Somoff, theoretische Mechanik II, Statik, Cap. IV.

IV. Capitel.

Aequivalenz und Gleichgewicht der Kräftesysteme am unveränderlichen Punktsysteme bei beschränkter Beweglichkeit und am veränderlichen Punktsysteme, welches in unveränderliche Systeme zerlegt werden kann.

§. 1. Das unveränderliche System, an welchem ein Kräftesystem angreift, kann Bedingungen unterworfen sein, welche seine Beweglichkeit beschränken. Sie bestehen darin, dass das System gezwungen wird, mit anderen unveränderlichen Systemen in gewisser bestimmter Verbindung zu bleiben. Diese Verbindung kann sehr mannigfach sein; sie kann z. B. darin bestehen, dass gewisse Punkte des Systems auf gewissen Flächen oder Curven, die den anderen Systemen angehören, bleiben, oder dass gewisse Flächen desselben durch Punkte jener Systeme hindurchgehen sollen, oder dass Flächen mit Flächen in Berührung zu bleiben genöthigt sind u. s. w. Dabei können die Systeme, mit welchen das gegebene verbunden sein soll, unbeweglich (fest) oder beweglich sein. Man kann das gegebene System und alle anderen Systeme, mit welchen es verbunden ist, als ein einziges veränderliches System ansehen, dessen Theile ihre Beweglichkeit gegenseitig so beschränken, dass eine Bewegung des einen auf die Bewegung der anderen Einfluss hat. Dabei können an allen einzelnen Systemen Kräfte angreifen, oder nur an einzelnen. Es kann somit das Studium der Wirkung eines Kräftesystems an einem unveränderlichen Punktsystem, welchem Bedingungen seiner Beweglichkeit auferlegt sind, als ein specieller Fall des allgemeinen Problems der Wirkung von Kräften auf ein aus unveränderlichen, mit einander nach bestimmten Normen verbundenen Systemen gebildetes veränderliches Gesammtsystem aufgefasst werden. Wir werden

diesen Weg betreten und zunächst allgemeine Sätze über das Gleichgewicht von Kräften an solchen Systemen aufstellen.

§. 2. Ein im Gleichgewicht befindliches Kräftesystem kann den Geschwindigkeitszustand des Kräftesystems, an welchem es angreift, nicht ändern, welches derselbe auch immer sei. Der Geschwindigkeitszustand kann daher verändert werden, ohne dass das Gleichgewicht der Kräfte zerstört wird, so lange dadurch an der Intensität, Richtung und Lage der Kräfte nichts geändert wird. Hieraus folgt insbesondere:

Findet Gleichgewicht zwischen den Kräften statt, welche an einem veränderlichen System angreifen, so besteht dasselbe fort, wenn das System in Ganzem oder in einzelnen Theilen unveränderlich wird (erstarrt). Denn dadurch wird blos die Beweglichkeit beschränkt und werden gewisse früher mögliche Geschwindigkeitszustände ausgeschlossen. Hieraus folgt weiter:

Die Bedingungen des Gleichgewichts von Kräften am unveränderlichen System gelten auch für das Gleichgewicht von Kräften am veränderlichen System als nothwendige (aber nicht hinreichende) Bedingungen.

Ebenso ergibt sich weiter:

Das Gleichgewicht von Kräften an einem beliebig veränderlichen System besteht fort, wenn Theile desselben unbeweglich werden. Denn auch hiedurch wird blos der Umfang der Beweglichkeit und der möglichen Geschwindigkeitszustände eingeschränkt. Man darf diesen Satz nicht umkehren. Denn das Gleichgewicht von Kräften an einem zum Theil unbeweglichen System kann der Art sein, dass es nur mit Hülfe von Hindernissen des Beschleunigungszustandes zu Stande kommt, welche aus der Unbeweglichkeit entspringen. Da aber Hinderungen von Beschleunigungen selbst durch Beschleunigungen dargestellt werden können, so sieht man, dass die Hindernisse, welche sie hervorrufen, durch Kräfte ersetzbar sind. Daher kann man den Satz aufstellen:

Sind Theile eines Systems, auf welches Kräfte einwirken, unbeweglich und findet zwischen den Kräften, welche an den beweglichen Theilen angreifen, Gleichgewicht statt, so ist es immer möglich, an den unbeweglichen Theilen solche Kräfte anzubringen, dass das Gleichgewicht am Gesammtsystem zwischen ihnen und den ursprünglichen Kräften fortbesteht, wenn die unbeweglichen Theile gleichfalls beweglich werden.

§. 3. Das veränderliche Gesammtsystem bestehe aus einem unveränderlichen Systeme Σ und einem Punkte A, welcher blos auf einer Fläche S von Σ beweglich sei. An A wirke eine Kraft P, an Σ ein Kräftesystem. Reducirt man die Kräfte an Σ für den Punkt A_0 der Fläche S, mit welchem

A zusammenfällt und lässt das Gesammtsystem unveränderlich werden, so folgt, dass das Kräftesystem an Σ einer durch A_0 gehenden Einzelresultante R äquivalent und dass diese der Kraft P entgegengesetzt gleich sein muss. Beide Kräfte müssen aber zugleich normal zu S sein. Denn zerlegt man P in zwei Componenten P_1, P_2, ebenso R in R_1, R_2 normal und tangentiel zu S, so halten sich P_1 und R_1 Gleichgewicht, da A in die Fläche S nicht eindringen kann, allein P_2 an A und R_2 an dem Flächenpunkte A_0 angreifend nicht, obgleich sie entgegengesetzt gleich sind, da der Punkt A in der Tangentenebene beweglich ist und über den Punkt A_0 hingleiten kann. Daher müssen die tangentiellen Componenten für sich verschwinden, d. h. P und R müssen normal zu S sein.

Zum Gleichgewicht eines Kräftesystems, welches an einem unveränderlichen System Σ und einer Einzelkraft, welche an einem Punkte A angreift, welcher auf einer Fläche S von Σ beweglich ist, ist nothwendig, dass das Kräftesystem einer Einzelresultante äquivalent und dass diese jener Einzelkraft entgegengesetzt gleich und zur Fläche S normal sei.

Wird Σ fest, so halten sich die Kräfte an Σ, welches sie auch immer seien, Gleichgewicht und bleibt für die Kraft P, welche an dem auf der festen Fläche S frei beweglichen Punkte A angreift, blos die Bedingung, dass sie normal zu S sei.

Wird der Punkt A fest, so fällt P hinweg und bleibt für das Kräftesystem, welches an dem System Σ angreift, von welchem eine Fläche S an dem festen Punkte A gleiten kann, als die Bedingung des Gleichgewichts, dass es äquivalent einer durch diesen Punkt gehenden Einzelresultante sei.

Sind A, B, ... Punkte, welche in der Fläche S des Systems Σ beweglich sind und auf welche Kräfte P, Q, ... wirken, während Σ von einem Kräftesystem weiter afficirt wird, welches mit P, Q, ... an dem Gesammtsystem im Gleichgewicht ist, so ist das Kräftesystem äquivalent dem System der Kräfte $-P$, $-Q$, ... d. h. es müssen sich dem Kräftesystem Kräfte substituiren lassen, welche den an A, B, ... angreifenden Kräften einzeln Gleichgewicht halten. Lässt man nun Σ und damit auch S fest werden während die Punkte A, B, ... in S beweglich bleiben, so folgt, dass P, Q, ... normal zu S in diesen Punkten sein müssen.

Werden A, B, ... unbeweglich, während Σ beweglich bleibt, so fallen P, Q, ... hinweg und folgt, dass die Bedingung des Gleichgewichts von Kräften an einem unveränderlichen System, welches mit einer Fläche S an festen Punkten A, B, ... hingleiten kann, die ist, dass das System dieser Kräfte durch Kräfte ersetzt werden könne, welche in den festen Punkten normal zur Fläche S sind.

Ist die Fläche S des Systems Σ an einem oder mehreren festen Punkten

verschiebbar und sind in der Fläche S Punkte beweglich, auf welche Kräfte wirken, während an Σ für sich ein Kräftesystem angreift, so ist zum Gleichgewicht aller Kräfte, der an den beweglichen Punkten und der an Σ angreifenden, nothwendig, dass alle zusammen durch Kräfte ersetzbar sind, welche in den festen Punkten normal zur Fläche S sind.

§. 4. Die Möglichkeit das Kräftesystem durch ein ihm äquivalentes zu ersetzen, dessen Kräfte die Richtung der Normalen an die Fläche S in den gegebenen Punkten $A, B, \ldots$ haben, hängt von der Zahl n dieser Punkte ab. Denn wenn A, B, C, L, M, N; A', B', C', L', M', N', die Reductionselemente des Systems der gesuchten n Kräfte und des gegebenen Kräftesystems sind, so müssen die 6 Gleichungen bestehen

$$\begin{aligned} A &= A', \quad & L &= L', \\ B &= B', \quad & M &= M', \\ C &= C', \quad & N &= N'. \end{aligned}$$

Für $n = 6$ folgen hieraus die Intensitäten der gesuchten Kräfte eindeutig; für $n > 6$, kann man $n - 6$ Kräfte willkührlich annehmen und die 6 übrigen bestimmen; für $n < 6$ aber kann man die Intensitäten der n Kräfte eliminiren und bleiben dann $6 - n$ Bedingungen übrig, denen die Richtungslinien dieser Kräfte genügen müssen. Für $n \geq 6$ ist es also immer möglich ein dem gegebenen äquivalentes System von n Kräften zu finden, welche normal zu S in $A, B, \ldots$ sind und zwar sind diese Kräfte für $n = 6$ völlig bestimmt, während sie für $n > 6$ zum Theil willkührlich bleiben; für $n < 6$ ist es nicht immer möglich, solche Kräfte zu finden. Für $n \geq 6$ herrscht also immer Gleichgewicht, welches auch das gegebene Kräftesystem sein möge. In der That ist das System, an welchem die Kräfte angreifen, unbeweglich, sobald die Fläche S durch 6 gegebene Punkte hindurchgehen soll, während für $n < 6$ Beweglichkeit verschiedener Grade stattfindet. Wir wollen gegenwärtig diesen Gegenstand nicht ausführlich besprechen, sondern ihn nur andeuten, weil wir bei Gelegenheit des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten ohnehin tiefer auf ihn eingehen müssen.

§. 5. Das Gesammtsystem bestehe aus zwei unveränderlichen Systemen Σ, Σ', welche sich mit zwei Flächen S, S' in einem Punkte berühren, so dass in diesem Punkte eine bestimmte Tangentenebene und Normale existirt. An jedem System Σ, Σ' wirken Kräfte, welche zusammen ein Kräftesystem bilden, welches an dem veränderlichen Gesammtsystem im Gleichgewicht ist. Die Berührung der Flächen kann man sich so denken, dass ein Punkt A vorhanden ist, welcher in beiden Flächen S, S' zugleich beweglich ist. Es steht nichts im Wege, diesen Punkt als eine verschwindende, zwischen beiden Flächen an der Berührungsstelle befindliche Kugel anzusehen. Indem man dieselbe unbeweglich macht, wird das Gleichgewicht nicht gestört und

folgt, dass die Kräfte an Σ sowohl, als auch die Kräfte an Σ' einer Einzelresultante R, R' äquivalent sein müssen, welche in die Richtung der gemeinsamen Normale der Flächen S, S' fallen. Diese Resultanten müssen ferner entgegengesetzt gleich sein, weil das Gleichgewicht fortbestehen muss, wenn Σ, Σ' zu einem Gesammtsystem erstarren. Diese beiden Bedingungen sind auch hinreichend zum Gleichgewicht. Denn sind sie erfüllt, so bringe man an der Zwischenkugel die beiden entgegengesetzten Kräfte $-R$ und $-R'$ an den Berührungspunkten mit S, S' an. Dieselben halten sich an der Kugel Gleichgewicht und stören daher die Wirkung der übrigen Kräfte nicht. Es sind aber R und $-R$ an S und R', $-R'$ an S', jedes Paar für sich im Gleichgewicht, mithin ist auch das ganze Kräftesystem im Gleichgewicht.

Von den beiden Kräften R, R' drückt die erstere die Wirkung des Kräftesystems an Σ auf das System Σ' oder den Druck auf Σ' aus; ebenso die zweite den Druck des Kräftesystems an Σ' auf Σ. Die Kraft $-R$, welche an Σ angreifend mit den Kräften an Σ Gleichgewicht hält, heisst auch der Widerstand von Σ' gegenüber der Einwirkung der Kräfte von Σ auf Σ'; ebenso ist $-R'$ der Widerstand von Σ gegenüber Σ'.

Im Falle des Gleichgewichts von Kräften, welche an zweien, mit zwei Flächen in einem Punkte berührend verbundenen Systemen wirken, ist es immer möglich, im Berührungspunkte längs der gemeinschaftlichen Normale zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, an jedem System eine, derart anzubringen, dass an jedem Systeme für sich zwischen den an ihm wirkenden Kräften und der zugefügten Kraft Gleichgewicht besteht.

Berühren sich die Flächen S, S' in mehreren Punkten, so kann man an jeder Berührungsstelle eine unendlichkleine Zwischenkugel einschalten, welche auf beiden Flächen beweglich ist. Indem man sich sämmtliche Zwischenkugeln unbeweglich denkt, erkennt man, dass das Kräftesystem, welches an Σ angreift, äquivalent sein muss einem Kräftesystem $P, Q, \ldots$ dessen Kräfte längs den gemeinsamen Normalen $\alpha, \beta, \ldots$ in den Berührungspunkten der Flächen S, S' wirken und dass ebenso das Kräftesystem an Σ' äquivalent sein muss einem anderen Kräftesystem $P', Q', \ldots$ dessen Kräfte gleichfalls in die Richtungen der Normalen $\alpha, \beta, \ldots$ fallen. Indem man hierauf die Systeme Σ, Σ' zu einem Gesammtsystem erstarren lässt, sieht man, dass $P + P'$, $Q + Q', \ldots$ ein an diesem im Gleichgewicht befindliches Kräftesystem bilden müssen.

Es kann sein, dass das System der Kräfte $P, Q, \ldots$ welches dem Kräftesystem an Σ äquivalent ist, eindeutig bestimmt ist; dann folgt aus dem Gleichgewicht von $P + P'$, $Q + Q', \ldots$ dass das System $-P', -Q', \ldots$ äquivalent $P, Q, \ldots$ und von diesem nicht verschieden sein kann (weil es

nur ein System $P, Q, \ldots$ gibt). Daher ist $P + P' = 0$, $Q + Q' = 0, \ldots$ d. h. es halten sich die Kräfte P, P'; Q, Q', ... längs den Normalen α, β, ... an jeder Berührungsstelle für sich Gleichgewicht. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass von den Kräften $P, Q, \ldots$ einige willkührlich angenommen werden können und erst dann die übrigen eindeutig bestimmt sind. In diesem Falle folgt ebenso, dass für jede einzelne willkührliche Annahme solcher Kräfte an allen Berührungsstellen $P + P' = 0$, $Q + Q' = 0, \ldots$ sein müsse.

Halten sich an zweien, mit zwei Flächen in mehreren Punkten berührend verbundenen Systemen Kräfte Gleichgewicht, so ist es immer möglich, längs den gemeinschaftlichen Normalen der Berührungspunkte entgegengesetzt gleiche Kräfte, die einen am einen, die anderen am anderen System, derart anzubringen, dass an jedem System für sich zwischen den an demselben angreifenden und den zugefügten Kräften Gleichgewicht besteht.

Berühren sich die Systeme mit 1, 2, 3, ... 6 Punkten, so sind diese zuzufügenden Kräfte oder Widerstände bestimmt; bei 7, 8, ... und mehr Berührungsstellen bleiben sie unbestimmt. Bei 1, 2, 3, 4, 5 Berührungsstellen findet Beweglichkeit der Systeme an einander statt, bei 6, 7, ... Berührungen aber bilden die Systeme im Allgemeinen ein unveränderliches Gesammtsystem und findet das Gleichgewicht als an einem solchen statt. Sind S, S' Ebenen, Kugeln oder Schraubenflächen, so kann auch bei mehr als 6 Berührungspunkten Beweglichkeit stattfinden, da solche Flächen in unendlich vielen Lagen in Coincidenz sich befinden können. Erhalten die Normalen α, β, ... der Berührungsstellen die Bedingungen des Cap. III, so dass längs ihnen Kräfte im Gleichgewicht sein können, so werden die Widerstände gleichfalls unbestimmt, denn man kann einem solchen System von Widerständen ein System von Kräften, welches sich längs den Normalen wirkend Gleichgewicht hält, hinzufügen und dadurch die einzelnen Widerstände ihrer Intensität nach modificiren. Auch die Richtung der Widerstände kann unbestimmt werden, wenn nämlich die gemeinschaftlichen Normalen α, β, ... es werden. Dies tritt ein, wenn die Flächen S, S' sich beide mit singulären Punkten oder Linien (Spitzen, Kanten etc.) berühren. Solche Fälle bedürfen einer besonderen Untersuchung. Man muss die besonderen Elemente als Fälle von Einschnürungen, Zusammenschrumpfungen etc. der Flächen S, S' ansehen und erst den allgemeinen Fall behandeln, um durch einen Grenzenübergang aus der Lösung desselben den speciellen abzuleiten.

Wird das System Σ' fest, während Σ mit der Fläche S dasselbe in verschiedenen Punkten der Fläche S' berührt, so ist das Kräftesystem an Σ' mit den Kräften P', Q', ... unter allen Umständen im Gleichgewicht

und kann dasselbe auch fehlen, indem die Festigkeit die Drucke des Systems Σ auf Σ' tilgt. Dann brauchen also blos die Gleichgewichtsbedingungen für das bewegliche System Σ erfüllt zu sein, nämlich:

Halten sich an einem beweglichen unveränderlichen System, welches ein anderes unbewegliches System an verschiedenen Stellen berührt, Kräfte Gleichgewicht, so können längs den Normalen der Berührungsstellen stets weitere Kräfte (Widerstände des unbeweglichen Systems) gefunden werden derart, dass sie mit den gegebenen Kräften Gleichgewicht, wie an einem freien System halten.

§. 6. Wir wollen einige hieher gehörige Fälle näher untersuchen.

1. Es sei das bewegliche System Σ mit dem unbeweglichen System blos in einem Punkte O und zwar so verbunden, dass dieser mit einem bestimmten Punkte desselben fortwährend vereinigt bleibt, d. h. das bewegliche System besitze einen festen Punkt, um welchen es rotiren kann. Die Reduction der Kräfte für O liefere eine Resultante R und ein Paar vom Axenmomente G. Der Widerstand N des festen Punktes, nach dessen Einführung das bewegliche System als ein freies behandelt werden kann, muss mit beiden Gleichgewicht halten, d. h. es ist $[R] + [N] = 0$, $[G] = 0$. Zum Gleichgewicht eines Kräftesystems, welches an einem unveränderlichen, um einen festen Punkt beweglichen System angreift, ist nothwendig und hinreichend, dass dasselbe einer durch den festen Punkt hindurchgehenden Einzelresultante äquivalent sei. Der Widerstand des festen Punktes ist dieser Resultanten geometrisch gleich und entgegengesetzt.

Sind in Bezug auf irgend ein rechtwinkliges Coordinatensystem A, B, C, N_x, N_y, N_z, L, M, N, a, b, c die Componentensummen der Kräfte parallel den Axen, die Componenten des Widerstandes, die Componenten des resultirenden Axenmomentes in Bezug auf den Coordinatenursprung und die Coordinaten des festen Punktes O, so sind die 6 Gleichgewichtsbedingungen:

$$A + N_x = 0, \quad B + N_y = 0, \quad C + N_z = 0,$$

$$L + \begin{vmatrix} b & c \\ N_y & N_z \end{vmatrix} = 0, \quad M + \begin{vmatrix} c & a \\ N_z & N_x \end{vmatrix} = 0, \quad N + \begin{vmatrix} a & b \\ N_x & N_y \end{vmatrix} = 0.$$

Es bleiben daher nach Elimination des Widerstandes als eigentliche Gleichgewichtsbedingungen:

$$L - \begin{vmatrix} b\,c \\ B\,C \end{vmatrix} = 0, \quad M - \begin{vmatrix} c\,a \\ C\,A \end{vmatrix} = 0, \quad N - \begin{vmatrix} a\,b \\ A\,B \end{vmatrix} = 0,$$

oder, wenn man den Ursprung in den festen Punkt verlegt: $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, d. h. $[G] = 0$.

2. Ist das System Σ der Bedingung unterworfen, dass ein Punkt O

desselben auf einer festen Curve ohne Reibung zu bleiben oder auch, dass eine Curve des Systems durch einen festen Punkt hindurchzugehen gezwungen ist, so ist zum Gleichgewicht des an Σ angreifenden Kräftesystems nothwendig und hinreichend, dass dasselbe einer Einzelresultante äquivalent sei, deren Richtung die Curve rechtwinklig schneidet. Sind x, y, z die Coordinaten von O, welche also den Gleichungen der gegebenen Curve genügen müssen, so sind die Bedingungen des Gleichgewichts unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen, wenn x', y', z' Differentiationen nach dem Bogen s der Curve bedeuten:

$$A + N_x = 0, \quad B + N_y = 0, \quad C + N_z = 0,$$

$$L + \begin{vmatrix} y & z \\ N_y & N_z \end{vmatrix} = 0, \quad M + \begin{vmatrix} z & x \\ N_z & N_x \end{vmatrix} = 0, \quad N + \begin{vmatrix} x & y \\ N_x & N_y \end{vmatrix} = 0,$$

$$Ax' + By' + Cz' = 0,$$

aus welchen nach Elimination des Widerstandes als eigentliche Gleichgewichtsbedingungen übrig bleiben:

$$L - \begin{vmatrix} y & z \\ B & C \end{vmatrix} = 0, \quad M - \begin{vmatrix} z & x \\ C & A \end{vmatrix} = 0, \quad N - \begin{vmatrix} x & y \\ A & B \end{vmatrix} = 0,$$

$$Ax' + By' + Cz' = 0.$$

Für O als Ursprung werden dieselben, wenn man die Tangente der Curve in O zur x-Axe wählt, d. h. $x' = 1$, $y' = z' = 0$ sezt:

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad A = 0.$$

Die vorliegende Frage ist einer Entwickelung fähig, wie die analoge einfachere in Cap. II, §. 3.

3. Ist der Punkt O auf einer Fläche beweglich, oder ist eine Fläche von Σ durch einen festen Punkt zu gehen genöthigt, so muss das Kräftesystem einer zur Fläche normalen Einzelresultanten äquivalent sein. Ist $U = 0$ die Gleichung der festen Fläche und sind x, y, z die Coordinaten von O in ihr, so sind die Gleichgewichtsbedingungen

$$A + N_x = 0, \quad B + N_y = 0, \quad C + N_z = 0$$

$$L + \begin{vmatrix} y & z \\ N_y & N_z \end{vmatrix} = 0, \quad M + \begin{vmatrix} z & x \\ N_z & N_x \end{vmatrix} = 0, \quad N + \begin{vmatrix} x & y \\ N_x & N_y \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{N_x}{U'_x} = \frac{N_y}{U'_y} = \frac{N_z}{U'_z}.$$

Für O als Ursprung und die Normale in O als z-Axe werden sie nach Elimination des Widerstandes

$$A = 0, \quad B = 0, \quad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

4. Sind zwei Punkte O, O' des Systems Σ und mithin auch die Gerade OO' fest, so halten die Widerstände derselben dem an Σ angreifenden Kräftesystem Gleichgewicht. Ihre Richtungen sind ein Paar conjugirter Geraden in dem durch das Kräftesystem bestimmten Complexe,

welche die Axe OO' schneiden. Sind N_x, N_y, N_z; N'_x, N'_y, N'_z die Componenten der Widerstände A, B, C, L, M, N die Reductionselemente des Kräftesystems für O als Ursprung und $OO' = h$ als z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so bestehen die Gleichgewichtsbedingungen:

$$A + N_x + N'_x = 0, \quad L + \begin{vmatrix} o & o \\ N_y & N_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} o & h \\ N'_y & N'_z \end{vmatrix} = 0,$$

$$B + N_y + N'_y = 0, \quad M + \begin{vmatrix} o & o \\ N_z & N_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h & o \\ N'_z & N'_x \end{vmatrix} = 0,$$

$$C + N_z + N'_z = 0, \quad N + \begin{vmatrix} o & o \\ N_x & N_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} o & o \\ N'_x & N'_y \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$A + N_x + N'_x = 0, \quad L - hN'_y = 0,$$
$$B + N_y + N'_y = 0, \quad M + hN'_x = 0,$$
$$C + N_z + N'_z = 0, \quad N = 0.$$

Die letzte dieser sechs Gleichungen ist die einzige von dem gegebenen Kräftesystem für sich zu erfüllende Bedingung, die fünf anderen liefern die Componenten der Widerstände, welche die festen Punkte leisten müssen und mithin auch der Pressungen, welche das Kräftesystem auf sie ausübt. Aus der 4. und 5. Gleichung erhält man N'_x, N'_y und hiemit aus der 1. und 2. N_x, N_y, während die 3. $N_z + N'_z$ gibt, wie natürlich ist, da die Kräfte N_z und N'_z längs derselben Geraden wirken. Man kann daher eine von ihnen willkührlich annehmen. Die von den Widerständen unabhängige Gleichung drückt aus, dass zum Gleichgewicht des um eine feste Axe beweglichen Systems blos erforderlich ist, dass das Moment des Kräftesystems in Bezug auf diese Axe Null sei.

5. Ist von den beiden Punkten O, O' in Nr. 4 blos O fest, dagegen O' auf einer festen Curve beweglich und sind α, β, γ die Neigungswinkel der Tangente dieser Curve in O' gegen die Coordinatenaxen, so muss der Widerstand von O' normal zur Curve sein, tritt zu den Gleichgewichtsbedingungen der vorigen Nr. noch die weitere

$$N'_x \cos\alpha + N'_y \cos\beta + N'_z \cos\gamma = 0$$

hinzu und hört jetzt die Unbestimmtheit von N_z und N'_z auf. Nur in dem Falle, dass die Curve die Axe OO' rechtwinklig schneidet, d. h. $\cos\gamma = 0$ ist, besteht diese Unbestimmtheit dennoch fort, indem die hinzutretende Bedingung N'_z dann nicht enthält. Um die Betrachtung zu vereinfachen, wollen wir, was wegen der willkührlichen Lage der x-Axe immer möglich ist, annehmen, dass die Tangente der Curve parallel der x-Axe, d. h. $\cos\alpha = 1$ und $\cos\beta = 0$ sei. Dann folgt noch $N'_x = 0$ und wird mithin $M = 0$ sein müssen. Das Gleichgewicht der Kräfte verlangt also in diesem Falle $M = 0$ und $N = 0$, d. h. das Verschwinden des Momentes der Kräfte für die Axe OO' und die zu der Ebene senkrechte Axe, welche OO' mit

der Tangente der Curve in O' bestimmt. Die Bedingung $N = 0$ schliesst die Drehung des Systems um OO', die Bedingung $M = 0$ eine unendlich kleine Verrückung des Punktes O' auf der Curve aus.

6. Sind beide Punkte O, O' auf gegebenen Curven beweglich und sind α, β, γ; α', β', γ' die Richtungswinkel der Tangenten dieser Curven in O, O' gegen die Coordinatenaxen, so treten zu den 6 Bedingungen von Nr. 4 die beiden neuen

$$N_x \cos\alpha + N_y \cos\beta + N_z \cos\gamma = 0,$$
$$N'_x \cos\alpha' + N'_y \cos\beta' + N'_z \cos\gamma' = 0$$

hinzu, wodurch die Unbestimmtheit von N_z und N'_z gehoben wird, zugleich aber ausser $N = 0$ noch eine neue von den Widerständen unabhängige Bedingung eingeführt wird, die man durch Elimination der Widerstandscomponenten findet. Ist z. B., um den einfachsten Fall zu erwähnen, die z-Axe die (doppelt gedachte) Linie, in welcher O, O' beweglich sind, so ist $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, $\cos\alpha' = \cos\beta' = 0$, also $N_z = 0$, $N'_z = 0$, also $C = 0$ die hinzutretende Bedingung, d. h. ein um eine Axe drehbares und zugleich parallel derselben verschiebbares System erfordert zum Gleichgewicht von Kräften, welche an ihm angreifen, dass das Moment derselben in Bezug auf diese Axe und ihre Projectionssumme auf sie zugleich verschwinde. Beide Bedingungen zusammen hindern jede Schraubenbewegung um die Axe.

7. Berührt das System Σ mit zwei Punkten O, O' eine feste Ebene und wählt man O zum Ursprung, OO' zur x-Axe und die feste Ebene zur xy-Ebene, so sind N_x, N_y, N'_x, N'_y Null und bleiben als Bedingungen des Gleichgewichts $A = 0$, $B = 0$, $C + N_z + N'_z = 0$, $L = 0$, $M - N'_y h = 0$, $N = 0$, d. h. als eigentliche von den Widerständen unabhängige Bedingungen $A = 0$, $B = 0$, $L = 0$, $N = 0$.

8. Besitzt das System Σ drei feste Punkte O, O', O'', so ist dasselbe unbeweglich und gibt es keine von den Widerständen unabhängige Bedingung des Gleichgewichts, vielmehr ist jedes Kräftesystem an Σ im Gleichgewicht. Wählt man O zum Ursprung, OO' zur x-Axe und die Ebene $OO'O''$ zur xy-Ebene, so erhält man, wenn a', o, o; a'', b'', o die Coordinaten von O' und O'' sind, die Gleichungen für die Componenten der Widerstände

$$A + N_x + N'_x + N''_x = 0, \quad B + N_y + N'_y + N''_y = 0,$$
$$C + N_z + N'_z + N''_z = 0$$

$$L + \begin{vmatrix} o & o \\ N_y & N_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} o & o \\ N'_y & N'_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b'' & o \\ N''_y & N''_z \end{vmatrix} = 0, \quad M + \begin{vmatrix} o & o \\ N_z & N_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} o & a' \\ N'_z & N'_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} o & a'' \\ N''_z & N''_x \end{vmatrix} = 0,$$

$$N + \begin{vmatrix} o & o \\ N_x & N_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & o \\ N'_x & N'_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'' & b'' \\ N''_x & N''_y \end{vmatrix} = 0$$

woraus sich nicht alle Widerstände bestimmen lassen.

Sind die drei Punkte auf der festen Ebene beweglich, so sind N_x, N_y, N'_x, N'_y, N''_x, N''_y Null und bleiben blos N_z, N'_z, N''_z zu bestimmen, wozu die Bedingungen

$$A = 0,\; B = 0,\;\; C + N_z + N'_z + N''_z = 0,\;\; L + b''N''_z = 0,$$
$$M - a'N'_z - a''N''_z = 0,\;\; N = 0$$

ausreichen.

Berührt aber das System mit n Punkten eine feste Ebene, so können für $n > 3$ die Widerstände nicht mehr aus den in diesem Falle geltenden Gleichungen

$$A = 0,\; B = 0,\; C + N_z + N'_z + \cdots + N_z^{(n)} = 0,$$
$$L + b''N''_z + b'''N'''_z + \cdots b^{(n)}N_z^{(n)} = 0,$$
$$M - a'N'_z - a''N''_z - \cdots - a^{(n)}N_z^{(n)} = 0,\; N = 0$$

bestimmt werden, da dieselben nur in dreien von ihnen vorkommen. Selbst bei drei Punkten tritt schon eine Unbestimmtheit ein, wenn sie in gerader Linie liegen. Vgl. hierüber Abel und Crelle in Crelle's Journal B. I, S. 117.

9. Andere hieher gehörige Fälle sind: drei Punkte des Systems Σ sind auf drei festen Flächen beweglich, oder zwei sind auf festen Curven, der dritte auf einer festen Fläche beweglich oder ein Punkt ist fest, die beiden anderen sind auf zwei Flächen beweglich u. s. w.

§. 7. Kann das System blos parallel einer Axe, z. B. parallel der x-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems eine Translationsbewegung annehmen, so ist die von den Widerständen unabhängige Bedingung des Gleichgewichts des an ihm angreifenden Kräftesystems $A = 0$. Ebenso sind $B = 0$, $C = 0$ die Bedingungen, entsprechend den möglichen Translationen parallel den Axen der y und z. Bestehen alle drei Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ zugleich, so ist jede Translation des Systems ausgeschlossen, da eine solche sich aus drei Translationen parallel den Axen zusammensetzen lässt. Bestehen nur zwei derselben, so sind blos Translationen parallel der Ebene beider unmöglich.

Kann das System blos eine Rotation um die z-Axe annehmen, so ist die von den Widerständen unabhängige Bedingung des Gleichgewichts $N = 0$. Ebenso stellen $L = 0$, $M = 0$ die entsprechenden Bedingungen bezüglich der anderen Axen dar. Das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ zeigt an, dass das System um keine durch den Ursprung gehende Axe rotiren kann. Da jede Rotation um eine Axe äquivalent ist einer Rotation um eine parallele Axe um dieselbe Amplitude in Verbindung mit einer gewissen Translation und Rotationen und Translationen sich gegenseitig nicht tilgen können, so folgt, dass das System alsdann auch um keine Axe des Raumes rotiren kann.

Aus dem Gesagten erhellt, welche Bedeutung jede der Gleichgewichtsbedingungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ des freien Systems einzeln und in Verbindung mit anderen von ihnen hat in Bezug auf das System, wenn es hinsichtlich seiner Beweglichkeit beschränkt ist.

§. 8. Dieselben Betrachtungen, welche in den letzten §§. für zwei sich gegenseitig hinsichtlich ihrer Beweglichkeit beschränkende Systeme durchgeführt wurden, lassen sich auch für mehrere solche durchführen. Es ist allein erforderlich, dass zwischen den auf einander influirenden Systemen die gegenseitigen Widerstände eingeführt werden, nach deren Einführung man das Gleichgewicht der Kräfte an jedem einzelnen System für sich, wie das an einem freien System untersuchen kann.

V. Capitel.

Statische Probleme über Kräftesysteme an unveränderlichen und veränderlichen Punktsystemen.

§. 1. Einige Aufgaben über die Gleichgewichtslage eines unterstützten schweren cylindrischen Stabes (ebenes Kräftesystem im Gleichgewicht).

1. Ein homogener schwerer Kreiscylinder (Fig. 6) von der Länge $2l$ und dem Radius des Querschnitts gleich r stützt sich mit zwei Punkten A, B seiner Basiskreise gegen eine horizontale und eine vertikale Wand, so zwar, dass die Verbindungslinie AB der Berührungspunkte in eine Vertikalebene senkrecht zur Durchschnittslinie der Wände fällt und mit dem Horizonte den Winkel ω bildet; man sucht eine am unteren Stützpunkte A angreifende horizontale Kraft X, welche das Ausgleiten des Cylinders hindert, sowie die Pressungen, welche die Wände in den Punkten A und B erleiden oder die Widerstände, welche sie in diesen Punkten zu leisten haben.

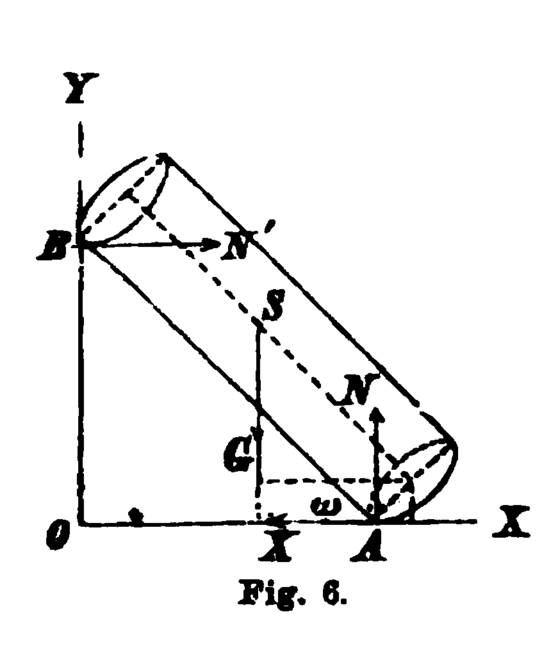


Fig. 6.

Das System ist zwei Bedingungen unterworfen, nämlich mit zwei Punkten zwei feste Ebenen zu berühren; die Normalwiderstände dieser Ebenen in A, B seien N, N'; da der Cylinder homogen ist, so liegt der Mittelpunkt sämmtlicher paralleler Schwerkräfte im Mittelpunkte S des Cylinders, in welchem wir ihre Resultante, das Gewicht G, statt ihrer angreifend denken. Es muss zwischen den vier Kräften G, N, N', X Gleichgewicht bestehen; reduciren wir also die Kräfte für irgend einen Punkt des Raumes, z. B. für A, so muss die Resultante und das resultirende Paar verschwinden. Diese Reduction gibt in horizontaler Richtung $X - N'$ und in vertikaler $G - N$ und da die Resultante dieser nur verschwinden kann, wenn sie einzeln verschwinden, so folgt $N = G$, $N' = X$, d. h. der Druck auf die horizontale Wand ist gleich dem Gewichte des Cylinders, der Druck auf

die vertikale gleich der gesuchten Kraft, welche das Gleichgewicht herbeiführt. Ferner ergeben sich zwei Kräftepaare $(N', -N')$ und $(G, -G)$ von parallelen Axen, aber entgegengesetztem Sinne mit den Momenten $X \cdot 2l \sin \omega$ und $-G \cdot (l \cos \omega - r \sin \omega)$, deren resultirendes Paar verschwinden muss. Man hat daher

$$2lX \sin \omega = G (l \cos \omega - r \sin \omega),$$

woraus folgt: $X = N' = \frac{1}{2} G \operatorname{cotg} \omega - \frac{1}{2} \frac{r}{l} G$. — Die gesuchte Kraft X wird Null, wenn die Dimensionen des Cylinders oder der Winkel ω so beschaffen sind, dass $\frac{r}{l} = \operatorname{cotg} \omega$; in diesem Falle geht nämlich G durch den Punkt A und liegt der Cylinder ohne Druck an der vertikalen Wand.

Um die Aufgabe rein analytisch zu lösen, wählen wir die Ebene der Kräfte zur xy-Ebene, ihren Schnittpunkt mit der Durchschnittslinie der Wände zum Ursprung; da alle z-Coordinaten der Angriffspunkte der Kräfte und alle Z-Componenten Null sind, so sind blos die Gleichungen $A = \Sigma X = 0$, $B = \Sigma Y = 0$, $N = \Sigma (xY - yX) = 0$ zu bilden, für die wir folgende kleine Tafel entwerfen:

Kräfte	X	Y	x	y	$xY - yX$
G	0	$-G$	$l \cos \omega + r \sin \omega$	$l \sin \omega + r \cos \omega$	$-G (l \cos \omega + r \sin \omega)$
X	$-X$	0	$2l \cos \omega$	0	0
N	0	N	$2l \cos \omega$	0	$2l \cos \omega . N$
N'	N'	0	0	$2l \sin \omega$	$-2l \sin \omega . N'$

Demnach sind die Gleichgewichtsbedingungen: $-X + N' = 0$, $-G + N = 0$, $-G (l \cos \omega + r \sin \omega) + 2lN \cos \omega - 2lN' \sin \omega = 0$, woraus sich dieselben Folgerungen ergeben, wie vorher.

2. Der Cylinder soll unter denselben Bedingungen wie in der vorigen Aufgabe nicht durch eine neu einzuführende Kraft X, sondern durch die Reibung an den Punkten A und B im Gleichgewicht erhalten werden (Fig. 7): man sucht die äusserste Lage desselben, d. h. den kleinsten Winkel ω, bei welchem das Gleichgewicht noch möglich ist. Zu den Kräften G, N, N' treten jetzt noch die Reibungskräfte bei A und B hinzu; dieselben wirken den Beschleunigungen des Ausgleitens der Berührungspunkte A und B entgegen und sind proportional den daselbst stattfindenden Pressungen N, N'. Bezeichnen μ, μ' die Reibungscoefficienten zwischen dem Material des Cylinders und der horizontalen und vertikalen Wand, so sind die Intensitäten der beiden Reibungskräfte μN und $\mu' N'$; die Reduction der Kräfte für den Punkt A ergibt daher ähnlich wie bei der vorigen Aufgabe die Gleichgewichtsbedingungen:

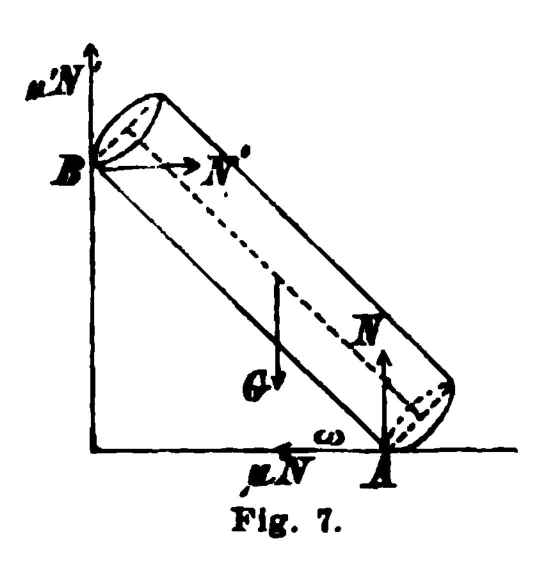


Fig. 7.

$$\mu N - N' = 0, \quad N + \mu' N' - G = 0,$$

$$2N'l (\sin \omega + \mu' \cos \omega) - G (l \cos \omega - r \sin \omega) = 0.$$

Aus den beiden ersten folgen die Drucke $N = \frac{G}{1 + \mu\mu'}$, $N' = \frac{\mu G}{1 + \mu\mu'}$, aus der letzten erhält man $\operatorname{tg} \omega = \frac{1 - \mu\mu'}{2\mu + (1 + \mu\mu') \frac{r}{l}}$.

3. Die vorige Aufgabe soll dahin verallgemeinert werden, dass der Cylinder zwischen zwei Ebenen mit Reibung aufliegt, welche eine Rinne mit horizontaler Kante bilden und gegen die Horizontalebene nach rechts und links unter den Winkeln α und β geneigt sind. Die Axe des Cylinders kreuzt die Kante der Rinne rechtwinklig. Man sucht die beiden äussersten Grenzlagen, d. h. die Winkel ϑ, welche die Axe des Cylinders mit der Horizontalebene im Falle des äussersten Gleichgewichtes bildet und die Normalwiderstände N, N' der Ebenen n in A und B. (Fig. 8.)

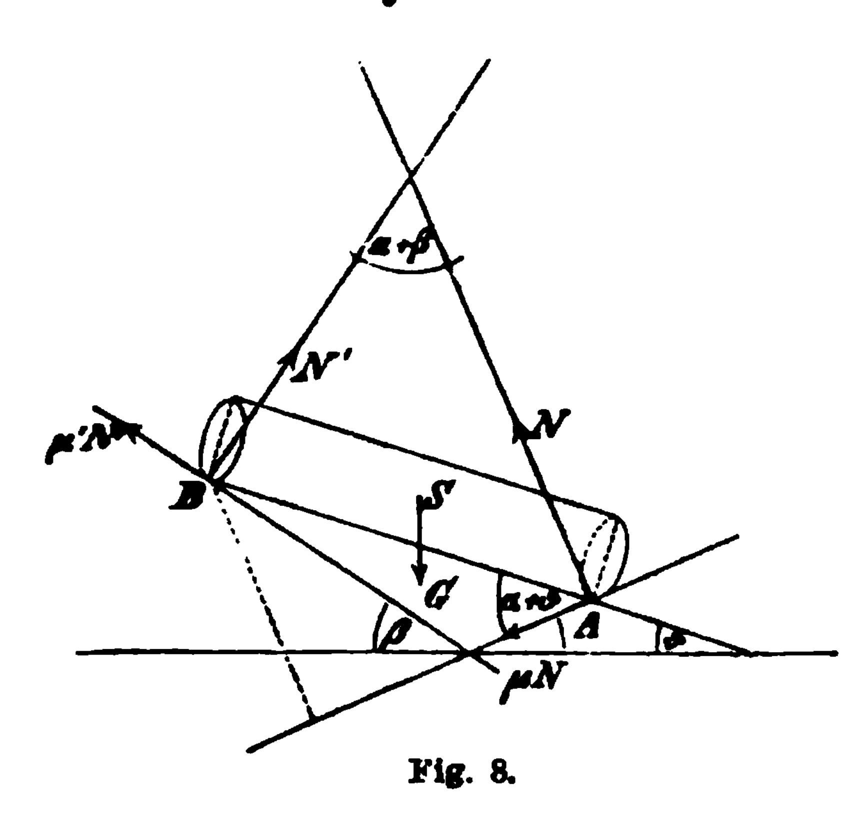


Fig. 8.

Da die Richtungen von N und N' den Winkel $\alpha + \beta$ und N' und μN den Winkel $\frac{1}{2}\pi - (\alpha + \beta)$ bilden, so liefert die Reduction für den Punkt B, wenn man die Richtungen von N' und $\mu' N'$ zu Projectionsaxen wählt, für die eine Lage des äussersten Gleichgewichts:

$$N' + N\cos(\alpha + \beta) - \mu N(\sin\alpha + \beta) = G\cos\beta,$$
$$\mu' N' + N\sin(\alpha + \beta) + \mu N\cos(\alpha + \beta) = G\sin\beta,$$
$$-2lN\cos(\alpha + \vartheta) + 2lN\mu\sin(\alpha + \beta) = G(l\cos\vartheta + r\sin\vartheta),$$

oder indem man zusammenzieht

$$N' + N[\cos(\alpha + \beta) - \mu\sin(\alpha + \beta)] = G\cos\beta,$$
$$\mu' N' + N[\sin(\alpha + \beta) + \mu\cos(\alpha + \beta)] = G\sin\beta,$$
$$2lN[\cos(\alpha + \vartheta) - \mu\sin(\alpha + \vartheta)] = G(l\cos\vartheta + r\sin\vartheta).$$

Diese Gleichungen wird man durch Einführung der Reibungswinkel ϱ, ϱ', wofür $\operatorname{tg}\varrho = \mu$ und $\operatorname{tg}\varrho' = \mu'$ ist, vereinfachen, so dass man erhält

$$N'\cos\varrho + N\cos(\alpha + \beta + \varrho) = G\cos\beta\cos\varrho,$$
$$N'\cos\varrho\operatorname{tg}\varrho' + N\sin(\alpha + \beta + \varrho) = G\sin\beta\cos\varrho,$$
$$2lN[\cos(\alpha + \varrho)\cos\vartheta - \sin(\alpha + \varrho)\sin\vartheta] = G\cos\varrho(l\cos\vartheta + r\sin\vartheta).$$

Aus den beiden ersten folgt

$$N = \frac{\sin(\beta - \varrho')\cos\varrho}{\sin(\alpha + \beta + \varrho - \varrho')} \cdot G, \quad N' = \frac{\sin(\alpha + \varrho)\cos\varrho'}{\sin(\alpha + \beta + \varrho - \varrho')} G$$

und hierzu liefert die dritte

$$\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{l\sin(\alpha - \beta + \varrho + \varrho')}{r\sin(\alpha + \beta + \varrho - \varrho') + 2l\sin(\alpha + \varrho)\sin(\beta - \varrho')}.$$

Für die andere äusserste Lage des Gleichgewichts wechseln die Reibungen den Sinn. Es genügt daher $-\mu$ und $-\mu'$ für μ, μ' zu setzen, wodurch ϱ und ϱ' gleichfalls in $-\varrho$ und $-\varrho'$ übergehen.

Sind die Reibungen Null, so wird

$$N = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} G, \quad N' = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} G, \quad \operatorname{tg}\vartheta = -\frac{l\sin(\alpha + \beta)}{r\sin(\alpha + \beta) + 2l\sin\alpha\sin\beta}.$$

4. Der cylindrische Stab, der jetzt auf eine homogene schwere Linie AB von der Länge l und dem Gewichte G reducirt werden möge,

stütze sich mit dem unteren Ende A (Fig. 9) auf eine horizontale Ebene und sei mit seinem oberen Ende B an eine verticale Ebene mit Reibung vom Coefficienten μ schräg angelehnt. Das untere Ende A kann mit Reibung vom Coefficienten μ' längs einer zur Schnittlinie OX beider Ebenen senkrechten Geraden OY gleiten. Welches sind die äussersten Gleichgewichtslagen des Stabes und welches sind die Widerstände, welche bei A und B von den Ebenen und der Gleitungslinie zu leisten sind?

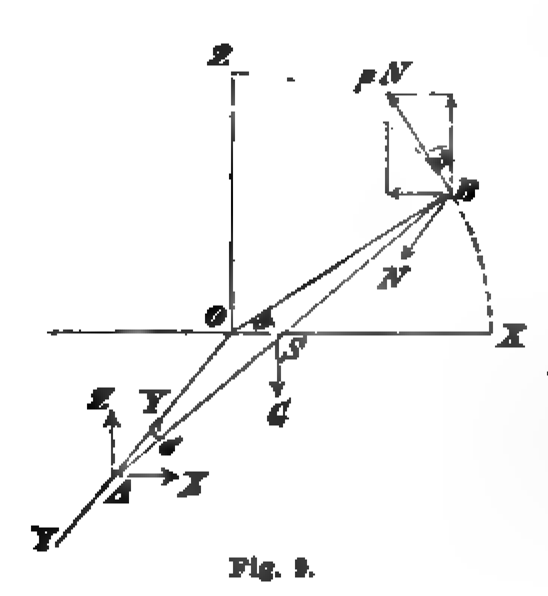


Fig. 9.

Es seien OX, OY und die Verticale OZ die rechtwinkligen Coordinatenaxen und bilde der Stab AB mit AO den Winkel σ und seine Projection OB auf die verticale Wand mit OX den Winkel ϑ. Es sei ferner N der normale Widerstand der verticalen Wand bei B und folglich μN die Reibung bei B, senkrecht zu OB, nämlich tangential an einen mit OB um O in dieser Wand beschriebenen Kreis. Der normale Widerstand der horizontalen Ebene bei A sei Z, der der Gleitungslinie OY sei X und folglich die Reibung Y an der Gleitungslinie $Y = \mu' \sqrt{X^2 + Z^2}$, im Sinne AO gerichtet.

Als Bedingungen des Gleichgewichts ergeben sich

1. $X - \mu N \sin\vartheta = 0$	4. $Z - N \operatorname{tg}\sigma \sin\vartheta = \frac{1}{2} G$
2. $Y - N = 0$	5. $\mu N = \frac{1}{2} G \cos\vartheta$
3. $Z + \mu N \cos\vartheta = G$	6. $-X + N \operatorname{tg}\sigma \cos\vartheta = 0$

Die Gleichungen 1. und 6. liefern $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\mu} \operatorname{tg}\sigma$ und hiermit gibt 5.
$N = \frac{1}{2} G \frac{\cos\vartheta}{\mu} = \frac{1}{2} \frac{G}{\sqrt{\mu^2 + \operatorname{tg}^2\sigma}}$. Hiezu liefern sodann 1., 2., 3. die Grössen

$$X = \frac{1}{2} G \frac{\mu \operatorname{tg}\sigma}{\mu^2 + \operatorname{tg}^2\sigma}, \quad Y = \frac{1}{2} \frac{G}{\sqrt{\mu^2 + \operatorname{tg}^2\sigma}}, \quad Z = \frac{1}{2} G \frac{\mu^2 + 2 \operatorname{tg}^2\sigma}{\mu^2 + \operatorname{tg}^2\sigma}.$$

Die Bedingung $\mu'^2 (X^2 + Z^2) = Y^2$ gibt für σ die Gleichung

$$\operatorname{tg}^4\sigma + \frac{1}{4}\left(5\mu^2 - \frac{1}{\mu'^2}\right)\operatorname{tg}^2\sigma + \frac{1}{4}\mu^2\left(\mu^2 - \frac{1}{\mu'^2}\right) = 0.$$

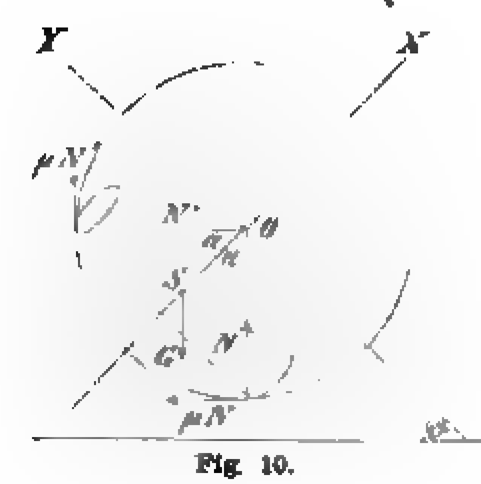


Fig. 10.

Von den beiden reellen Werthen für $\operatorname{tg}\sigma$, welche hieraus folgen, ist nur der positive brauchbar. Ihm entspricht ein Werth von ϑ, welcher aus $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\mu} \operatorname{tg}\sigma$ folgt. Uebrigens kann ϑ diesseits und jenseits OZ construirt werden. Für alle Winkel σ, grösser als der Minimalwerth bis zu $\sigma = \frac{1}{2}\pi$, findet Gleichgewicht statt, aber für verschiedene Winkel ϑ.

5. Ein homogener, schwerer Cylinder (Fig. 10) von der Länge $2l$, dem Durchmesser $2r$ und dem Gewichte G liege im Innern einer festen

Hohlkugel vom Radius R mit Reibung vom Coefficienten μ in einer äussersten Gleichgewichtslage bei A und B auf. Welches sind die Widerstände N, N' der Kugel in diesen Punkten und unter welchem Winkel ϑ ist die Axe des Cylinders gegen die Horizontalebene geneigt?

Wenn 2α der zu $2l$ in der Kugel gehörige Centriwinkel ist und die Richtungen der Cylinderaxe und der Halbirungslinie des Winkels 2α zu Projectionsaxen gewählt werden, so sind die Bedingungen des Gleichgewichtes, welche N, N', ϑ liefern:

$$(N + N') \cos\alpha - \mu (N - N') \sin\alpha = G \cos\vartheta,$$
$$\mu (N + N') \cos\alpha + (N - N') \sin\alpha = G \sin\vartheta,$$
$$\mu (N + N') R = G c \sin\vartheta,$$

wo $c = OS$ den Abstand des Massenmittelpunktes S des Cylinders vom Kugelmittelpunkte bedeutet. Aus den beiden ersten folgt, wenn $\mu = \operatorname{tg}\varrho$ gesetzt wird

$$N + N' = G \frac{\cos(\vartheta - \varrho)\cos\varrho}{\cos\alpha}, \quad N - N' = G \frac{\sin(\vartheta - \varrho)\cos\varrho}{\sin\alpha}$$

und hiemit

$$N = G \frac{\sin(\alpha - \varrho + \vartheta)\cos\varrho}{\sin 2\alpha}, \quad N' = G \frac{\sin(\alpha + \varrho - \vartheta)\cos\varrho}{\sin 2\alpha}.$$

Hiezu liefert die dritte der Gleichungen

$$\operatorname{cotg}\vartheta = \frac{2c}{R}\frac{\cos\alpha}{\sin 2\varrho} - \operatorname{tg}\varrho.$$

Für die entgegengesetzte äusserste Gleichgewichtslage ist $-\mu$ an die Stelle von μ zu setzen. Dadurch wird $\operatorname{tg}\varrho$ durch $-\operatorname{tg}\varrho$ und $\sin 2\varrho$ durch $-\sin 2\varrho$ vertreten. Hieraus folgt, das $\operatorname{cotg}\vartheta$ für die zweite Lage einen Werth annimmt, welcher mit dem der ersten Lage entsprechenden Werthe zusammen Null gibt. Daher stehen die Axenrichtungen des Cylinders für beide Lagen auf einander senkrecht. Jede Zwischenlage ist gleichfalls eine Gleichgewichtslage.

6. Der Cylinder liege mit Reibung auf der festen Kugelfläche auf (Fig. 11) und sei am unteren Ende mit einem Gewichte P beschwert; man soll die äussersten Gleichgewichtslagen finden und den Widerstand N der Kugel bestimmen. Man hat, wenn x der Abstand des Massenmittelpunktes S von der Normalen des Berührungspunktes M ist, die Bedingungen:

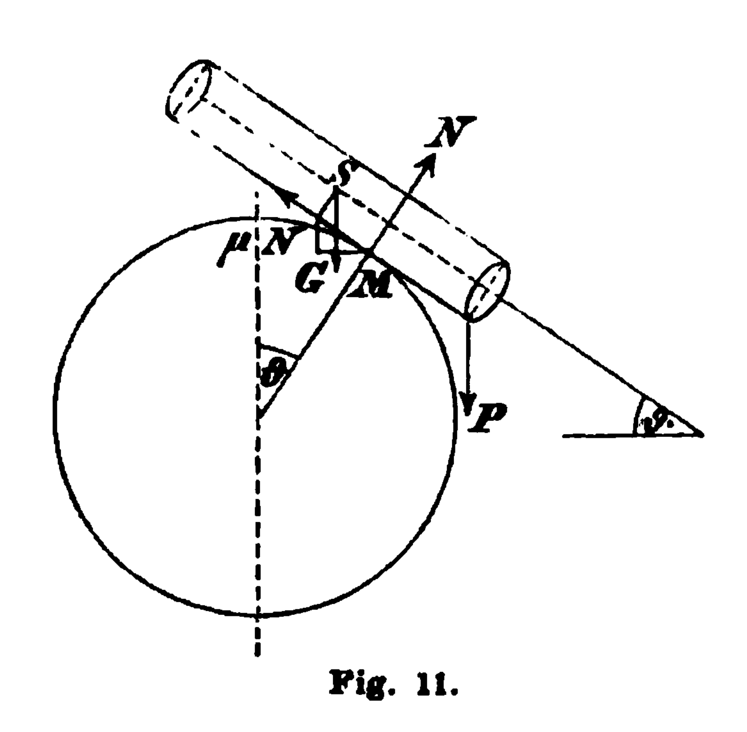


Fig. 11.

$$N - (G + P)\cos\vartheta = 0,$$
$$\mu N - (G + P)\sin\vartheta = 0,$$
$$G[x\cos\vartheta - r\sin\vartheta] - P(l - x)\cos\vartheta = 0,$$

woraus

$$\operatorname{tg}\vartheta = \mu, \quad N = \frac{G + P}{\sqrt{1 + \mu^2}}, \quad x = \frac{Pl + \mu G r}{G + P}$$

folgt. Die Berührungspunkte der äussersten Gleichgewichtslagen liegen auf einem Kreise, den eine Gerade auf der Kugel bestimmt, die unter dem Winkel ϑ gegen den verticalen Kugeldurchmesser geneigt, um diese rotirt.

§. 2. Geneigte Fallthür (räumliches Kräftesystem im Gleichgewicht an einem unveränderlichen Punktsystem mit fester Axe).

Eine homogene, schwere, parallelepipedische Platte (Fig. 12) von der Länge $2l$, der Breite $2b$ und der Dicke $2d$ ist um eine gegen den Horizont unter einem Winkel n geneigte, die Mitten der zwei Gegenseiten von der Länge $2d$ einer parallelogrammatischen Seitenfläche verbindende Axe drehbar; sie ist aus der Gleichgewichtslage um den Winkel φ herausgedreht und soll durch eine zur Seitenfläche $4bl$ senkrechte, in der Mitte der Längendimension im Abstande c von der Axe angreifende Kraft P im Gleichgewichte erhalten werden. Wie gross ist P, wenn das Gewicht der Platte G beträgt? Die Schwerkräfte der Platte ersetzen wir durch ihre Resultante, das am Schwerpunkte S angreifende Gesammtgewicht G derselben; der Schwerpunkt der Platte ist der geometrische Mittelpunkt derselben. Die Widerstände der Axe denken wir an den Enden der Axe wirkend und bezeichnen den am höher gelegenen Ende wirkenden mit N, den anderen mit N'. Wählen wir eine durch die Mitte der Länge $2l$ senkrecht zur Axe gelegte Ebene zur xy-Ebene und ihre Schnittlinie mit der Gleichgewichtslage der Platte zur x-Axe, senkrecht dazu die y-Axe und die feste Axe zur z-Axe, so erhalten wir behufs der Reduction der Kräfte für den Coordinatenursprung die Tabelle:

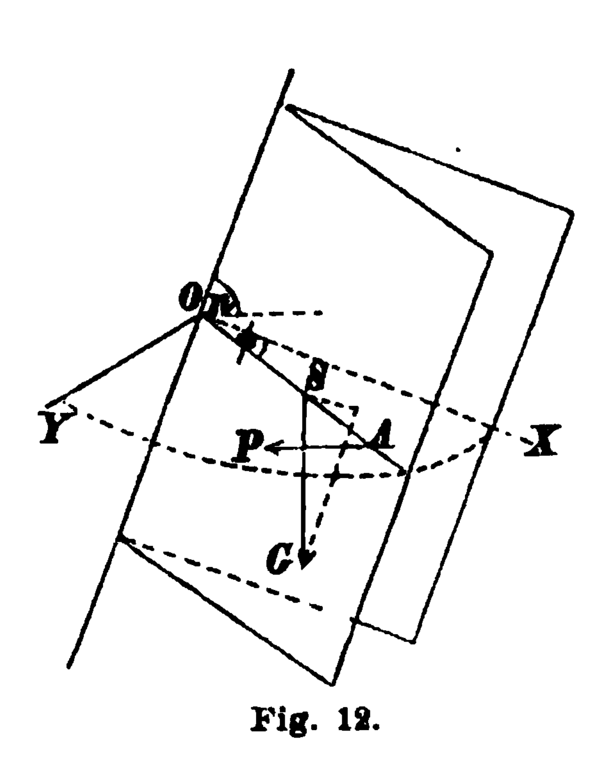


Fig. 12.

Kräfte	X	Y	Z	x	y	z	$yZ - zY$	$zX - xZ$	$xY - yX$
G	$G\cos n$	0	$-G\sin n$	$b\cos\varphi$	$b\sin\varphi$	0	$-bG\sin\varphi\sin n$	$bG\cos\varphi\sin n$	$-bG\sin\varphi\cos n$
P	$-P\sin\varphi$	$P\cos\varphi$	0	$c\cos\varphi$	$c\sin\varphi$	0	0	0	$Pc(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$
N	X	Y	Z	0	0	l	$-lY$	lX	0
N'	X'	Y'	Z'	0	0	$-l$	lY'	$-lX'$	0

und mit Hülfe derselben die Gleichgewichtsbedingungen:

$$
\begin{array}{ll}
1. & G\cos n - P\sin\varphi + X + X' = 0 \\
2. & P\cos\varphi + Y + Y' = 0 \\
3. & -G\sin n + Z + Z' = 0 \\
4. & -bG\sin\varphi\sin n - l(Y - Y') = 0 \\
5. & bG\cos\varphi\sin n + l(X - X') = 0 \\
6. & -bG\sin\varphi\cos n + Pc = 0.
\end{array}
$$

Die sechste Gleichung löst die Hauptfrage der Aufgabe, indem sie P liefert. Man findet diese Gleichung unmittelbar, indem man G parallel und senkrecht zur festen Axe zerlegt; da G mit der xy-Ebene den Winkel n bildet, so ist die letztere Componente, welche der x-Axe parallel läuft, $G\cos n$ und da der Arm des $G\cos n$ entsprechenden Paares $b\sin\varphi$ ist, so erhält man für das Moment dieses Paares, dessen Axe parallel der z-Axe ist, $-bG\sin\varphi\cos n$; Pc ist das Moment des anderen Paares, welches diesem Gleichgewicht halten muss. P wird ein Maximum für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, es wird Null für $\varphi = 0$ oder π. Für $n = \frac{1}{2}\pi$ ist P stets gleich Null bei jedem φ (die offenstehende Thüre mit vertikaler Axe). Je grösser n, desto kleiner wird P, für $n = 0$ wird P ein Maximum. Für $n = 0$ und $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ tritt das absolute Maximum von P ein (horizontale Fallthür).

Die übrigen Gleichungen liefern X, X'; Y, Y'; $Z + Z'$, nämlich:

$$X = \tfrac{1}{2} G \left\{ \left(\frac{b}{c} \sin^2 \varphi - 1 \right) \cos n - \frac{b}{l} \cos\varphi \sin n \right\},$$

$$X' = \tfrac{1}{2} G \left\{ \left(\frac{b}{c} \sin^2 \varphi - 1 \right) \cos n + \frac{b}{l} \cos\varphi \sin n \right\}, \qquad Z + Z' = G \sin n.$$

$$Y = -\tfrac{1}{2} G \left\{ \frac{b}{c} \cos\varphi \cos n + \frac{b}{l} \sin n \right\} \sin\varphi,$$

$$Y' = -\tfrac{1}{2} G \left\{ \frac{b}{c} \cos\varphi \cos n - \frac{b}{l} \sin n \right\} \sin\varphi,$$

Z und Z' können nicht getrennt werden, da sie längs derselben Geraden wirken.

Für $n = \frac{1}{2}\pi$, wofür $P = 0$ ist, erhält man bezüglich der Widerstände:

$$X + X' = 0, \quad Y + Y' = 0, \quad Z + Z' = G, \quad X - X' = -\frac{bG}{l} \cos\varphi, \quad Y - Y' = 0,$$

mithin

$$X = -X' = -\tfrac{1}{2} \frac{b}{l} G, \quad Y = -Y' = 0, \quad Z + Z' = G,$$

da man $\varphi = 0$ setzen kann. Bei einer vertikalen Thüre wird also der obere Kloben herausgedrückt, der untere hineingedrückt. Ueber die z-Componenten der Widerstände ist hinsichtlich ihrer Vertheilung auf die Kloben, welche hier als absolut fest gelten, nichts zu ermitteln.

§. 3. Sauveur und de l'Hospital's Zugbrücke.

Es sei AB (Fig. 13) die Breite einer homogenen, schweren Platte vom Gewichte G, welche um eine horizontale Axe A drehbar ist; in B ist ein gewichtloser Faden befestigt und über den Punkt C, welcher in der Höhe $AC = h$ vertikal über A liegt, hinweggespannt; am anderen Ende M der Länge a des Fadens wirkt das Gewicht Q einer grossen Masse, deren Schwerpunkt M sich auf einer gewissen Curve CM bewegen kann. Welches ist die Beschaffenheit der Curve, wenn das System für jede Lage von M auf ihr im Gleichgewichte sein soll?

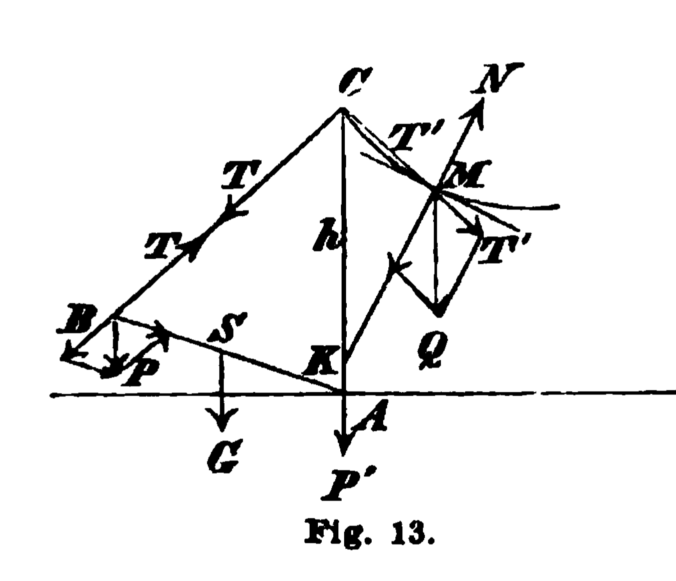


Fig. 13.

Die Aufgabe ist von einiger Bedeutung für die Construction der Zugbrücken, wenn AB die Brückenbahn, BCM die Zugkette ist, deren Gewicht hier gegenüber den grossen Gewichten der Bahn und der Masse Q nicht in Betracht kommt, und die Kette über eine Rolle C läuft, deren Dimensionen ebenfalls unbedeutend sind. Die Figur stellt einen Verticalschnitt der Zugbrücke dar, durch die Mitte der Axe der Brückenbahn senkrecht zu dieser Axe geführt. Statt der Zugkette und der Laufcurve der Figur gibt es in Wirklichkeit zwei symmetrisch gegen den Verticalschnitt liegende congruente solche Ketten und Curven und ist Q die Resultante aus den Gewichten zweier gleich grosser Massen, deren Massenmittelpunkte auf beiden Curven laufen. Die Aufgabe wurde dem Marquis de l'Hospital von Sauveur 1695 gestellt, welcher erstere eine Lösung in den *Actis eruditorum Lipsiensium* von 1695 (Februar) S. 56 gab. Joh. Bernoulli schrieb gleichfalls hierüber, ebendas. S. 59.

Denkt man sich den Faden zwischen B und C, sowie zwischen C und M durchgeschnitten, so sind an der ersteren Stelle zwei gleiche Kräfte T und an

der letzteren ebenfalls zwei gleiche Kräfte T' in entgegengesetztem Sinne längs der Richtung des Fadens anzubringen, um den Zusammenhang des Systems an diesen Stellen durch Kräfte auszudrücken. Dadurch zerfällt aber das Gesammtsystem in drei Partialsysteme, von denen jedes für sich im Gleichgewichte ist, nämlich: 1. das System der Platte, welches um die feste Axe A drehbar ist und an welchem das Gewicht G der Platte am Schwerpunkte S derselben angreifend und die Kraft T (Spannung des Fadens) wirkt, 2. das System des festen Punktes C mit den Kräften T, T' und 3. das System des auf der gesuchten Curve beweglichen Punktes M mit den Kräften T' und Q.

Wir zerlegen das Gewicht G in zwei Parallelkräfte P und P', in B und A angreifend und P weiter in zwei Componenten, die eine in der Richtung des Fadens CB, die andere in der Richtung BA. Die letztere wird, an A verlegt, mit P' zusammen den Druck auf die Axe der Platte bestimmen, welcher von dem Widerstande dieser getilgt wird; das Gleichgewicht des Systems der Platte verlangt, dass die erstere Componente gleich T sei. Man hat daher:

$$\frac{T}{BC} = \frac{P}{AC}.$$

Hinsichtlich des zweiten Systems ergibt sich $T' = T$. Denn der Punkt C kann angesehen werden als eine unendlich kleine Rolle mit dem festen Mittelpunkte C und wenn der Radius derselben α ist, so findet man durch Reduction der Kräfte auf C: $T\alpha - T'\alpha = 0$, d. h. $T = T'$.

Zerlegt man im dritten System das Gewicht Q nach den Richtungen CM und der Normalen der Curve, so folgt, dass die erstere von diesen Componenten gleich T, die letztere aber dem Normalwiderstande N der Curve gleich sein müsse. Ist daher K der Schnittpunkt der Normalen mit AC, so folgt aus dem Parallelismus der Linien der Figur weiter:

$$\frac{T}{CM} = \frac{Q}{CK} = \frac{N}{MK} \text{ und } \frac{CM}{\sin KMQ} = \frac{CK}{\sin KMT'} = \frac{MK}{\sin KCM}.$$

Beziehen wir nun die unbekannte Curve auf Polarcoordinaten, mit C als Pol, CA als Polaraxe (Fig. 13a) und setzen den Radiusvector $CM = \varrho$ und den Polarwinkel $KCM = \vartheta$, so wird $\sin KMQ = \cos QMM' = GG' : MM' = d\,.\,CG : MM'$ $= d\,(\varrho \cos \vartheta) : ds$ und $\sin KMT' = \cos TMM' = d\varrho : ds$, sowie $\sin KCM = \sin \vartheta$. Hiemit gewinnt man die Proportion:

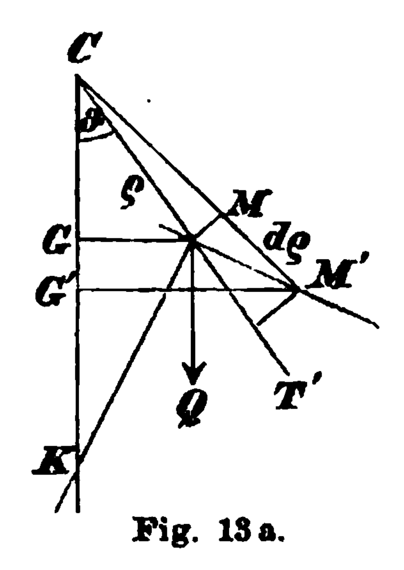


Fig. 13a.

$$\frac{T}{d\,.\,\varrho \cos \vartheta} = \frac{Q}{d\varrho} = \frac{N}{ds\,.\,\sin \vartheta}.$$

Eliminirt man aus

$$\frac{T}{BC} = \frac{P}{AC} \text{ und } \frac{T}{d\,.\,\varrho \cos \vartheta} = \frac{Q}{d\varrho}$$

die Spannung T, so ergibt sich zur Bestimmung der gesuchten Curve, wenn $AC = h$, $\frac{Q}{P} h = b$ gesetzt und berücksichtigt wird, dass $BC = a - \varrho$ ist, die Differentialgleichung

$$(a - \varrho)\, d\varrho = b\, d\,.\,\varrho \cos \vartheta,$$

deren Integration zu der Gleichung der Curve in ϱ, ϑ führt, nämlich:

$$\text{Const.} - (a - \varrho)^2 = 2 b \varrho \cos \vartheta.$$

Um die Constante zu bestimmen, muss die Curve noch einer weiteren Be-

dingung unterworfen werden. Fügen wir die Bedingung hinzu, dass sie durch den Punkt C hindurchgehen soll, so muss für jeden Werth von ϑ die Gleichung einen Werth des Radiusvectors ϱ gleich Null liefern, d. h. sie muss ϱ als Factor besitzen. Dies führt zu Const. $- a^2 = 0$, womit die Gleichung der Curve nach Ausscheidung des Factors ϱ die Form annimmt

$$\varrho = 2a - 2b \cos \vartheta.$$

Um die Curve zu construiren, suchen wir zunächst die Bedeutung der Grösse $b = \frac{Q}{P} \cdot h$ auf. Trägt man auf der Richtung des Radiusvectors CM (Fig. 13b) die Strecke $CD = a$, nämlich gleich der Länge des Fadens auf und zieht DE parallel AC bis zum Schnittpunkt E mit der Normalen KM der Curve, so wird $MD = a - \varrho = BC$. Aus den obigen Proportionen

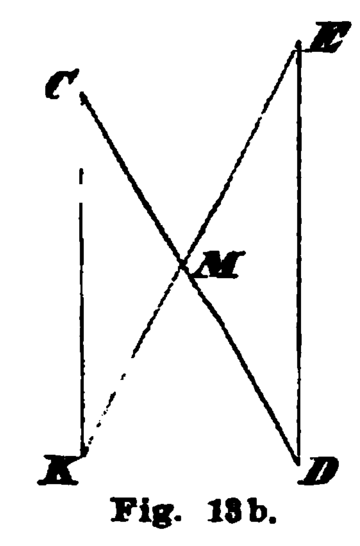


Fig. 13b.

$$\frac{T}{BC} = \frac{P}{AC} \text{ und } \frac{T}{CM} = \frac{Q}{CK}$$

folgt aber $\frac{Q}{P} = \frac{CK}{CM} \cdot \frac{BC}{h}$, mithin $b = \frac{Q}{P} h = \frac{CK}{CM} \cdot BC$.

Weiter ist $\frac{CK}{CM} = \frac{DE}{MD} = \frac{DE}{BC}$ und hiermit wird $b = DE$.

Die Curve hat daher die Eigenschaft, dass ihre Normale von der Verticalen des Punktes D, in welchem die Richtung des Radiusvectors einen um den Pol C mit dem Radius a beschriebenen Kreis trifft, die constante Länge b abschneidet.

Die Länge b kann übrigens grösser, gleich oder kleiner als a sein. Für den Fall, dass $AB = AC$ ist, wird $\varrho = a$ der längste Radiusvector, welcher der mechanischen Aufgabe entspricht. Der Kreis um C vom Radius a schneidet daher die Curve in dem äussersten Punkte H, welchen der Massenmittelpunkt M von Q auf der Curve erreichen kann und bestimmt den Bogen CH der Curve, dessen Punkte die Orte von M sind. In diesem Punkte H ist ein Punkt M mit dem zugehörigen Punkte D vereinigt und mithin die Normale HE vertical und die Tangente daselbst horizontal. Es ist daher H ein tiefster Punkt der Curve. In dem Falle, dass $AB < AC$ und $AC - AB = d$ ist, bestimmt ein Kreis um C mit dem Radius $a - d$ den äussersten Punkt, welchen M erreicht.

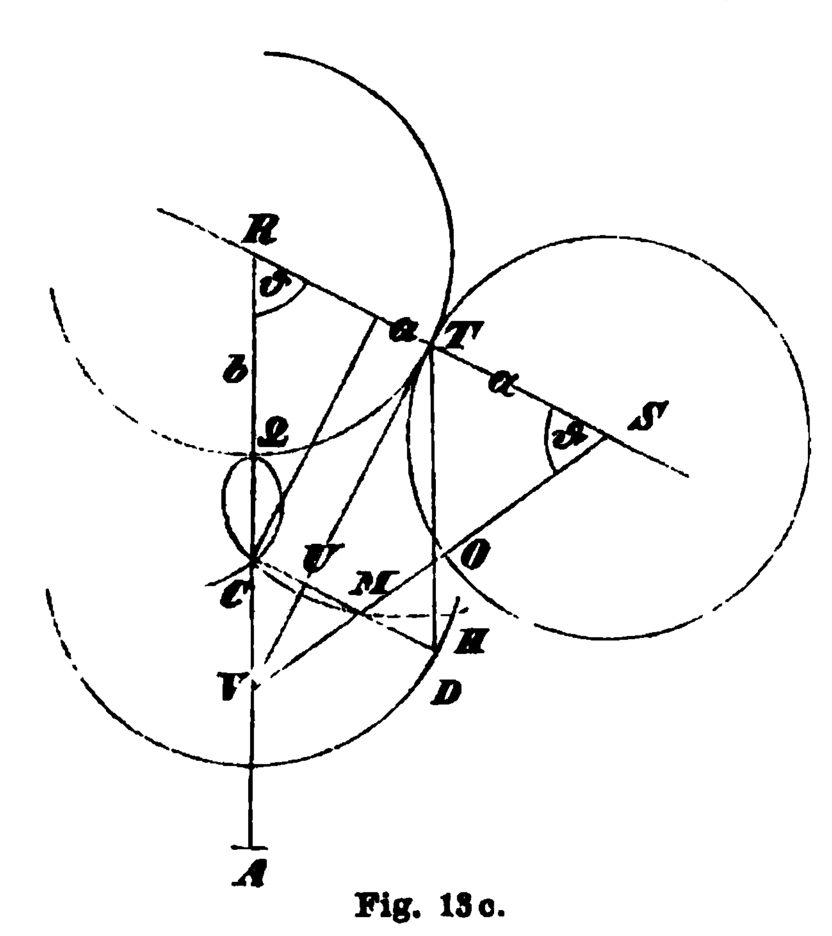


Fig. 13c.

Verlängert man AC über C hinaus (Fig. 13c) um $CR = b$ und beschreibt um R mit a als Radius einen Kreis, so kann man für jede Richtung des Radiusvectors CM, der unter dem variabelen Winkel ϑ gegen CA geneigt ist, den ihr angehörenden Curvenpunkt M finden. Zieht man nämlich durch R die Gerade RS parallel CM und legt in ihrem Schnittpunkte T mit dem Kreise die Tangente TV an diesen, so bestimmt sie auf CM den Punkt U so, dass $CU = a - b \cos \vartheta$, also $2 . CU = 2a - 2b \cos \vartheta = \varrho = CM$ wird.

Nimmt man TS ebenfalls gleich a, so bestimmt die Gerade SV, welche mit SR den Winkel ϑ bildet und also Seite des gleichschenkligen Dreiecks RSV ist, den Punkt M unmittelbar.

Da CM parallel RS und ΔRSV gleichschenklig ist, so wird $MS = CR = b$. Die Punkte M liegen also von den ihnen zugehörigen Punkten S um die constante Strecke b ab. Beschreibt man auch um S mit a als Radius einen Kreis, so ist in diesem wegen $\sphericalangle RSV = \vartheta$ der Bogen TO gleich $T\Omega$. Dreht sich daher der Radiusvector CM, so folgt ihm RS parallel nach, rollt der Kreis S auf dem festen Kreise R und beschreibt der Punkt M als ein dem Systeme des rollenden Kreises im Abstande $MS = b$ von S angehörender Punkt die Curve. Die Curve ist daher eine Epicycloide, entsprechend dem Falle, dass der Radius a des rollenden Kreises gleich dem des festen Kreises ist, auf welchem er rollt und der beschreibende Punkt den Abstand b vom Mittelpunkte des beweglichen Kreises besitzt. Diese Epicycloiden sind die Pascal'schen Schneckenlinien (S. B. I, S. 238). Der Punkt T ist das Momentancentrum der Bewegung des Kreises, daher ist TM die Normale der Curve in M. Auch erhält man sie, indem man die Radienvectoren von einem Punkte C eines Kreises vom Radius b um die Strecke $2a$ verlängert (Fig. 13d). Der Radiusvector CM' ist $\varrho' = 2a + 2b \cos \vartheta$, der andere CM, in dieselbe Richtungslinie fallende $\varrho = 2a - 2b \cos \vartheta$. Auch sind die Curven Fusspunktcurven des Kreises vom Radius $2a$, wenn $2b$ der Abstand des Poles C vom Mittelpunkt des Kreises ist.

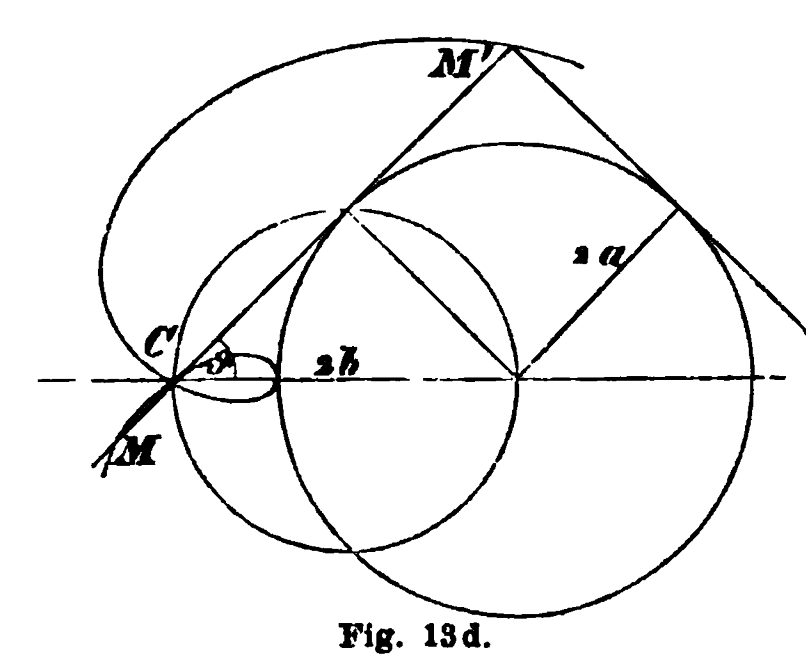


Fig. 13d.

Die Curve unseres Problems hat für $b = a$ in C eine Spitze, für $b > a$ eine Schleife, für $b < a$ kann sie nicht mehr durch C gehen.

Für die Spannung T erhalten wir aus den obigen Proportionen:

$$T = \frac{BC}{AC} \cdot P = \frac{BC}{h} \cdot P \quad \text{oder da} \quad \frac{Q}{P} h = b \text{ ist: } T = \frac{Q}{b} \cdot BC.$$

Sie ist proportional $BC = a - \varrho = -a + 2b \cos \vartheta$.

Die vorige Aufgabe werde dahin abgeändert, dass vom Punkte B aus eine starre, um B drehbare Linie von der Länge l zum Punkte M führe, in welchem das Gewicht Q wirkt. Welches ist die Curve des Gleichgewichtes, auf welcher M l ufen muss?

§. 4. Ein homogener schwerer Stab vom Gewichte G und der Länge $2l$ ist an beiden Enden A und B mittelst zweier gleichlanger Fäden an zwei Punkten a, b im Abstande $2l$ aufgehangen. An A und B wirken senkrecht zum Stab und horizontal die beiden Kräfte P eines Paares $2Pl$. In welcher Lage findet Gleichgewicht statt? (Bifilare Aufhängung.)

§. 5. Gleichgewicht von Kräften an den Ecken eines veränderlichen einfachen Vierecks von constanten Seiten.

An den Ecken eines einfachen Vierecks*) $ABCD$ (Fig. 14) im Raume,

*) n Punkte in der Ebene heissen ein vollständiges nEck, die $\frac{1}{2}n\,(n-1)$

dessen Seiten constante Längen haben, dessen Winkel aber veränderlich sind, greifen vier Kräfte P, Q, R, S an; es sind die Bedingungen des Gleichgewichts derselben aufzustellen.

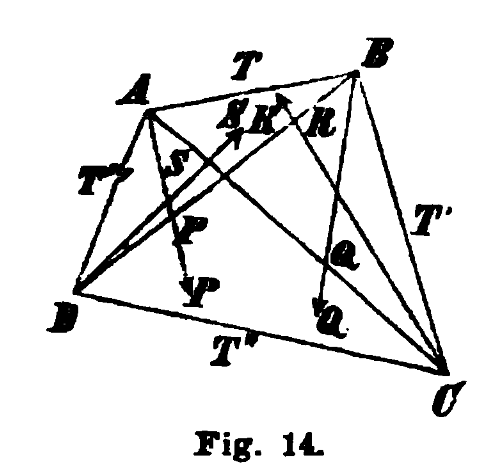


Fig. 14.

Schneidet man die Seiten AB, BC, CD, DA durch und führt längs ihnen die paarweise entgegengesetzt gleichen Spannungen (Pressungen) T, $-T$; T', $-T'$; T'', $-T''$; T''', $-T'''$ ein, so erfordert das Gleichgewicht der Kräfte T''', T, P am Punkte A; T, T', Q an B; T', T'', R an C; T'', T''', S an D, dass P in in die Ebene DAB, Q in ABC, R in BCD, S in CDA falle und ergeben sich an jedem der vier Punkte zwei Gleichgewichtsbedingungen, welche ausdrücken, dass jede der dort angreifenden Kräfte der Resultanten der beiden anderen entgegengesetzt gleich ist und welche unter den Formen ausgedrückt werden können:

$$\begin{array}{lcl}
\dfrac{T'''}{\sin PAB} = \dfrac{T}{\sin PAD} = \dfrac{P}{\sin DAB} & & T = P\,\dfrac{\sin PAD}{\sin DAB} = Q\,\dfrac{\sin QBC}{\sin ABC} \\
\dfrac{T}{\sin QBC} = \dfrac{T'}{\sin QBA} = \dfrac{Q}{\sin ABC} & \text{oder} & T' = Q\,\dfrac{\sin QBA}{\sin ABC} = R\,\dfrac{\sin RCD}{\sin BCD} \\
\dfrac{T'}{\sin RCD} = \dfrac{T''}{\sin RCB} = \dfrac{R}{\sin BCD} & & T'' = R\,\dfrac{\sin RCB}{\sin BCD} = S\,\dfrac{\sin SDA}{\sin CDA} \\
\dfrac{T''}{\sin SDA} = \dfrac{T'''}{\sin SDC} = \dfrac{S}{\sin CDA} & & T''' = S\,\dfrac{\sin SDC}{\sin CDA} = P\,\dfrac{\sin PAB}{\sin DAB}.
\end{array}$$

Durch Multiplication des Gleichungssystems rechts ergibt sich für die Richtungen der Kräfte P, Q, R, S die Bedingung:

$$\frac{\sin PAB}{\sin PAD}\cdot\frac{\sin QBC}{\sin QBA}\cdot\frac{\sin RCD}{\sin RCB}\cdot\frac{\sin SDA}{\sin SDC} = 1;$$

geeignete Combinationen der Gleichungen dieses Systems liefern die Verhältnisse der Kräfte; die letzte liefert $S : P$; die Multiplication der beiden letzten $R : P$, der drei letzten $Q : P$ u. s. w.

Ist die Gestalt des Vierecks und sind die Richtungen dreier Kräfte P, Q, R in den Ebenen DAB, ABC, BCD gegeben, so kann mit Hülfe der Bedingungsgleichung die Richtung der vierten Kraft S bestimmt und können die Verhältnisse der Intensitäten der vier Kräfte gefunden werden. Dasselbe leistet auch folgende Construction. Man nehme die Intensität von P in der Richtung AP

Geraden, welche durch sie bestimmt werden, seine Seiten; n Gerade in der Ebene heissen ein vollständiges n Seit, die $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)$ Punkte, in welchen sie sich schneiden, seine Ecken. n Punkte in einer bestimmten Aufeinanderfolge genommen heissen ein einfaches n Eck und die n Geraden, welche in dieser Ordnung die Punkte aufeinanderfolgend verbinden, seine Seiten; n Gerade in bestimmter Aufeinanderfolge heissen ein einfaches n Seit und die n Punkte, in welchen sie sich in dieser Ordnung aufeinanderfolgend schneiden, seine Ecken. Das vollständige Viereck hat sechs Seiten, das vollständige Vierseit sechs Ecken; das einfache Viereck hat vier Seiten, das einfache Vierseit vier Ecken. Beim vollständigen n Eck heissen Nebenscheitel die Schnittpunkte der Seiten, welche nicht Ecken sind, beim vollständigen n Seit sind Diagonalen die Verbindungslinien der Ecken, welche nicht Seiten sind. Das vollständige Viereck hat drei Nebenscheitel, das vollständige Vierseit drei Diagonalen.

willkürlich an; da $-P$ die Resultante von T''' und T sein muss, so liefert die Zerlegung dieser Kraft mit Hülfe eines Parallelogramms nach den Seiten AD, AB die Spannungen T''', T'. Da $-Q$ die Resultante von T' und T ist, so liefert ein weiteres Parallelogramm die Intensitäten von Q und T'; hieran reiht sich ein drittes, aus welchem R und T'' sich ergeben. Aus T'' und T''' am Punkte D folgt dann S nach Richtung und Intensität.

Die Richtung der vierten Kraft kann man auch direct finden. Nach Cap. III, §. 6, S. 35 müssen nämlich die Richtungen der vier im Gleichgewicht befindlichen Kräfte derselben Schaar eines Hyperboloids angehören. Durch die Richtungslinien der drei Kräfte P, Q, R ist dasselbe bestimmt und jede Gerade L, welche sie schneidet, muss auch S schneiden. Da S der Ebene CDA angehört, so braucht man blos den Schnittpunkt einer solchen Geraden L mit dieser Ebene zu suchen; die Gerade, welche ihn mit D verbindet, ist die Richtungslinie von S. Alle Geraden L schneiden die Ebene CDA in Punkten von S. Die beiden Diagonalen AC, BD sind Linien, welche die vier Kraftrichtungen schneiden und gehören mithin der zweiten Schaar des Hyperboloids an. Sie werden daher von den vier Kraftrichtungen nach demselben Doppelverhältnisse geschnitten, nämlich so, dass, wenn AC in Q, S von Q, S und BD in P, R von P, R getroffen werden, die Gleichung besteht:

$$\frac{AQ}{QC} : \frac{AS}{SC} = \frac{BP}{PD} : \frac{BR}{RD}.$$

Will man die projectivische Theilung der Erzeugungslinien des Hyperboloids nicht als bekannt zu Hülfe rufen, so ergibt sich dieselbe auch aus den Dreiecken PAB und PAD; QBC und QBA; RCD und RCB; SDC und SDA. Man hat nämlich:

$$\sin PAB : \sin PAD = \frac{BP}{AB} : \frac{PD}{AD}, \quad \sin QBC : \sin QBA = \frac{CQ}{BC} : \frac{QA}{AB},$$

$$\sin RCD : \sin RCB = \frac{RD}{CD} : \frac{RB}{BC}, \quad \sin SDC : \sin SDA = \frac{CS}{CD} : \frac{SA}{AD}$$

und wenn man diese Gleichungen miteinander multiplicirt und die oben entwickelte Bedingungsgleichung für die Richtungen der vier Kräfte berücksichtigt, so ergibt sich dasselbe Resultat.

Man kann die Verhältnisse der Kraftintensitäten leicht durch die Abschnitte ausdrücken, welche die Kraftrichtungen auf den beiden Diagonalen bestimmen. Zunächst hat man aus den ganz zu Anfang aufgestellten Gleichungen:

$$P : Q = \frac{\sin DAB}{\sin PAD} : \frac{\sin ABC}{\sin QBC}.$$

Nun ist aber

$$\sin DAB : \sin PAD = \frac{BD}{AB} : \frac{PD}{AP}, \quad \sin ABC : \sin QBC = \frac{AC}{AB} : \frac{QC}{QB},$$

mithin

$$P : Q = \frac{BD \cdot AP}{PD} : \frac{AC \cdot QB}{QC}.$$

Auf ähnliche Weise ergeben sich die übrigen Verhältnisse.

Schneiden sich die beiden in zwei Gegenecken B, D angreifenden Kräfte Q und S auf der Diagonale AC, so fällt S mit Q zusammen und löst sich die Gleichung $\frac{AQ}{QC} : \frac{AS}{SC} = \frac{BP}{PD} : \frac{BR}{RD}$ auf in $AQ : QC = AS : SC$ und $BP : PD = BR : RD$;

aus letzterer Gleichung folgt, dass auch R und D zusammenfallen und die Kräfte R und D sich auf der Diagonale BD schneiden.

Sind vier Kräfte P, Q, R, S an einem unveränderlichen System im Gleichgewicht, so kann man unendlich viele veränderliche einfache Vierecke von unveränderlichen Seiten finden, an denen diese Kräfte, durch die Ecken gehend, ebenfalls einander Gleichgewicht halten. Denn da die vier Richtungslinien derselben Schaar eines Hyperboloids angehören, so kann man auf unendlich viele Arten zwei Gerade finden, von denen jede sie alle vier schneidet, die erste in Punkten A, Q, C, S, die zweite in Punkten P, B, R, D. Nun bestimme man willkürlich eine Ordnung der Kräfte als erste, zweite, dritte und vierte und wähle zu Angriffspunkten der ersten und dritten ihre Schnittpunkte mit der einen Geraden, zu Angriffspunkten der zweiten und vierten ihre Schnittpunkte mit der andern. Verbindet man hierauf in derselben Ordnung, wie die Kräfte, ihre Angriffspunkte aufeinanderfolgend durch unveränderliche Strecken zu einem einfachen Viereck, dessen Seiten in den Ecken gelenkartig beweglich mit einander verbunden sind, so besteht das Gleichgewicht an diesem veränderlichen Viereck fort. Bei der Ordnung P, Q, R, S ist sowohl $ABCD$ als auch $PQRS$ ein solches Viereck, bei der Ordnung P, R, Q, S sind $ARQD$ und $PCBS$ solche Vierecke.

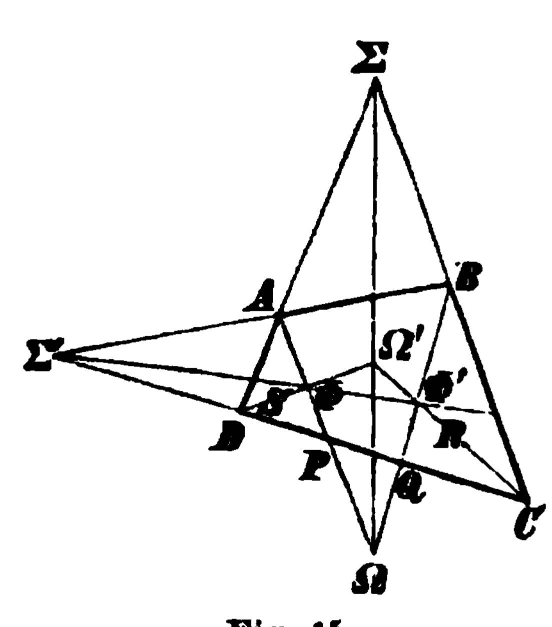


Fig. 15.

Ist das Viereck eben, so fallen die vier Kräfte in dessen Ebene, weil die Ebenen der Dreiecke DAB, ABC, BCD, CDA, in welchen sie liegen, zusammenfallen. Der Satz von der hyperboloidischen Lage ihrer vier Richtungslinien und die sich daran knüpfende Construction der vierten Kraft gestaltet sich folgendermassen um. Sondern wir die Ecken A, B (Fig. 15) mit der sie verbindenden Seite AB ab, indem wir die anstossenden Seiten AD und BC durchschneiden und die Spannungen T''' und T' an A und B längs AD und BC einführen. An der unveränderlichen Linie AB halten sich sodann T''', P, Q, T' Gleichgewicht. Daher sind die Resultante von P, Q einerseits und die Resultante von T''', T' andererseits entgegengesetzt gleich und fallen mithin in die Verbindungslinie der Schnittpunkte Ω von P, Q und Σ der Seiten DA, CB. Gleiches gilt von den Kräften an der abgetrennten Seite CD. Nun halten sich aber auch P, Q, R, S wie an einem unveränderlichen System Gleichgewicht; es muss daher die Resultante von P, Q der Resultanten von R, S entgegengesetzt gleich sein und der Schnittpunkt Ω' der Richtungslinien von R, S in die Gerade $\Omega\Sigma$ fallen. Sind also die Richtungslinien von P, Q, R gegeben, wird aber die von S gesucht, so hat man nur von D nach dem Schnittpunkte Ω' von R mit der Linie $\Omega\Sigma$ eine Gerade zu ziehen. Dieselben Betrachtungen auf das andere Paar Gegenseiten AD, BC des Vierecks $ABCD$ angewandt, ergibt sich, dass der Schnittpunkt Σ' von CD, BA mit den Schnittpunkten Φ, Φ' von P, S und Q, R in gerader Linie liegt. Wir erhalten daher den Satz:

Wenn vier Kräfte P, Q, R, S an den Ecken eines einfachen ebenen veränderlichen Vierecks $ABCD$ von unveränderlichen Seiten im Gleichgewicht sind, so bilden ihre Richtungen in derselben Ordnung genommen, wie die Ecken, an welchen sie angreifen, ein jenem umschriebenes einfaches Vierseit $PQRS$ derart, dass die beiden Diagonalen $\Omega\Omega'$, $\Phi\Phi'$ des letzteren, welche die Gegenecken Ω, Ω'; Φ, Φ' ver-

binden, durch die Nebenscheitel Σ, Σ' gehen, in welchen sich die Gegenseiten AD, BC und AB, DC des ersteren schneiden.

Man kann den Inhalt dieses Satzes auch etwas anders fassen. Die aufeinanderfolgenden Ecken A, B, nämlich die 1. und 2. und der Schnittpunkt Ω der in ihnen angreifenden aufeinanderfolgenden Kräfte P, Q bilden ein Dreieck $AB\Omega$, die beiden andern Ecken D, C, nämlich die 4. und 3., bilden mit dem Schnittpunkt Ω' ihrer Kräfte R, S ein zweites Dreieck $DC\Omega'$, dessen Ecken D, C, Ω', wir den Ecken A, B, Ω zuordnen wollen. Die Verbindungslinien AD, BC, $\Omega\Omega'$ der zugeordneten Ecken schneiden sich im Punkte Σ. Ebenso bilden die Ecken B, C und der Schnittpunkt Φ' ihrer Kräfte das eine, die Ecken A, D und der Schnittpunkt Φ das andere von zwei zugeordneten Dreiecken $BC\Phi'$ und $AD\Phi$, so dass die Verbindungslinien AB, DC, $\Phi\Phi'$ in dem Punkte Σ' zusammenlaufen. Dreiecke derart heissen perspektivisch collineare Dreiecke. Man kann daher sagen:

Wenn vier Kräfte an den Ecken eines einfachen ebenen Vierecks im Gleichgewicht sind, so bilden die 1. und 2. Ecke mit dem Schnittpunkt der 1. und 2. Kraft das eine, die 4. und 3. Ecke mit dem Schnittpunkt der 4. und 3. Kraft das andere von zwei perspektivisch collinearen Dreiecken. Ebenso sind die Dreiecke gebildet aus der 2. und 3. Ecke und dem Schnittpunkt der 2. und 3. Kraft, und das Dreieck der 1. und 4. Ecke mit dem Schnittpunkt der 1. und 4. Kraft perspektivisch collinear.

Auch kann man die Figur noch folgendermassen auffassen. Die 1. Seite AB bildet mit der 1. und 2. Kraft P und Q ein Dreiseit, die dritte Seite DC bildet ebenso mit der 4. und 3. Kraft S und R ein anderes Dreiseit, dessen entsprechende Seiten AB und DC, P und S, Q und R sich in drei Punkten Σ', Φ, Φ' treffen, welche in gerader Linie liegen. Ebenso bildet die 2. Seite BC mit der 2. und 3. Kraft Q, R ein Dreiseit, entsprechend dem Dreiseit der 4. Seite und der 1. und 4. Kraft, so dass die Schnittpunkte Σ, Ω, Ω' in gerader Linie liegen (perspektivisch collineare Dreiseite). Daher:

Bei vier an den Ecken eines einfachen Vierecks angreifenden, im Gleichgewicht befindlichen Kräften bildet jedes Paar Gegenseiten mit den an ihren Endpunkten angreifenden Kräften zwei perspektivisch collineare Dreiecke.

Die beiden letzteren Auffassungen des Satzes sind nicht von einander unabhängig; es gilt nämlich der Satz:

In zwei perspektivisch collinearen Dreiecken treffen sich die homologen Seitenpaare in drei Punkten, welche in gerader Linie liegen und in zwei perspektivisch collinearen Dreiseiten laufen die Verbindungslinien homologer Ecken in einen Punkt zusammen; oder perspektivisch collineare Dreiecke sind stets auch perspektivisch collineare Dreiseite und umgekehrt. (S. Steiner, systemat. Entwickelung etc., I, S. 78).

Aehnlich, wie das Gleichgewicht von 4 Kräften an den Ecken des veränderlichen Vierecks, kann das Gleichgewicht von Kräften an den Ecken von veränderlichen Fünfecken, Sechsecken etc. untersucht werden. Auf den Zusammenhang dieser Untersuchungen mit Sätzen der neueren synthetischen Geometrie soll hier ganz besonders aufmerksam gemacht werden.

§. 6. Gleichgewicht von Kräften, welche in Punkten der Seiten eines einfachen Vierecks von unveränderlichen Seiten angreifen.

Vier Kräfte P, Q, R, S greifen an den Punkten F, G, H, J der Seiten eines einfachen Vierecks $ABCD$ (Fig. 16) an, dessen Seiten unveränderlich, dessen Winkel aber veränderlich sind; man soll die Bedingungen des Gleichgewichts aufstellen.

Löst man die Verbindung der Seiten in A, so sind statt dessen zwei entgegengesetzt gleiche Pressungen T längs einer gewissen Richtung NK einzuführen; ähnlich an B, C, D solche Kräfte T', T'', T''' längs KL, LM, MN. An der Seite AB müssen dann T, T', P im Gleichgewichte sein und daher KN und KL sich auf der Richtung von P schneiden. Ebenso folgt, dass die Schnittpunkte L, M, N in die Richtungen der Kräfte Q, R, S fallen müssen.

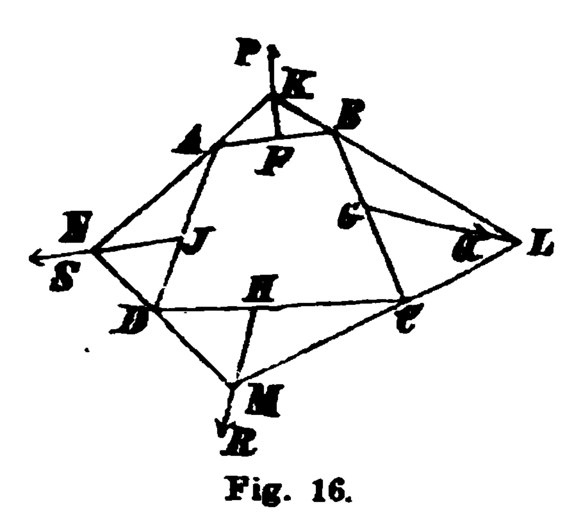


Fig. 16.

Zum Gleichgewichte der vier Kräfte wird also erfordert, dass es möglich sei, ein Vierseit $KLMN$ zu construiren, welches dem Viereck $ABCD$ umschrieben und dem Vierseit der Kräfte zugleich eingeschrieben sei, dessen Seiten also durch die Ecken des ersteren gehen und dessen Ecken in den Seiten des letzteren liegen.

Zugleich müssen die Richtungslinien der vier Kräfte P, Q, R, S derselben Schaar eines Hyperboloids angehören, auf welchem also auch die vier Angriffspunkte F, G, H, J liegen.

Ist das Viereck eben, so hat die Auffindung des Vierseits $KLMN$ keine Schwierigkeiten und wurde diese Aufgabe, sowie die allgemeinere, das Vieleck betreffend, zuerst von Servais, Gergonne und Lhuilier (in Gergonne's *Annales de mathématiques*, T. II), später von Steiner (Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, S. 94) mit Hülfe von projectivischen Punktreihen gelöst. Die Lösung hängt von den Doppelpunkten zweier vereinigter projectivischer Punktreihen ab und ist eine doppelte oder einfache oder unmöglich, je nachdem diese Reihen zwei, einen oder keinen Doppelpunkt besitzen.

Die Pressungen T ergeben sich, indem man P, Q, R, S an den Ecken K, L, M, N zerlegt nach den Seiten des umschriebenen Vierecks. Da dieselben sich paarweise tilgen, so folgt, dass die Kräfte P, Q, R, S an dem Vierecke $KLMN$ im Gleichgewichte sein müssen, wenn dessen Seiten unveränderlich, die Winkel aber veränderlich gedacht werden. Hierdurch ist die Aufgabe auf die von §. 5 zurückgeführt. Diese Reduction ist auch noch auf eine andere Art möglich, nämlich dadurch, dass man die Kraft P in zwei ihr parallele Kräfte auflöst, welche in A und B angreifen, ebenso Q in zwei Parallelkräfte an den Punkten B und C, R in zwei desgleichen an C und D, S in zwei solche an D und A und hierauf je zwei dieser Kräfte, welche an einer Ecke A, B, C, D angreifen, zu einer Kraft vereinigt.

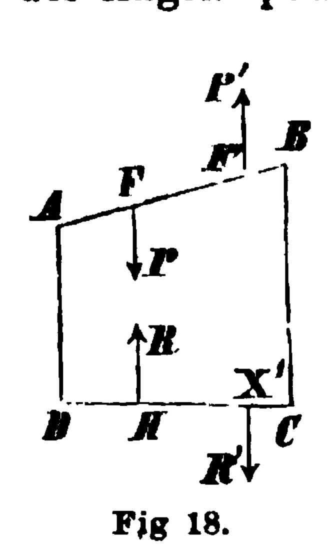
Wirken an dem Viereck $ABCD$ (Fig. 17) nur die beiden Kräfte P, R in den Punkten F, H zweier Gegenseiten, d. h. sind Q und S Null, so halten die Pressungen T, T''' an D, A sich allein Gleichgewicht, sind also entgegengesetzt gleich und fallen in die Richtung der Seite DA. Ebenso T', T'' längs BC. Daher muss sowohl P, welches mit T, T' an AB, als auch R, welches

mit T'', T''' an CD Gleichgewicht hält, durch den Schnittpunkt Σ von AD und CB gehen. P und R müssen aber auch am Viereck, wie an einer unveränderlichen Figur Gleichgewicht halten, also entgegengesetzt gleich sein. Die Verbindungslinie der Angriffspunkte F, H geht durch Σ. Das Viereck muss eben sein.

Fig. 17.

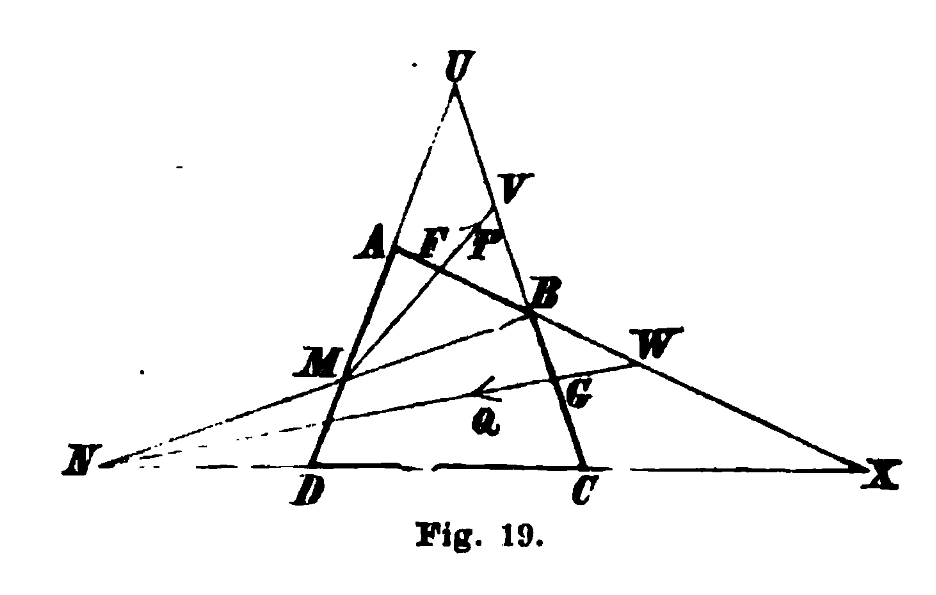
Ist CD fest und wirkt blos P, so folgt, dass nur dann Gleichgewicht besteht, wenn das Viereck eben ist und die Richtung von P durch den Schnittpunkt Σ der beweglichen Seiten BC, DA hindurchgeht. Die Punkte A, B sind in der Ebene auf Kreisen um D und C beweglich und beschreibt F eine Schleifenlinie (B. I, S. 233); Σ ist das Momentancentrum für die Beweglichkeit des Systems, ΣF ist die Normale der Schleifenlinie. Die Bedingung des Gleichgewichtes kommt also mit der Bedingung überein, dass der Punkt F auf der Schleifenlinie in einer Gleichgewichtslage sich befinden muss.

Sind BC, DA parallel (Fig. 18), so müssen auch FH, die Verbindungslinie der Angriffspunkte der Kräfte P, R und diese selbst mit ihnen parallel sein. Zwei andere Kräfte P', R', welche längs einer weiteren Parallelen $F'H'$ zu BC wirken und P, R entgegengesetzt gleich sind, halten ebenfalls Gleichgewicht. Daher sind auch die Paare (P, P'), (R, R') im Gleichgewicht. Das Paar (P, P') ist mit den beiden Pressungen in A und B im Gleichgewicht und bleibt es nach einer beliebigen Lagenänderung in seiner Ebene; ebenso (R, R'). Hieraus folgt, dass an einem Trapeze mit constanten Seiten, aber veränderlichen Winkeln zwei Kräftepaare sich unter denselben Bedingungen wie an einem unveränderlichen System Gleichgewicht halten.


Fig 18.

Es sei eine Ecke D eines veränderlichen Vierecks $ABCD$ (Fig. 19) von constanten Seiten, aber veränderlichen Winkeln fest; auf die Punkte F, G der ihr nicht anliegenden Seiten AB, BC wirken die Kräfte P, Q; man soll die Bedingungen ihres Gleichgewichts aufstellen.

Trennt man die Seiten des Vierecks in den Ecken von einander ab, so müssen, da an DA keine weitere Kraft wirkt, die Pressungen der Linie DA in D und A sich Gleichgewicht halten, also längs DA entgegengesetzt gleich sein. Daher fällt auch die Pressung in A für AB in DA. Sie, die Pressung für AB in B und die Kraft P halten sich an AB Gleichgewicht; daher schneiden sich die beiden letzteren in einem Punkte M auf DA. Die Pressung in B für BC fällt mithin in BM, die Pressung in C aber fällt in DC, weil die Pressungen in D und C an DC in DC fallen. Es müssen daher die Pressungen der Linie BC in B und C mit Q Gleichgewicht halten und sich also alle drei Kräfte in dem Schnittpunkte N von BM mit DC treffen. Hieraus folgen als Gleichgewichtsbedingungen, dass das Viereck eben sein muss, dass P und Q in seine Ebene fallen und ihre Schnitt-


Fig. 19.

punkte M, N mit den dem festen Punkte anliegenden Seiten und die ihm gegenüberliegende Ecke B in gerader Linie liegen müssen. Ist die Gestalt des Vierecks und die Richtung von P gegeben, so ergibt sich die Richtung von Q; kennt man die Intensität von P, so ergibt sich die von Q, indem man P nach MA und MB, Q nach NB und CN zerlegt denkt; die in MB fallenden Componenten müssen sich tilgen. Sind T, $-T$ diese beiden Kräfte, so hat man:

$$P : T = \sin AMB : \sin AMF = \frac{AB}{BM} : \frac{AF}{FM},$$

$$Q : (-T) = \sin BNC : \sin GNC = \frac{BC}{BN} : \frac{CG}{GN},$$

mithin

$$P : Q = -\left(\frac{AB}{BM} : \frac{AF}{FM}\right) : \left(\frac{BC}{BN} : \frac{CG}{GN}\right).$$

Schneiden sich BC, DA in U; AB, DC in X und treffen die Kräfte P und Q die Seiten BC, AB in V, W, so hat man in ähnlicher Weise

$$P : T = \frac{UB}{BM} : \frac{UV}{VM}, \qquad Q : (-T) = \frac{XB}{BN} : \frac{XW}{WN},$$

$$P : Q = -\left(\frac{UB}{MB} : \frac{UV}{VM}\right) : \left(\frac{XB}{BN} : \frac{XW}{WN}\right).$$

Für das Parallelogramm rücken U und X ins Unendliche und reducirt sich wegen $UB : UV = 1$, $XB : XW = 1$ die letzte Gleichung auf

$$P : Q = -\frac{VM}{MB} : \frac{WN}{NB}.$$

Fällt M in D, d. h. geht die eine Kraft P durch den festen Punkt, so fällt auch N in D und geht auch die andere Kraft Q durch denselben Punkt. Ist das Viereck zugleich ein Parallelogramm, so bleibt

$$P : Q = -VD : WD$$

und da $DV : DC = \sin C : \sin V$, $DW : DA = \sin A : \sin W$, so wird

$$P \cdot BC \sin (P, BC) + Q \cdot AB \sin (Q, AB) = 0.$$

§. 7. Die Kette. Ein System von Körpern, von denen in bestimmter Ordnung jeder mit dem folgenden verbunden ist, ohne dass die relative Beweglichkeit beider aufgehoben ist, heisst eine Kette; die Körper, welche sie bilden, ihre Glieder. Die Kette ist geschlossen, wenn der letzte Körper mit dem ersten verbunden ist. Hinsichtlich der relativen Beweglichkeit der mit einander in Berührung stehenden Glieder finden Unterschiede hinsichtlich des Freiheitsgrades und hinsichtlich der besonderen Arten der Beweglichkeit statt. Es kann z. B. sein, dass die relative Bewegung zweier aufeinanderfolgender Glieder eine relative Windungsbewegung oder blos eine Rotationsbewegung um eine bestimmte Axe ist, wohl aber auch, dass diese Axe selbst ihrer Lage nach einen mehr oder weniger ausgedehnten Spielraum hat. Die bisher betrachteten Vielecke sind Ketten; ein specieller Fall, welcher im Nachfolgenden besondere Behandlung erfahren wird, ist der, dass sämmtliche Glieder der Kette verschwindend klein und ihre Anzahl unendlich gross angenommen wird; die Kette ist dann ein biegsamer Faden.

Eine Kette bestehe aus n Gliedern G_1, G_2, ... G_n, welche endliche Dimensionen besitzen und aufeinanderfolgend blos in je einem Punkte berührend mit-

einander verbunden sind, wie z. B. bei einer gewöhnlichen aus Ringen gebildeten Kette. An G_1 und G_n wirken zwei Kräfte P und Q, es sollen die Gleichgewichtsbedingungen für sie angegeben werden. Sind B_1, B_2, B_3, ... B_{n-1} die Berührungspunkte der Glieder, T_1, T_2, T_3, ... T_{n-1} die Intensitäten der in den Berührungspunkten anzubringenden Spannungen oder Pressungen, so halten P und $-T_1$, T_1 und $-T_2$, T_2 und $-T_3$, ... T_n und Q Gleichgewicht, sind folglich entgegengesetzt gleich. Hieraus folgt, dass zum Gleichgewicht erforderlich und hinreichend ist, dass sämmtliche Berührungspunkte in gerader Linie liegen und dass P und Q einander entgegengesetzt gleich sind. Die Spannungen sind alle einander gleich und gleich P oder Q. Das Gleichgewicht ist hinsichtlich seiner Beständigkeit sicher oder unsicher, je nachdem die Kräfte P und Q ziehend oder drückend wirken. Die Unsicherheit des Gleichgewichts ist um so grösser, je mehr Glieder die Kette hat, weil das Ausgleiten eines einzelnen Gliedes zur Störung desselben hinreicht. Bei einem biegsamen Faden ist bei drückend wirkenden Kräften die Unsicherheit des Gleichgewichts unendlich gross, man betrachtet daher das Gleichgewicht bei einem solchen gewöhnlich nur im Falle von Zugkräften als überhaupt möglich, obgleich dies streng genommen nicht vollkommen exact ist und sagt: Der biegsame, bloss durch zwei Endkräfte gespannte Faden bildet im Falle des Gleichgewichts eine Gerade, in welche die Endkräfte fallen und ziehend wirken. Die Spannung des Fadens ist in allen Punkten gleich und gleich den Endkräften.

§. 8. Das Seil- oder Kettenpolygon. Eine vollkommen biegsame, nicht dehnbare Linie (Faden, Seil), an welchem in bestimmten Punkten K_1, K_2, K_3, ... K_n Kräfte P_1, P_2, P_3, ... P_n wirken (Fig. 20), heisst ein Seil- oder Kettenpolygon und die Punkte K sind seine Knoten. Wenn dies System unter Ein-

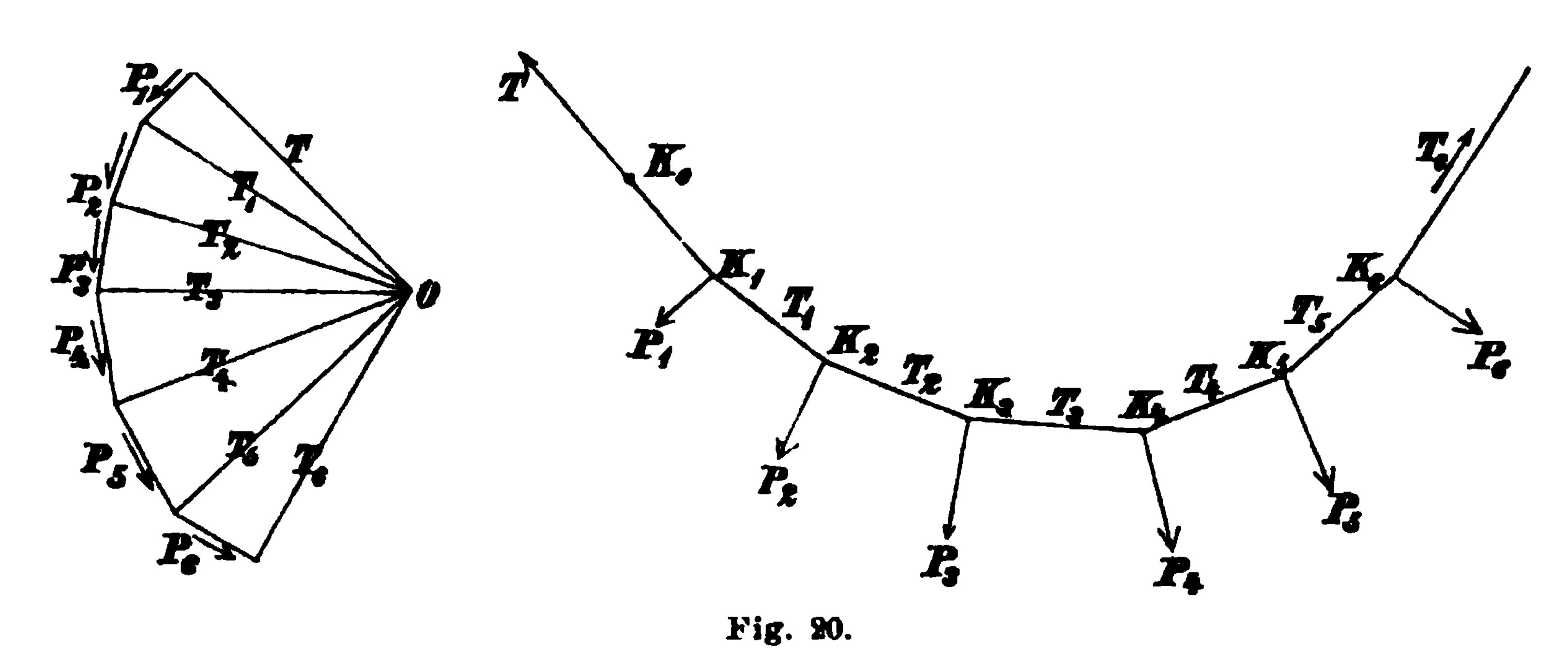


Fig. 20.

wirkung der Kräfte P eine Gleichgewichtsfigur annimmt, die im Uebrigen, je nach Beschaffenheit der Kräfte, eben oder windschief sein kann, so ist jede Seite gespannt und wenn sie durchschnitten wird, so sind zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte erforderlich, um das gestörte Gleichgewicht herzustellen. Nach Einführung dieser Spannungen besteht an jedem Knoten K zwischen der Kraft P und den beiden Spannungen Gleichgewicht. Diese Spannungen seien ihrer Intensität nach zwischen K_1 und K_2 gleich T_1, zwischen K_2 und K_3 gleich T_2, ... an K_n gleich T_n längs der Schlussseite $K_n K_{n+1}$ und an K_0, längs der Anfangseite $K_1 K_0$ des Polygons wirkend, gleich T.

Das Gleichgewicht der Kraft P_i am Knoten K_i und der Spannungen $-T_{i-1}$ und T_i längs den Seilstücken $K_i K_{i-1}$ und $K_i K_{i+1}$ erfordert nun, dass die Kraft P_i in die Ebene dieser beiden Seiten falle und dass jede der drei Kräfte dem Sinus des von den beiden anderen eingeschlossenen Winkels proportional sei. In Folge dessen bestehen die Gleichungen

$$\frac{T}{\sin P_1 K_1 K_2} = \frac{T_1}{\sin P_1 K_1 K_0} = \frac{P_1}{\sin K_0 K_1 K_2}$$

$$\frac{T_1}{\sin P_2 K_2 K_3} = \frac{T_2}{\sin P_2 K_2 K_1} = \frac{P_2}{\sin K_1 K_2 K_3}$$

$$\frac{T_2}{\sin P_3 K_3 K_4} = \frac{T_3}{\sin P_3 K_3 K_2} = \frac{P_3}{\sin K_2 K_3 K_4}$$

$$\vdots$$

$$\frac{T_{n-1}}{\sin P_n K_n K_{n+1}} = \frac{T_n}{\sin P_n K_n K_{n-1}} = \frac{P_n}{\sin K_{n-1} K_n K_{n+1}}.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man, indem man sie gruppenweise miteinander verbindet, die Verhältnisse der Spannungen T und der Kräfte P. Ist das Polygon geschlossen, so ist $T_n = -T$ und tritt zu den Gleichungen noch die weitere hinzu, welche für die Winkelsumme des Polygons besteht. Ist das Polygon offen, so spielen die Endspannungen dieselbe Rolle, wie Kräfte P.

Sind ausser den Kräften P und ihren Richtungen noch die Endspannung T und ihre Richtung sowie die Seitenlängen gegeben, so kann die Gleichgewichtsform des Polygons durch folgende Construction gefunden werden. Man ziehe die Richtung von T und nehme die Lage des ersten Knotens K_1 auf ihr willkürlich an, trage die Kraft P_1 an K_1 in ihrer Richtung an und suche die Resultante von T und P_1; sie gibt die Richtung der Seite $K_1 K_2$ und hiermit ist die Lage des zweiten Knotens gefunden nebst der Spannung $-T_1$, die an ihm im Sinne $K_2 K_1$ wirkt. Aus T_1 und der Kraft P_2 an K_2 suche man die Resultante T_2, hierdurch ergibt sich die Lage des dritten Knotens K_3 nebst der längs $K_3 K_2$ wirkenden Spannung $-T_2$ u. s. f. — Die Construction wird wesentlich erleichtert, indem man sich von irgend einem Punkte O des Raumes aus das Kräftepolygon (P) construirt, nämlich so, dass man von O aus in der gegebenen Richtung die Endkraft T aufträgt, daran die Kraft P_1 in ihrer Richtung fügt, hieran P_2, dann P_3 u. s. f. Die von O nach den Endpunkten von P_1, P_2, P_3, ... P_n hinführenden Diagonalen stellen nach Grösse und Richtung die Resultanten von T, P_1 oder T_1; von T_1, P_2 oder T_2; von T_2, P_3 oder T_3, u. s. f., also sämmtliche Spannungen dar. Man braucht also nur Parallellinien mit T, T_1, T_2, ... T_n zu ziehen und auf ihnen die bestimmten Seitenlängen $K_1 K_2$, $K_2 K_3$, u. s. f. aufzutragen, um die Gleichgewichtsform des Polygons zu erhalten. Das Kräftepolygon zeigt zugleich, dass sämmtliche Kräfte P nebst den Endkräften T, T_n an einen Punkt verlegt sich Gleichgewicht halten müssen.

Wenn die Kräfte P die Polygonwinkel $TK_1 K_2$, $K_1 K_2 K_3$, $K_2 K_3 K_4$, ... halbiren, so werden die Kräfteparallelogramme an den Knoten sämmtlich Rhomben, die Spannungen alle gleich und gleich den Endspannungen. In den obigen Gleichungen werden die Winkel $P_1 K_1 K_0 = P_1 K_1 K_2$, $P_2 K_2 K_1 = P_2 K_2 K_3$, $P_3 K_3 K_2 = P_3 K_3 K_4$, u. s. f., nämlich gleich den Supplementen der halben Polygonwinkel $K_0 K_1 K_2$, $K_1 K_2 K_3$, ... Daher erhält man noch vermöge

$\sin P_1K_1K_0 = \sin P_1K_1K_2 = \sin \frac{1}{2}K_0K_1K_2, \quad \sin P_2K_2K_1 = \sin P_2K_2K_3 = \sin \frac{1}{2}K_1K_2K_3 \ldots$

$$\frac{P_1}{\cos\frac{1}{2}(TK_1K_2)} = \frac{P_2}{\cos\frac{1}{2}(K_1K_2K_3)} = \frac{P_3}{\cos\frac{1}{2}(K_2K_3K_4)} = \cdots = \frac{P_n}{\cos\frac{1}{2}(K_{n-1}K_nK_{n+1})}.$$

d. h. es müssen die Kräfte den Cosinussen der halben Polygonwinkel proportional sein.

Die Kräfte P nebst den Endspannungen T, T_n müssen die Bedingungen des Gleichgewichts wie an einem unveränderlichen System erfüllen; wenn man sie daher für irgend einen Punkt reducirt, so muss ihre Resultante und ihr resultirendes Paar verschwinden. Dasselbe gilt für jede beliebige abgetrennte Parthie des Polygons. Schneiden sich nun die Richtungen der Endspannungen einer solchen Parthie (oder auch des ganzen Polygons) in einem Punkte und wählt man diesen zum Reductionspunkte, so sieht man, dass die betreffenden Endspannungen mit der Resultanten aller Kräfte P der abgetrennten Parthie des Systems an jenem Punkte Gleichgewicht halten müssen. Nimmt man daher diese Resultante in entgegengesetztem Sinne und zerlegt sie nach den Richtungen der Endspannungen, so erhält man diese selbst; insbesondere kann man diese Methode benutzen, wenn die Endspannungen durch feste Punkte ersetzt werden sollen, um die Widerstände zu finden, welche diese leisten müssen.

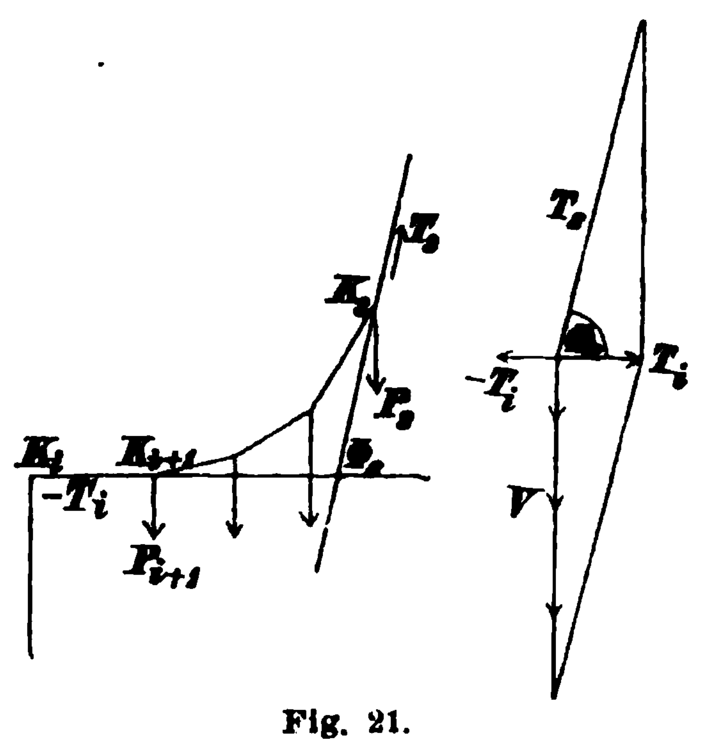


Fig. 21.

Da drei Kräfte, welche an einem Punkte im Gleichgewichte sind, immer in einer Ebene liegen, so folgt, dass, wenn die Richtungen der Kräfte P sämmtlich einer Ebene parallel sind, das Polygon eben ist. Dies findet insbesondere statt, wenn die Kräfte P parallel sind. Findet sich in diesem Falle eine Polygonseite vor, welche zu der Richtung der Kräfte senkrecht ist, so lassen sich die Spannungen besonders einfach ausdrücken. Ist K_iK_{i+1} (Fig. 21) die Seite, welche diese Eigenschaft besitzt und T_i ihre Spannung, so bringe man sie mit der Seite K_sK_{s+1}, deren Spannung T_s man sucht, zum Durchschnitt und brauche diesen zum Reductionspunkte O der Kräfte. Ist V_s die Resultante der Kräfte P von K_{i+1} bis K_s, also $V_s = P_{i+1} + P_{i+2} + \cdots P_s$, so liefert das Parallelogramm der Kräfte $T_s^2 = T_i^2 + V_s^2$ und für die Neigung φ_s der Seite K_sK_{s+1} gegen K_iK_{i+1}:

$$\operatorname{tg}\varphi_s = \frac{V_s}{T_i}.$$

Die Summe der Momente aller an einem beliebigen Polygonstück angreifenden Kräfte in Bezug auf den Endpunkt desselben ist Null. Denn das Gleichgewicht besteht fort, wenn das Polygonstück erstarrt und das Moment der durch das Abtrennen desselben nöthigen Spannung in Bezug auf den Schlusspunkt des Stücks ist Null.

§. 9. Das parabolische Kettenpolygon.

Wir wollen den speciellen Fall der Parallelkräfte am Seilpolygon weiter verfolgen, dass alle Parallelkräfte einander gleich sind und ihre Richtungen aufeinanderfolgend gleichen Normalabstand haben. Das Polygon der Kräfte (Fig. 22)

geht in diesem Falle in eine Dreiecksform über, auf deren einer, dem Reductionspunkt O gegenüberliegenden Seite die Kräfte P sich summiren, während die beiden anderen Seiten die Endspannungen darstellen. Sämmtliche Ecken des Polygons liegen in diesem Falle auf einer Parabel. Nehmen wir nämlich auf der Richtung der Endspannung T (Fig. 22) den Punkt A so an, dass eine durch ihn zu der Richtung der Kräfte parallel gelegte Gerade von der Richtung der ersten Kraft um den halben Normalabstand entfernt ist. Diese Gerade sei die Y-Axe und die Richtung von T die x-Axe, positiv im Sinne Ak_2 genommen, parallel zu welcher Linie wir auf den Kraftrichtungen die Punkte $k_2, k_3, k_4, \ldots$ bestimmen. Die Figur $OTP_1P_2\ldots$ des Kräftepolygons schneiden wir mit einer Geraden parallel $TP_1P_2\ldots$ in einem Abstande von O gleich dem Normalabstande der Kräfte. Dieselbe liefert die Dreiecke $Ott_1, Ott_2, Ott_3, \ldots$, welche den Dreiecken $K_1k_2K_2$, $K_2k_3K_3$, $K_3k_4K_4, \ldots$ congruent sind. Wird $AK_1 = \frac{1}{2}\,Ot = a$, sowie $tt_1 = b$ gesetzt, wodurch $tt_2 = 2b$, $tt_3 = 3b, \ldots$ wird, so erhält man für die Abscissen der Ecken des Polygons $K_1K_2K_3, \ldots$

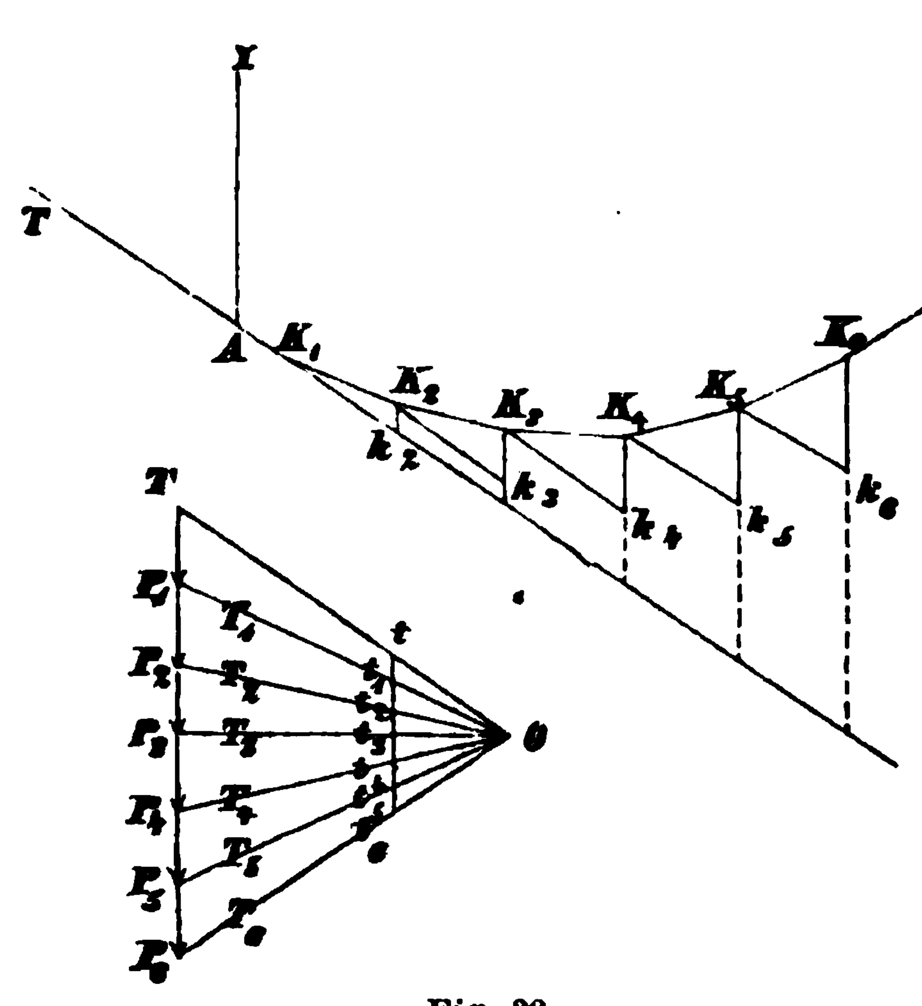


Fig. 22.

$$x_1 = \tfrac{1}{2}a,\quad x_2 = \tfrac{3}{2}a,\quad x_3 = \tfrac{5}{2}a,\ \ldots\ldots\ x_i = \tfrac{1}{2}(2i-1)\,a,$$

sowie für die Ordinaten derselben:

$$y_1 = 0,\ y_2 = b,\ y_3 = 3b,\ x_4 = 6b, \ldots y_i = b + 2b + \cdots + (i-1)\,b = \tfrac{1}{2}i\,(i-1)\,b.$$

Eliminirt man nun aus den Coordinaten eines beliebigen Punktes K_i nämlich

$$x_i = \tfrac{1}{2}(2i-1)\,a,\ y_i = \tfrac{1}{2}i\,(i-1)\,b$$

den Index i, so erhält man die Gleichung, welche für alle gilt, in x_i, y_i, d. h. die Gleichung der Curve, auf welcher alle liegen. Sind x, y laufende Coordinaten dieser Curve, so ist die Gleichung derselben:

$$x^2 = \frac{2a^2}{b}\left(y + \frac{b}{8}\right).$$

Für $x = 0$ wird $y = -\frac{b}{8}$. Verschiebt man daher den Ursprung A in der Richtung der negativen y um $\frac{b}{8}$, so wird die Gleichung $x^2 = \frac{2a^2}{b}\,y$. Sie drückt eine Parabel aus, bezogen auf die Tangente im Ursprunge und die Richtung der Hauptaxe, welche durch ihn hindurchgeht. Demnach liegen sämmtliche Ecken des Polygons auf einer Parabel, deren Hauptaxe der Richtung der Kräfte parallel ist. Ist unter den Seiten eine zur Kraftrichtung normal, so geht die Hauptaxe der Parabel durch deren Mitte.

Für ein Kettenpolygon (Fig. 23) mit mittlerer horizontaler Seite, in dessen Knoten gleiche Gewichte P in gleichen Abständen angreifen, sei h die Höhe OO' des halben Bogens, $2b$ die Spannweite 2. $O'A$ und $2n+1$ die Anzahl der Seiten, sodass auf jeder Seite des Mittelgliedes deren n liegen. Wird der Abstand zweier aufeinanderfolgender Kraftrichtungen gleich a gesetzt, so ist

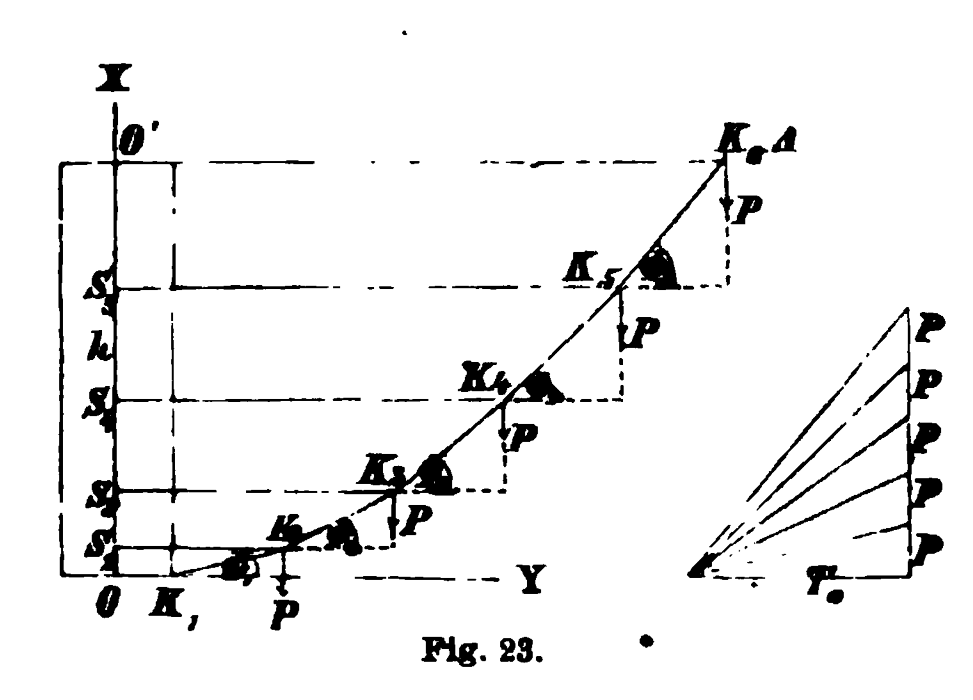


Fig. 23.

$$(2n+1)\,a = 2b.$$

Es sollen nun gefunden werden: für OO' und OY als Axen der x, y die Coordinaten $x_i = O\,S_i$, $y_i = S_i K_i$ der Knoten, die Neigungen φ_i der Glieder gegen die Horizontale, die Längen $l_i = K_i K_{i+1}$ der Glieder, die Horizontalspannung T_0 (Spannung im horizontalen Mittelgliede), die Spannung T_i der Glieder $K_i K_{i+1}$ und die Gleichung der Parabel, auf welcher die Ecken liegen.

Man hat $x_i - x_{i-1} = a \operatorname{tg} \varphi_{i-1}$, $y_i - y_{i-1} = a$ und mit Hülfe der Nebenfigur $\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{iP}{T_0}$.

Setzt man in den zwei ersten dieser Gleichungen $i-1$, $i-2$, ... 3, 2 für i und addirt die sich ergebenden Reihen, so folgt wegen $x_1 = 0$, $y_1 = \frac{1}{2}a$:

$$x_i = \tfrac{1}{2}\,i\,(i-1)\,a\,\frac{P}{T_0}, \quad y_i = (i - \tfrac{1}{2})\,a.$$

Eliminirt man hieraus den Index i, so folgt:

$$y_i^2 = \frac{2aT_0}{P}\left(x_i + \frac{1}{8}\,\frac{aP}{T_0}\right),$$

oder wenn man den Ursprung des Coordinatensystems in der Richtung der y um $-\frac{1}{8}\,\frac{aP}{T_0}$ verlegt,

$$y_i^2 = \frac{2aT_0}{P}\,x_i.$$

Es liegen demnach sämmtliche Knoten auf der Parabel $y^2 = \frac{2aT_0}{P}\,x$, deren halber Parameter $p = \frac{aT_0}{P}$ ist.

Um die Horizontalspannung T_0 zu finden, hat man in der Gleichung für x_i die Abscisse $x_{n+1} = h$ einzusetzen und erhält

$$h = \tfrac{1}{2}\,n\,(n+1)\,\frac{aP}{T_0}$$

und hieraus

$$T_0 = \tfrac{1}{2}\,n\,(n+1)\,\frac{aP}{h}, \text{ sowie } p = \tfrac{1}{2}\,n(n+1)\,\frac{a^2}{h}$$

oder, wenn man die Spannweite $2b = (2n+1)\,a$ einführt:

$$T_0 = \frac{n(n+1)}{2n+1}\cdot\frac{b}{h}\,P, \quad 2p = \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2}\cdot\frac{4b^2}{h}.$$

Die Länge der Kettenglieder ist

$$l_i = \frac{a}{\cos\varphi_i} = a\left[1 + \left(\frac{iP}{T_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = a\left[1 + \frac{(2n+1)^2 i^2}{n^2(n+1)^2}\frac{h^2}{b^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

die Spannungen T_i ergeben sich aus der Formel

$$T_i^2 = T_0^2 + (iP)^2 = \left[\left(\frac{n(n+1)}{2n+1}\cdot\frac{b}{h}\right)^2 + i^2\right]P^2.$$

Setzt man die ganze Belastung des Bogens, nämlich $2nP = G$, so wird, wenn man hiemit P eliminirt:

$$T_0 = \frac{1}{4}\frac{n+1}{2n+1}\cdot\frac{b}{h}G, \quad 2p = \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2}\cdot\frac{4b^2}{h}.$$

Hiemit erhält man für $n = \infty$, d. h. wenn bei derselben Gesammtbelastung a und P immer kleiner werden und der Bogen selbst in eine Parabel übergeht, deren Scheitel O wird, die Horizontalspannung, den Parameter und die Gleichung des Parabelbogens:

$$T_0 = \frac{1}{8}\frac{b}{h}G, \quad 2p = \frac{b^2}{h}, \quad y^2 = \frac{b^2}{h}x.$$

Zieht man von O nach dem Endpunkte A des Bogens die Gerade OA und errichtet in A auf sie ein Perpendikel, so schneidet dasselbe die Axe OO' in einem Punkte P, so dass $O'P = 2p$ wird.

§. 10. Das schwere Kettenpolygon mit gleichen Gliedern.

Für ein Kettenpolygon mit tiefster horizontaler Seite, in dessen Knoten gleiche Gewichte P angreifen, dessen Seiten gleiche Länge a besitzen, hat man, wenn die Horizontale von O, umgekehrt wie in Fig. 23, als Axe der x, die Verticale von O, positiv aufwärts gerechnet, als Axe der y angesehen wird:

/ f12.

$$x_{i+1} - x_i = a\cos\varphi_i, \; y_{i+1} - y_i = a\sin\varphi_i, \; \operatorname{tg}\varphi_i = \frac{iP}{T_0}, \; T_i^2 = T_0^2 + (iP)^2.$$

Für die Summation der beiden ersten Gleichungen ist $x_1 = \frac{1}{2}a$, $y_1 = 0$; man erhält

$$x_i = \tfrac{1}{2}a + \Sigma a\cos\varphi_{i-1}, \quad y_i = \Sigma a\sin\varphi_{i-1},$$

$$\cos\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{iP}{T_0}\right)^2}}, \quad \sin\varphi_i = \frac{\frac{iP}{T_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{iP}{T_0}\right)^2}}.$$

Für die Horizontalspannung erhält man, wenn der Bogen rechts und links vom tiefsten Gliede n Glieder hat und h die Höhe derselben ist

$$y_{n+1} = h = \Sigma a\sin\varphi_n.$$

Es sei G das Gewicht der ganzen Belastung des Bogens, also $2nP = G$. Wir wollen unter Festhaltung dieses Werthes die Grösse a ohne Ende abnehmen, die Zahl n aber ohne Ende zunehmen lassen. Die Belastung vertheilt sich alsdann continuirlich über den Bogen und geht dieser in eine gewisse Curve über, die wir bestimmen wollen. Da a hierbei als Increment des Bogens erscheint, so können wir die obigen Gleichungen schreiben:

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{iP}{T_0}\right)^2}}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{\frac{iP}{T_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{iP}{T_0}\right)^2}}.$$

Bei dem Grenzenübergange stellt iP die Belastung (das Gewicht) des Bogens s dar, dessen Endpunkt die Coordinaten x, y hat. Bezeichnen wir also, da die Belastung continuirlich gleichförmig erfolgt, das Gewicht der Längeneinheit des Bogens mit p, so ist iP in der Grenze gleich sp und gehen die beiden Gleichungen über in

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{p}{T_0} s\right)^2}}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\frac{p}{T_0} s}{\sqrt{1 + \left(\frac{p}{T_0} s\right)^2}},$$

aus denen x und y als Functionen von s folgen, nämlich mit Rücksicht darauf, dass x und y mit s verschwinden

$$x = \frac{T_0}{p}\, l\left(\frac{p}{T_0} s + \sqrt{1 + \left(\frac{p}{T_0} s\right)^2}\right), \quad y + \frac{T_0}{p} = \frac{T_0}{p}\sqrt{1 + \left(\frac{p}{T_0} s\right)^2}.$$

Verlegen wir aber den Ursprung im Sinne der y um $\frac{T_0}{p}$, d. h. setzen wir y für $y + \frac{T_0}{p}$, so werden diese Gleichungen nach einfacher Umformung

$$e^{\frac{p}{T_0} x} = \frac{p}{T_0} s + \sqrt{1 + \left(\frac{p}{T_0} s\right)^2}, \quad \frac{p}{T_0} y = \sqrt{1 + \left(\frac{p}{T_0} s\right)^2}.$$

Setzen wir $\frac{T_0}{p} = \alpha$, d. h. $T_0 = \alpha p$, so stellt α eine Länge dar, deren Gewicht, von derselben Belastung gedacht wie der Curvenbogen, gleich der Horizontalspannung ist. Diese Länge, um welche der Ursprung verlegt wurde, heisst der Parameter unsrer Curve. Mit seiner Hülfe gehen die Gleichungen über in

$$e^{\frac{x}{\alpha}} = \frac{s}{\alpha} + \sqrt{1 + \left(\frac{s}{\alpha}\right)^2}, \quad \frac{y}{\alpha} = \sqrt{1 + \left(\frac{s}{\alpha}\right)^2}.$$

Da

$$\left(\frac{s}{\alpha} + \sqrt{1 + \left(\frac{s}{\alpha}\right)^2}\right)\left(\frac{s}{\alpha} - \sqrt{1 + \left(\frac{s}{\alpha}\right)^2}\right) = -1$$

ist, so folgt

$$-e^{-\frac{x}{\alpha}} = \frac{s}{\alpha} - \sqrt{1 + \left(\frac{s}{\alpha}\right)^2}.$$

Hiermit wird

$$e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}} = 2\sqrt{1 + \left(\frac{s}{\alpha}\right)^2} \quad \text{und} \quad e^{\frac{x}{\alpha}} - e^{-\frac{x}{\alpha}} = 2\frac{s}{\alpha},$$

woraus zugleich die Ordinate y und die Bogenlänge der Curve als Functionen von x folgen, nämlich:

$$y = \tfrac{1}{2}\alpha\left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}}\right), \quad s = \tfrac{1}{2}\alpha\left(e^{\frac{x}{\alpha}} - e^{-\frac{x}{\alpha}}\right).$$

Die Curve heisst die Kettenlinie. Sie stellt die Gleichgewichtsfigur eines homogenen, schweren, vollkommen biegsamen Fadens dar und wurde von Galilei gefunden. Wir werden später von ihr ausführlicher handeln. (Vgl. Gretschel, Elementare Ableitung der Haupteigenschaften der Kettenlinien. Grunert's Archiv Thl. 43, S. 121.)

§. 11. **Das Seilpolygon mit beweglichen Ecken.**

Wir haben bisher angenommen, dass die Angriffspunkte der Kräfte bestimmte Punkte des Seiles (Knoten) seien. Es kommt aber vor, dass dieselben längs des Seiles verschiebbar sind; dies tritt ein, wenn die Kräfte vermittelst Ringen an demselben wirken, welche auf ihm hingleiten können (Fig. 24). Nehmen wir den einfachsten Fall, dass ein Seil von zwei Kräften T, T' gehalten wird und dass die Kraft P an dem Ringe wirkend Gleichgewicht mit T, T' herbeiführt. Das Gleichgewicht wird nicht beeinträchtigt, wenn die Angriffspunkte der Kräfte T, T' fest gedacht werden. Da der Ring K auf dem Seile gleiten kann, so kann er wegen der Undehnbarkeit desselben nur solche Lagen annehmen, für welche die Summe der Radienvectoren $AK + BK$ constant bleibt; daher ist K auf die Fläche eines Rotationsellipsoids um AB als Axe mit A und B als Brennpunkten beschränkt. Daher können wir das Seil hinwegdenken und annehmen, am Punkte K, welcher auf dieser Fläche zu bleiben gezwungen ist, wirke eine Kraft P und befinde sich derselbe im Gleichgewicht. Dies ist nur möglich, wenn die Richtung von P normal zu dem Ellipsoid ist. Die Normale einer Rotationsfläche schneidet aber immer die Rotationsaxe; daher ist die Richtung von P die Normale des elliptischen, durch K geführten Meridianschnittes und halbirt folglich den Winkel AKB der Radienvectoren. Hieraus folgt aber, dass das Parallelogramm der Kräfte aus T, T' und $-P$ gebildet, ein Rhombus und folglich $T = T'$ ist. Die Spannungen T, T' der Seilstücke sind also gleich gross. Ist α der Winkel der Seilstücke an einem Ringe, so ist $P = 2T\cos\frac{1}{2}\alpha$.

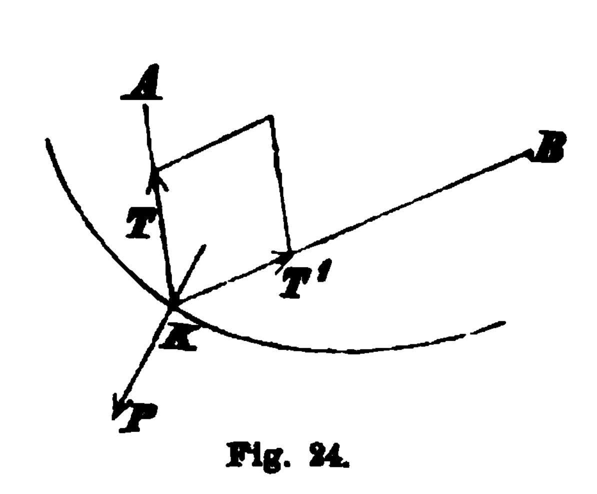


Fig. 24.

§. 12. **Die über eine Fläche hingespannte Kette und der über sie hingespannte Faden.** Berühren die Glieder $G_1, G_2, \ldots G_n$ einer Kette (Fig. 25) eine feste Fläche in Punkten $A_1, A_2, \ldots A_n$, einander selbst in $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ und wirken an G_1 und G_n zwei Kräfte P und Q, so müssen an jedem Gliede G_i die beiden Spannungen $-T_{i-1}$, T_i und der Widerstand N_i der Fläche sich Gleichgewicht halten. Es müssen sich daher die Normalen, in B_{i-1}, B_i, N_i errichtet, in einem Punkte K_i schneiden und die Gleichungen des §. 8 gelten, aus welchen $T_1 : T_2$, $T_1 : T_3, \ldots T_1 : T_{n-1}$ und $P : Q$ sich ergeben. Insbesondere ist

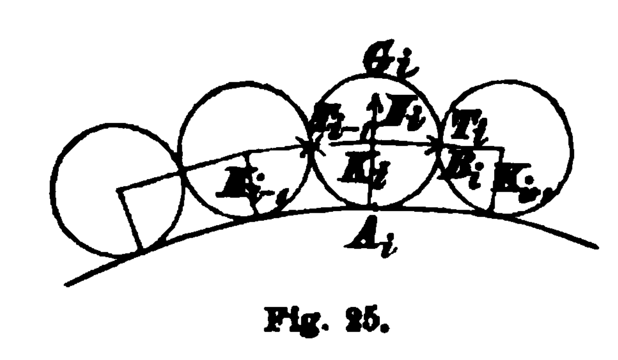


Fig. 25.

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin A_1K_1B_1}{\sin A_1K_1P} \cdot \frac{\sin A_2K_2B_2}{\sin A_2K_2B_1} \cdots \frac{\sin A_nK_nQ}{\sin A_nK_nK_{n-1}}.$$

Werden nun die Kettenglieder unendlich klein, z. B. unendlich kleine Kugeln, bei welchen die Punkte K die Mittelpunkte sind und die drei Normalen sich also stets schneiden, so erscheinen $K_{i-1}K_i$, K_iK_{i+1} als zwei aufeinanderfolgende Elemente eines auf der Fläche aufliegenden Fadens, welche mit der Normalen der Fläche in K_i in einer Ebene liegen. Die Ebene der beiden Elemente ist aber die Schmiegungsebene der Fadencurve und die Normale derselben, welche in diese Schmiegungsebene fällt, die Hauptnormale, welche die Richtung des Krümmungshalbmessers hat. Es geht daher die Schmiegungsebene der

Fadencurve in allen Punkten derselben durch die Normale der Fläche, steht also senkrecht auf der Fläche und fällt mithin ihr Krümmungshalbmesser in die Normale der Fläche. Dies ist aber nach Bd. I, S. 416 die charakteristische Eigenschaft der kürzesten Linie auf der Fläche, wenigstens im Allgemeinen. Daher ist die Fadencurve im Allgemeinen zwischen irgend zweien ihrer Punkte eine kürzeste Linie, d. h. kürzer als alle anderen, durch dieselben Punkte gehenden, ihr nächst anliegenden Curven.

Die Curve, deren Schmiegungsebene durch die Normale der Fläche geht, besitzt die Eigenschaft des Minimums nur innerhalb gewisser Grenzen. Denkt man sich nämlich, von einem Punkte der Fläche ausgehend, nach allen Richtungen der Tangentenebene solche Curven, so schneiden sich im Allgemeinen je zwei aufeinanderfolgende derselben in einem Punkte und bilden alle eine Enveloppe auf der Fläche. Nur in dem Bereiche zwischen dem Ausgangspunkte und dem Berührungspunkte mit der Enveloppe ist eine solche Curve kürzeste Linie zwischen zweien ihrer Punkte, wie Jacobi gezeigt hat. Auf der Kugelfläche sind diese Curven grösste Kreise und zieht sich ihre Enveloppe auf den Gegenpunkt des Ausgangspunktes zusammen. Für abwickelbare Flächen, deren kürzeste Linien durch die Abwickelung der Fläche mit einer Ebene in Gerade übergehen, hört die Enveloppe auf zu existiren und besteht das Minimum längs der ganzen Curve. Uebrigens muss bemerkt werden, dass das Minimum sich nur auf die Nachbarcurven bezieht, dass es also zwischen zwei Punkten einer Fläche mehrere kürzeste Linien geben kann und es z. B. nichts Auffallendes hat, wenn zwischen zwei Punkten der Erzeugungslinie eines Cylinders sowohl die Schraubenlinien, als die Erzeugungslinie selbst kürzeste Linien sind. Sehr irrig reden aber einige Schriftsteller von einer längsten Linie zwischen zwei Punkten auf einer Fläche, während ein Maximum doch offenbar nicht statthaben kann, weil man durch Ausweichungen zur Seite, selbst durch unendlich kleine, immer eine Curve herstellen kann, die länger ist, als jede gegebene Länge.

Die Spannung des Fadens ist in allen Punkten gleich gross; ihre Richtung ist die der Tangente. Es ist nämlich

$$T_i : T_{i-1} = \sin A_i K_i K_{i-1} : \sin A_i K_i K_{i+1};$$

die Summe beider Winkel und des Contingenzwinkels $d\tau$ der Fadencurve beträgt π; daher wird das Sinusverhältniss rechts in der Grenze gleich der Einheit, also $T_i = T_{i-1}$. Ebenso folgt

$$T_{i-1} = T_{i-2} = \cdots = P = T_{i+1} = T_{i+2} = \cdots = Q.$$

Zum Gleichgewicht des Fadens ist daher erforderlich, dass die Componenten der Endkräfte, welche den Faden in der Richtung der Tangenten im Anfangs- und Endpunkte spannen, gleich gross sind und am Faden nach entgegengesetzten Seiten ziehen. Die Spannung des Fadens ist ihnen gleich.

Der Normalwiderstand N der Fläche oder also auch der Druck, welchen der Faden im Punkte K_i auf die Fläche ausübt, halbirt den Winkel der beiden gleichen Spannungen in K_i und es ist $N : T = \sin K_{i-1} K_i K_{i+1} : \sin A_i K_i K_{i+1}$, oder da $K_{i-1} K_i K_{i+1} = \pi - d\tau$ ist und $A_i K_i K_{i+1} = \frac{1}{2}\pi$ wird, $N : T = d\tau$, also $N = T \cdot d\tau$.

Ist nun ϱ der Krümmungshalbmesser der Fadencurve und ds das Bogen-

element $K_i K_{i+1}$, so wird $ds = \varrho d\tau$, also $N = \frac{T}{\varrho} \cdot ds$. Der Druck auf die Fläche ist also umgekehrt proportional dem Krümmungshalbmesser der Fadencurve und unendlich klein. Bildet der Faden eine Gerade, so ist $N = 0$. Für einen über eine Kugel hingespannten Faden ist der Druck überall gleich, da ϱ constant ist. Auf einem Cylinder mit kreisförmigem Querschnitt bildet die Fadencurve eine Schraubenlinie und wenn α ihre Neigung gegen die Erzeugungslinie, a der Radius des Querschnitts ist, so hat man $\varrho \sin^2 \alpha = a$, mithin wird $N = \frac{T}{a} \sin^2 \alpha ds$. Es wird daher N ein Maximum für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, d. h. wenn der Faden längs eines Kreisschnitts um den Cylinder geschlungen wird.

Der Coefficient $\frac{T}{\varrho}$ des Bogenelementes in der Formel für N ist einer Interpretation fähig. Man kann sich $\frac{T}{\varrho}$ als die Resultante von lauter gleichen Parallelkräften denken, welche in den Punkten einer der Linieneinheit gleichen Länge angreifen. Die Resultante aller solcher Elementarkräfte, welche ein Bogenelement ds afficiren, würde sich dann zu jener wie $ds : 1$ verhalten und wäre demzufolge $\frac{T}{\varrho} ds$. Man nennt in diesem Sinne oft $\frac{T}{\varrho}$ den auf die Linieneinheit reducirten Druck.

§. 13. Der Faden, welcher mehrere Körper umspannt. Ein geschlossener Faden sei um drei Körper K_1, K_2, K_3 (Fig. 26) geschlungen; an den Körpern wirken drei Kräfte P, Q, R. Schneiden wir die Fäden durch und führen die Spannungen ein, so zeigt sich zunächst, dass alle Spannungen gleich sind. Ferner müssen die Spannungen in den beiden Punkten, wo der Faden den Körper K_1 verlässt, mit P im Gleichgewicht sein. Daher fällt P mit ihnen in eine Ebene, schneidet sich mit ihnen in einem Punkte und halbirt den Winkel der Spannungen. Die geradlinigen Fadenstücke sind daher die Seiten eines Dreiecks ABC, sodass $P : T = \sin A : \sin \frac{1}{2} A = 2 \cos \frac{1}{2} A$ und überhaupt also

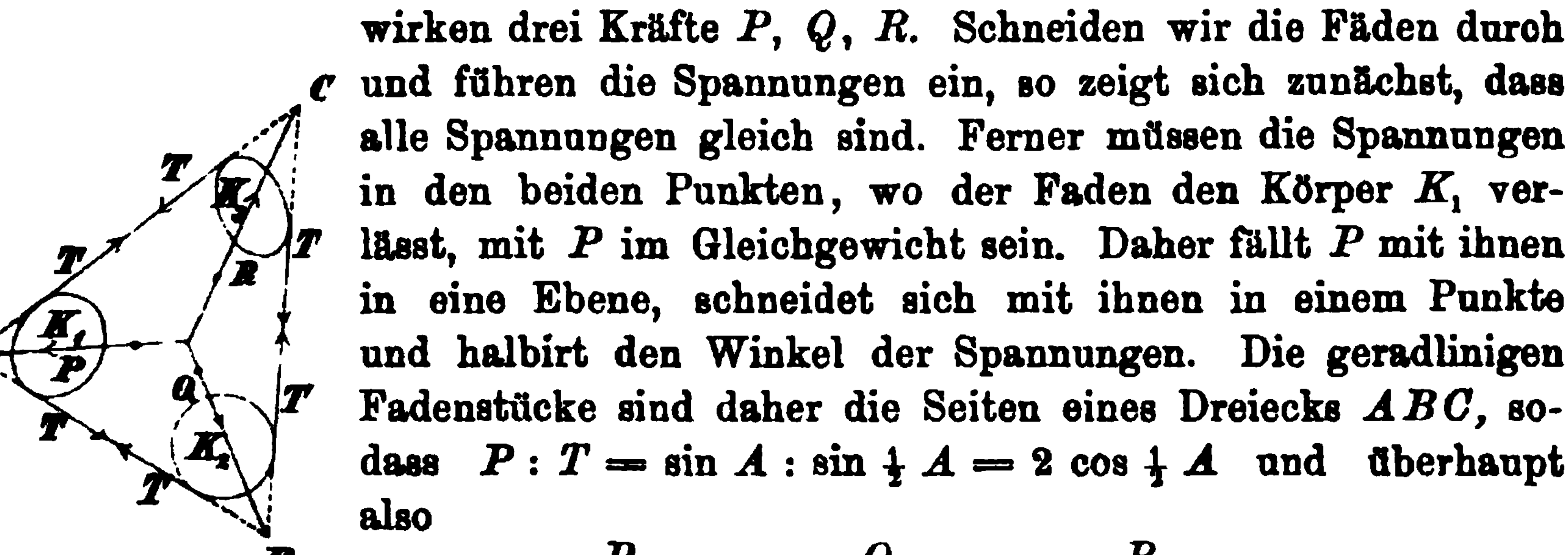


Fig. 26.

$$\frac{P}{2 \cos \frac{1}{2} A} = \frac{Q}{2 \cos \frac{1}{2} B} = \frac{R}{2 \cos \frac{1}{2} C} = T.$$

Die Kräfte müssen nach den Aussenräumen des Dreiecks wirken, wenn Gleichgewicht bestehen soll. Sie schneiden sich selbst in einem Punkte, weil sie die Winkel des Dreiecks halbiren oder auch weil das Gleichgewicht fortbestehen muss, wenn das System unveränderlich wird.

Aehnliches gilt von vier Körpern; das Viereck ist im Allgemeinen windschief; die Kräfte, welche seine Winkel halbiren, liegen auf einem einfachen Hyperboloid, weil das Gleichgewicht fortbesteht, wenn das System unveränderlich wird. Da sie die Halbirungslinien der Winkel sind, so folgt, dass die vier Winkelhalbirenden eines Viereck immer so liegen, dass eine Gerade, welche drei von ihnen schneidet, auch die vierte trifft.

VI. Capitel.

Statische Probleme über Kräfte am vollkommen biegsamen undehnbaren Faden. Allgemeine Theorie der Fadencurven.

§. 1. Ein vollkommen biegsamer, undehnbarer Faden AMB (Fig. 27) sei in zwei Punkten A, B befestigt oder werde an diesen Punkten durch zwei Kräfte festgehalten, auf alle seine Punkte wirken Kräfte und nehme derselbe unter ihrer Einwirkung eine gewisse Gleichgewichtsform an; man soll die Bedingungen des Gleichgewichts, die Spannung längs der Tangente in einem beliebigen Punkte M und die Gestalt der Fadencurve ermitteln.

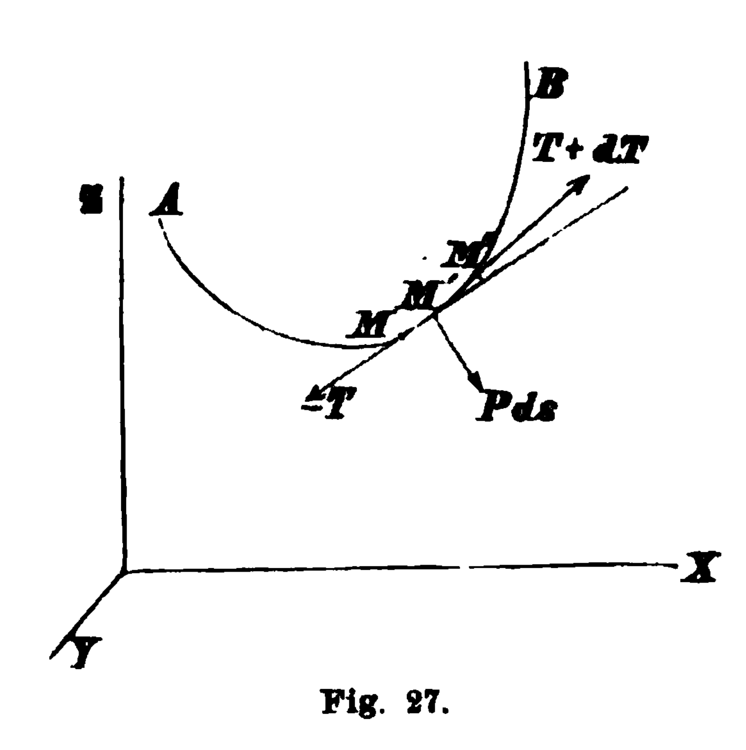


Fig. 27.

1. Die Spannung, welche in allen Punkten die Richtung des Bogenelementes oder der Tangente besitzt, wird von Punkt zu Punkt variiren und eine Function der Coordinaten x, y, z des Punktes M sein. Im Sinne MM' genommen sei sie T und seien T_x, T_y, T_z ihre Componenten parallel den Axen. Im folgenden Punkte M' ist sie dann im Sinne $M'M''$ gleich $T + dT$ und sind $T_x + dT_x$, $T_y + dT_y$, $T_z + dT_z$ ihre Componenten. Am Punkte M' halten sich nun die gegebene äussere Kraft und die beiden Spannungen, T im Sinne $M'M$ und $T + dT$ im Sinne $M'M''$ Gleichgewicht und man hat daher mit Rücksicht darauf, dass $-T_x$, $-T_y$, $-T_z$ die Componenten der erstgenannten Spannung darstellen, wenn f_x, f_y, f_z einstweilen die Componenten der äusseren Kraft f bezeichnen, $dT_x + f_x = 0$; $dT_y + f_y = 0$, $dT_z + f_z = 0$. Die Richtung der Tangente in M bildet aber mit den Axen Winkel, deren Cosinusse $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ sind, wo $MM' = ds$ ist, wodurch

$$T_x = T\frac{dx}{ds}, \quad T_y = T\frac{dy}{ds}, \quad T_z = T\frac{dz}{ds}$$

wird. In Betreff der äusseren Kraft ist Folgendes zu bemerken. Sie ist unendlich klein, weil die Masse, an welcher sie angreift, es ist. Man denke sich nun sämmtliche in den Punkten des Bogenelementes MM' angreifende äussere Kräfte für den Punkt M' auf ihre Resultante und ihr resultirendes Paar reducirt. Das letztere verschwindet gegen die erstere, da nicht blos seine Seitenkraft, sondern auch sein Arm unendlich klein ist. Es bleibt also blos jene Resultante. Denkt man sich nun die Elemente der Längeneinheit alle in derselben Weise afficirt, wie ds, so würde die Gesammtresultante aller dieser Einwirkungen eine bestimmte Intensität P besitzen und die hier in Frage kommende, in M' anzubringende Kraft f würde sich zu P verhalten, wie $ds : 1$. Es ist daher $f = Pds$. Bildet f mit den Axen die Winkel α, β, γ, so wird $f_x = f\cos\alpha$, $f_y = f\cos\beta$, $f_z = f\cos\gamma$, oder $f_x = P\cos\alpha \cdot ds$, $f_y = P\cos\beta \cdot ds$, $f_z = P\cos\gamma \cdot ds$, oder endlich, wenn die Componenten von P mit X, Y, Z bezeichnet werden, wobei man sich P in

der Richtung der Kraft f aufgetragen denkt, $f_x = X ds$, $f_y = Y ds$, $f_z = Z ds$. Durch Einführung dieser Werthe, sowie der Werthe für T_x, T_y, T_z gehen die Gleichgewichtsbedingungen im Punkte M' oder für das Element MM' über in

$$d \cdot T \frac{dx}{ds} + X ds = 0, \quad d \cdot T \frac{dy}{ds} + Y ds = 0, \quad d \cdot T \frac{dz}{ds} + Z ds = 0.$$

2. Integrirt man die Ausdrücke links von einem beliebigen Anfangspunkte O des Bogens s über einen beliebigen Bogen $M_0 M$ hinweg, so erhält man:

$$T \frac{dx}{ds} - \left(T \frac{dx}{ds}\right)_{s_0} + \int_{s_0}^{s} X ds = 0,$$

$$T \frac{dy}{ds} - \left(T \frac{dy}{ds}\right)_{s_0} + \int_{s_0}^{s} Y ds = 0,$$

$$T \frac{dz}{ds} - \left(T \frac{dz}{ds}\right)_{s_0} + \int_{s_0}^{s} Z ds = 0,$$

wo $s_0 = OM_0$ ist. Dies sind aber die drei Gleichungen des translatorischen Gleichgewichts des unveränderlich gedachten Fadens zwischen der Spannung in M_0, deren Componenten $-\left(T \frac{dx}{ds}\right)_{s_0}$, $-\left(T \frac{dy}{ds}\right)_{s_0}$, $-\left(T \frac{dz}{ds}\right)_{s_0}$, der Spannung in M, deren Componenten $T \frac{dx}{ds}$, $T \frac{dy}{ds}$, $T \frac{dz}{ds}$ sind und den sämmtlichen äusseren Kräften $P ds$, welche längs des Bogens $M_0 M_1$ angreifen. Combinirt man die Gleichungen, wie beim Princip der Flächen, indem man z. B. von der letzten, mit y multiplicirt, die vorletzte, mit z multiplicirt, abzieht, so ergibt sich

$$y d \cdot T \frac{dz}{ds} - z d \cdot T \frac{dy}{ds} + (yZ - zY) ds = 0$$

oder

$$d \left(y \cdot T \frac{dz}{ds} - z \cdot T \frac{dy}{ds}\right) + (yZ - zY) ds = 0,$$

woraus durch Integration über den Bogen $M_0 M$

$$\left(y T \frac{dz}{ds} - z T \frac{dy}{ds}\right) - \left(y T \frac{dz}{ds} - z T \frac{dy}{ds}\right)_{s_0} + \int_{s_0}^{s} (yZ - zY) ds = 0$$

nebst zwei analog gebildeten Gleichungen sich ergibt. Diese Gleichungen drücken aus, dass auch die Bedingungen des rotatorischen Gleichgewichts an dem Faden, wie an einem unveränderlichen System erfüllt sind.

Wählt man den Punkt $M(x, y, z)$ des Bogens zum Reductionspunkt, in Bezug auf welchen die Momente genommen werden, so ist das Moment der Spannung T daselbst Null und fällt das erste Glied der letzten Gleichung aus. Man kann daher den Satz aufstellen:

Das Moment aller Kräfte vom Anfang des von den Kräften afficirten Curvenbogens bis zu irgend einem Punkte desselben in Bezug auf diesen Punkt ist Null.

3. Die beiden Gleichungen, welche man aus den Gleichungen unter Nr. 2. erhält, indem man T eliminirt, sind die Differentialgleichungen der Fadencurve. Diese Elimination kann in verschiedener Weise ausgeführt werden. Integrirt man über den Bogen $M_0 M$ und bezeichnet mit $-A$, $-B$, $-C$ abkürzend die Componenten der Spannung in M_0, so folgt:

$$\frac{-A+\int_{s_0}^{s} X ds}{\frac{dx}{ds}} = \frac{-B+\int_{s_0}^{s} Y ds}{\frac{dy}{ds}} = \frac{-C+\int_{s_0}^{s} Z ds}{\frac{dz}{ds}} = -T.$$

Die Grössen A, B, C spielen hierin die Rolle von drei willkürlichen Constanten; die Integration dieser zwei Gleichungen führt noch zwei weitere ein. Diese fünf Constanten bestimmen sich, sobald zwei Punkte der Fadencurve und die Bogenlänge zwischen ihnen gegeben sind. Denn die Coordinaten der beiden Punkte müssen den beiden endlichen Gleichungen der Fadencurve genügen, wodurch vier Bedingungen für die Constanten erhalten werden; die gegebene Bogenlänge liefert hierzu die fünfte.

Die vorstehende Form der Differentialgleichungen der Fadencurve ist nur in den einfachsten Fällen brauchbar; übrigens kann man für diese Curve leicht die Differentialgleichungen zweiter Ordnung erhalten. Führt man nämlich die Differentiation in den Gleichungen Nr. 1. aus, so kommt

$$T d\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{dx}{ds}dT+X ds=0,$$

$$T d\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{dy}{ds}dT+Y ds=0,$$

$$T d\cdot\frac{dz}{ds}+\frac{dz}{ds}dT+Z ds=0.$$

Die Elimination von dT und hierauf von T ergibt:

$$\frac{\begin{vmatrix}\frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds}\\ Y & Z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds}\\ d\cdot\frac{dy}{ds} & d\cdot\frac{dz}{ds}\end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix}\frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds}\\ Z & X\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds}\\ d\cdot\frac{dz}{ds} & d\cdot\frac{dx}{ds}\end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix}\frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds}\\ X & Y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds}\\ d\cdot\frac{dx}{ds} & d\cdot\frac{dy}{ds}\end{vmatrix}} = -\frac{T}{ds}.$$

4. Um die Spannung T längs der Tangente des Punktes (xyz) zu finden, multiplicire man die drei Gleichungen unter Nr. 3. mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ und addire sie; dies liefert, da $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1$, also

$$\frac{dx}{ds}d\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}d\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}d\cdot\frac{dz}{ds}=0$$

ist:

$$-dT = X dx + Y dy + Z dz.$$

Existirt also für die Kraft P eine Kräftefunction U, sodass

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}$$

wird, so erhält man, wenn T, U sich auf den Punkt (x, y, z) und T_0, U_0 sich auf den Punkt $(x_0\, y_0\, z_0)$ beziehen:

$$T - T_0 = -(U - U_0).$$

In allen Fällen, in welchen für die Kraft P eine Kräftefunction besteht, ist die Spannung des Fadens blos eine Function des Ortes und nicht von der Gestalt der Fadencurve abhängig; die Aenderung der Spannung von Punkt zu Punkt ist gleich der Aenderung der Kräftefunction mit entgegengesetzten Zeichen genommen.

In dem besonderen Falle, dass die Kraft P normal zu der Fadencurve ist, hat man $\frac{X}{P}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{P}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{P}\frac{dz}{ds} = 0$, also $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ und folglich $T = T_0$, d. h. die Spannung ist constant. Dies findnt z. B. statt, wenn der Faden auf einer Fläche aufliegt, in welchem Falle der Normalwiderstand der Fläche die Kraft Pds ist.

Einen anderen Ausdruck für die Spannung T findet man, wenn man die Gleichungen in Nr. 3. mit $d\cdot\frac{dx}{ds}$, $d\cdot\frac{dy}{ds}$, $d\cdot\frac{dz}{ds}$ multiplicirt und sie addirt. Der Coefficient von dT wird dann Null und bleibt

$$T\cdot\left[\left(d\cdot\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{dz}{ds}\right)^2\right] + \left[Xd\cdot\frac{dx}{ds} + Yd\cdot\frac{dy}{ds} + Zd\cdot\frac{dz}{ds}\right]ds = 0.$$

Es ist aber der Krümmungshalbmesser ϱ der Curve im Punkte (xyz):

$$\varrho = \frac{ds}{\left[\left(d\cdot\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{dz}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Hiermit erhält man:

$$-\frac{Tds}{\varrho^2} = Xd\cdot\frac{dx}{ds} + Yd\cdot\frac{dy}{ds} + Zd\cdot\frac{dz}{ds}.$$

Quadrirt und addirt man dieselben obigen Gleichungen, so folgt mit Rücksicht auf die eben gefundenen Formeln und den Ausdruck für ϱ, sowie darauf, dass $P^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ ist:

$$\frac{T^2}{\varrho^2} + \frac{dT^2}{ds^2} = P^2.$$

Für Normalkräfte P ist $dT = 0$, mithin $T = P\varrho$. Der Faden nimmt also für Normalkräfte P eine solche Gestalt an, dass der Krümmungshalbmesser der Kraft P umgekehrt proportional wird.

Durch die vorstehende Formel ist P in zwei Componenten zerlegt, deren Bedeutung leicht zu ermitteln sein wird. Ist α der Winkel, den P mit der Richtung der Tangente bildet, so liefert die Projection von P auf die Tangente

$$X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = P\cos\alpha$$

und mithin ist der ersten Formel dieser Nummer zufolge $-\frac{dT}{ds} = P\cos\alpha$. Setzt man dies in die vorstehende Gleichung ein, so folgt $\frac{T}{\varrho} = P\sin\alpha$. Nun fällt Pds mit den beiden Spannungen längs den Tangenten, welche sich im Curvenpunkte schneiden, in eine Ebene. Diese Ebene ist, weil sie die beiden aufein-

anderfolgenden Tangenten enthält, die Schmiegungsebene der Curve. Daher stellt $\frac{T}{\varrho}$ die Componente von P vor, welche in die Richtung der Hauptnormale oder des Krümmungshalbmessers fällt. Für Normalkräfte P ist $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, also $dT = 0$. Man gelangt zu den Ausdrücken für die beiden Componenten von P auch unmittelbar, indem man das Gleichgewicht der drei im Curvenpunkte angreifenden Kräfte dadurch ausdrückt, dass man die Componentensummen in den Richtungen der Tangente und Hauptnormalen der Null gleich setzt. Dies liefert nämlich, wenn $d\tau$ den Contingenzwinkel bedeutet:

$$Pds \cos\alpha - T + (T + dT)\cos d\tau = 0$$

und

$$Pds \sin\alpha + (T + dT)\sin d\tau = 0,$$

oder reducirt: $Pds \cos\alpha + dT = 0$ und $Pds \sin\alpha + Td\tau = 0$, wo für $d\tau$ noch $\frac{ds}{\varrho}$ zu setzen ist.

5. Liegt der Faden auf einer Fläche $F = 0$ auf, so tritt zu Pds noch der Normalwiderstand der Fläche hinzu. Ist dieser Nds, wo N den auf die Linieneinheit reducirten Normalwiderstand bezeichnet und sind $N_x ds$, $N_y ds$, $N_z ds$ seine Componenten, so sind die Bedingungen des Gleichgewichts:

$$d \cdot T\frac{dx}{ds} + Xds + N_x ds = 0,$$

$$d \cdot T\frac{dy}{ds} + Yds + N_y ds = 0,$$

$$d \cdot T\frac{dz}{ds} + Zds + N_z ds = 0,$$

wozu noch kommt:

$$N^2 = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2$$

$$\frac{N_x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{N_y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{N_z}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{N}{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Diese Gleichgewichtsbedingungen unterscheiden sich von denen für den freien Faden nur dadurch, dass $X + N_x$, $Y + N_y$, $Z + N_z$ an die Stelle von X, Y, Z getreten sind. Daher ist

$$-dT = (X + N_x)\,dx + (Y + N_y)\,dy + (Z + N_z)\,dz = Xdx + Ydy + Zdz,$$

da $N_x dx + N_y dy + N_z dz = 0$ ist, weil N auf der Fläche senkrecht steht. Die Resultante von Pds und Nds fällt in die Schmiegungsebene der Fadencurven. Ist daher $P = 0$, so geht die Schmiegungsebene durch die Normale der Fläche und wird die Curve eine kürzeste Linie (Cap. V, §. 12). Für $P = 0$, d. h. $X = Y = Z = 0$ ist T constant und nehmen die Gleichungen des Gleichgewichts die Form an:

$$Td \cdot \frac{dx}{ds} + N_x ds = 0, \quad Td \cdot \frac{dy}{ds} + N_y ds = 0, \quad Td \cdot \frac{dz}{ds} + N_z ds = 0,$$

aus welchen folgt:

$$\frac{N_x}{\frac{d \cdot \frac{dx}{ds}}{ds}} = \frac{N_y}{\frac{d \cdot \frac{dy}{ds}}{ds}} = \frac{N_z}{\frac{d \cdot \frac{dz}{ds}}{ds}} = -T,$$

zum Beweise, dass N_z die Richtung des Krümmungshalbmessers der Fadencurve besitzt. Aus dieser und der obigen Proportion für N_x, N_y, N_z ergeben sich die Differentialgleichungen der Fadencurve, nämlich

$$\frac{d\cdot\frac{dx}{ds}}{ds}:\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{d\cdot\frac{dy}{ds}}{ds}:\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{d\cdot\frac{dz}{ds}}{ds}:\frac{\partial F}{\partial z},$$

welche die kürzeste Linie charakterisiren. Stellt man die Gleichung der Fläche unter der Form $F=f(x,y)-z=0$ oder $z=f(x,y)$ dar, so gewinnen sie vermöge $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{dy}=\frac{\partial z}{\partial y}=q$, $\frac{\partial F}{\partial z}=-1$, wo p und q Abkürzungen sind, die einfachere Form:

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}:p=\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}:q=-\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Der Widerstand N der Fläche folgt aus $P\sin\alpha=\frac{T}{\varrho}$ für $N=P\sin\alpha$, nämlich $N=\frac{T}{\varrho}$, ist also dem Krümmungshalbmesser der Fadencurve umgekehrt proportional.

§. 2. Die Fadencurve für Parallelkräfte. Es seien die Kräfte Pds, welche an der Fadencurve angreifen, sämmtlich parallel. Wählt man ihre Richtung zur Richtung der y-Axe, so sind $X=Z=0$ und werden die Gleichungen des Gleichgewichts

$$d\cdot T\frac{dx}{ds}=0,\quad d\cdot T\frac{dy}{ds}+Yds=0,\quad d\cdot T\frac{dz}{ds}=0$$

und die unter Nr. 3. des vorigen §.:

$$\frac{-A}{\frac{dx}{ds}}=\frac{-B+\int_{s_0}^{s}Yds}{\frac{dy}{ds}}=\frac{-C}{\frac{dz}{ds}}=-T.$$

Hieraus folgt $A\frac{dz}{ds}=C\frac{dx}{ds}$, also $Az=Cx+D$, d. h. die Punkte der Fadencurve liegen in einer mit der y-Axe, also mit der Kraftrichtung parallelen Ebene. Dies ergibt sich bereits aus Cap. V, §. 8, wenn man die Fadencurve als ein Infinitesimalpolygon ansieht. Wählt man die Ebene der Curve zur Ebene der xy, so ist ihre Gleichung $z=0$, mithin $C=D=0$ und bleiben mit Weglassung des in unbestimmter Form $\frac{0}{0}$ auftretenden Ausdrucks $-C:\frac{dz}{ds}$ die Gleichungen

$$\frac{-A}{\frac{dx}{ds}}=\frac{-B+\int_{s_0}^{s}Yds}{\frac{dy}{ds}}=-T.$$

Die Gleichung der Curve wird, wenn Y als Function von x, y gegeben ist:

$$-A\frac{dy}{dx}+B=\int_{s_0}^{s}Y\,ds;$$

ist aber die Gestalt der Curve im Voraus bestimmt, so liefert dieselbe Gleichung durch Differentiation Y als Function von x oder y.

Die Spannung T ergibt sich aus denselben Gleichungen. Zunächst nämlich ist

$$T\frac{dx}{ds}=A=T_x \text{ und } T\frac{dy}{ds}=B-\int_{s_0}^{s}Y\,ds=A\frac{dy}{dx}=T_y.$$

Quadrirt und addirt man beide Ausdrücke, so folgt:

$$T=A\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=A\frac{ds}{dx}.$$

Es ist aber $\frac{dx}{ds}=\sin\psi$, wenn ψ den Winkel bedeutet, welchen die Tangente der Fadencurve mit der Richtung der Kraft bildet. Der Inhalt dieser Formeln ist folgender:

Die Spannung des Fadens ist proportional der Cosecante des Winkels, den die Tangente der Fadencurve mit der Kraftrichtung bildet, ihre Componente senkrecht zur Kraftrichtung ist constant, ihre Componente parallel zur Kraftrichtung ist der Cotangente jenes Winkels proportional.

§. 3. Die Kettenlinien.

Sind die Kräfte Pds die Gewichte der Bogenelemente des Fadens, so heisst die Fadencurve eine Kettenlinie. Es ist in diesem Falle $Pds=-\delta g ds$, wenn δ die specifische Masse des Fadens, also $\delta.ds$ die Masse und $g\delta ds$ das Gewicht des Elementes im Punkte (xy) ist, welches von Punkt zu Punkt im Allgemeinen variiren wird, und die positive y-Axe aufwärts gerichtet ist. Für einen homogenen Faden ist δ constant. In diesem Falle heisst die Curve die gemeine Kettenlinie (Fig. 28). Für sie ist, wenn der Bogen $s=O_0M$ von einem beliebigen Punkte O_0 der Curve an gerechnet wird und s_0 die Bogenlänge O_0M_0 bis zum Anfangspunkte M_0 des Bogens M_0M bedeutet

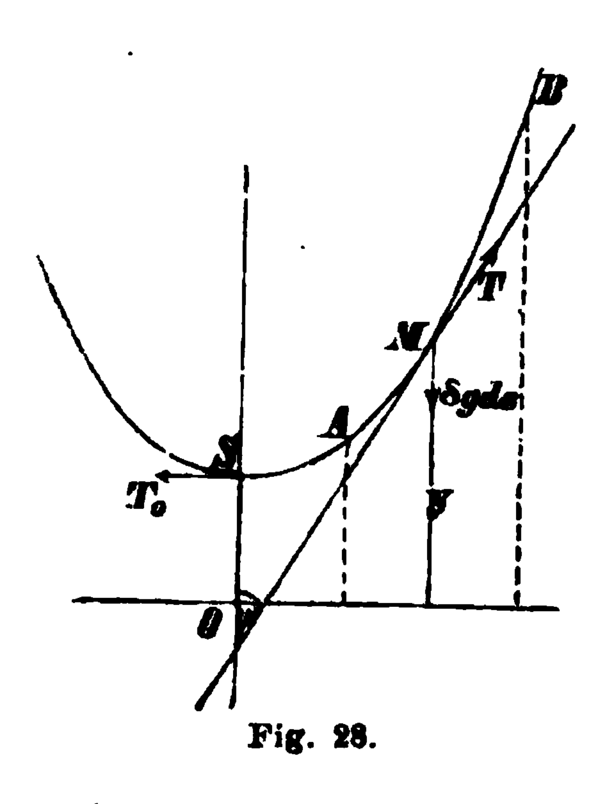


Fig. 28.

$$\int_{s_0}^{s}Y\,ds=-\int_{s_0}^{s}\delta g\,ds=-\delta g\,(s-s_0)$$

und

$$-A\frac{dy}{dx}+B=-\delta g\,(s-s_0).$$

Nehmen wir zu den Punkten O_0 und M_0, für welchen letzteren Punkt A und B die Spannungscomponenten waren, den tiefsten Punkt S der Curve (den Scheitel), so wird $s_0=0$ und da im tiefsten Punkte $\frac{dy}{dx}$ mit s zugleich verschwindet, auch $B=0$. Hiedurch reducirt sich die Differentialgleichung der Fadencurve auf

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\delta g}{A} \cdot s.$$

Darin ist δg das Gewicht der Längeneinheit des Fadens und stellt $\frac{\delta g}{A}$ den reciproken Werth einer Länge α dar, weil die linke Seite der Gleichung eine Verhältnisszahl ist. Indem wir also $A : \delta g = \alpha$ oder $A = \delta g . \alpha$ setzen, erkennen wir, dass α diejenige Fadenlänge darstellt, deren Gewicht gleich der Horizontalcomponente A der Spannung ist. Da im tiefsten Punkte S die Tangente horizontal läuft, so hat die Spannung T_0 dortselbst keine Verticalcomponente und ist also gleich A, so dass wir schreiben können, $T_0 = \delta g \alpha$. Die Differentialgleichung ist also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{\alpha}$$

und drückt aus, dass die Tangente der Neigung der Curve gegen die Horizontale dem Bogen vom tiefsten Punkte bis zum Berührungspunkte proportional ist.

Sie ist nochmals zu integriren und wir wollen dies so ausführen, dass wir x und y als Functionen des Winkels ψ darstellen, welchen die Tangente mit der Verticalen bildet. Dann ist

$$\frac{dx}{ds} = \sin\psi, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\psi, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg}\psi$$

und wird die Differentialgleichung

$$s = \alpha \operatorname{cotg} \psi.$$

Indem wir sie differentiiren, erhalten wir $ds = -\alpha \frac{d\psi}{\sin^2\psi}$ und hiemit

$$dx = ds \sin\psi = -\alpha \frac{d\psi}{\sin\psi}, \quad dy = ds \cos\psi = -\alpha \frac{\cos\psi d\psi}{\sin^2\psi}.$$

Hieraus folgt

$$x = -\alpha \int \frac{d\psi}{\sin\psi} = -\alpha \int \frac{d\psi}{2 \sin\frac{1}{2}\psi \cos\frac{1}{2}\psi}$$

$$= -\alpha \int \frac{\frac{d\frac{1}{2}\psi}{\cos^2\frac{1}{2}\psi}}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi} = -\alpha \int \frac{d \operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi} = -\alpha l \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi + C,$$

$$y = \frac{\alpha}{\sin\psi} + C'.$$

Legen wir nun das Coordinatensystem so, dass die verticale Ordinatenaxe durch den Scheitel S geht, so dass also für $\psi = \frac{1}{2}\pi$ die Abscisse $x = 0$ wird, so verschwindet C und wenn wir den Coordinatenursprung O um die Strecke α tiefer legen als S, so wird $y = \alpha$ für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, also auch $C' = 0$ und sind die Gleichungen der Kettenlinie und deren Bogenlänge

$$x = -\alpha l \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi, \quad y = \frac{\alpha}{\sin\psi}, \quad s = \alpha \operatorname{cotg}\psi.$$

Will man eine Gleichung für die Curve zwischen x und y herstellen, so ist ψ zu eliminiren. Die erste von ihnen gibt

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi = e^{-\frac{x}{\alpha}}$$

und die anderen geben

$$y = \frac{\alpha}{2 \sin \frac{1}{2}\psi \cos \frac{1}{2}\psi} = \frac{1}{2}\alpha \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\psi + \sin^2 \frac{1}{2}\psi}{\sin \frac{1}{2}\psi \cos \frac{1}{2}\psi} = \frac{1}{2}\alpha (\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\psi + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\psi),$$

$$s = \alpha \frac{\cos \psi}{\sin \psi} = \alpha \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\psi - \sin^2 \frac{1}{2}\psi}{2 \sin \frac{1}{2}\psi \cos \frac{1}{2}\psi} = \frac{1}{2}\alpha (\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\psi - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\psi),$$

so dass man findet

$$y = \frac{1}{2}\alpha (e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}}), \quad s = \frac{1}{2}\alpha (e^{\frac{x}{\alpha}} - e^{-\frac{x}{\alpha}}).$$

Die Gleichung der Curve zwischen x und y zeigt, dass die Ordinatenaxe eine Symmetrieaxe derselben ist, und dass die Kettenlinie construirt werden kann indem man die arithmetischen Mittel der Ordinaten der beiden symmetrisch gegen die Ordinatenaxe liegenden logarithmischen Linien $x = \alpha e^{\frac{x}{\alpha}}$ und $y = \alpha e^{-\frac{x}{\alpha}}$ als Ordinaten aufträgt. In ähnlicher Weise kann die Curve nach der Formel für s rectificirt werden.

Die Kettenlinie hängt nur von einer Constanten α ab, dem Parameter derselben. Alle Kettenlinien sind daher ähnliche Curven.

Die Bedeutung des Parameters $\alpha = OS$ ist folgende. Würde man im Scheitel eine unendlich kleine Rolle (einen festen glatten Punkt) anbringen und von der Curve ein Stück gleich α über dieselbe hinabhängen lassen, so würde das Gewicht desselben, da es gleich T_0 ist, den Bogen SM in Verbindung mit der Spannung in M im Gleichgewicht halten.

Die zur Axe der Kettenlinie senkrechte Gerade, welche vom Scheitel um den Parameter absteht und die Curve nicht schneidet (hier die Axe der x), heisst die Directrix der Kettenlinie. Durch die Directrix und den Parameter ist die Kettenlinie bestimmt.

Ohne die Coordinaten x, y als Functionen von ψ darzustellen und dann ψ zu eliminiren, gelangt man auch unmittelbar folgendermassen zu der Gleichung der Kettenlinie in x, y. Indem man die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{s}{\alpha}$ nochmals differentiirt, erhält man mit Hülfe von $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ die Gleichung:

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{1}{\alpha},$$

deren Integral, wenn $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt wird, lautet:

$$l(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{\alpha},$$

ohne Constante, da p mit x verschwindet, wenn das Coordinatensystem, wie oben, angenommen wird. Daher ist:

$$p + \sqrt{1 + p^2} = e^{\frac{x}{\alpha}}$$

und da

$$(p + \sqrt{1 + p^2})(p - \sqrt{1 + p^2}) = -1$$

ist, auch

$$p - \sqrt{1 + p^2} = - e^{-\frac{x}{\alpha}};$$

mithin

$$2p = e^{\frac{x}{\alpha}} - e^{-\frac{x}{\alpha}}$$

und hieraus durch nochmalige Integration:

$$y = \tfrac{1}{2}\alpha\,(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}}).$$

Mit Hülfe der Gudermann'schen hyperbolischen Functionen

$$\mathfrak{Cof}.\ \omega = \tfrac{1}{2}(e^{\omega} + e^{-\omega}) \text{ und } \mathfrak{Sin}.\ \omega = \tfrac{1}{2}(e^{\omega} - e^{-\omega})$$

kann man die Gleichung der Kettenlinie und deren Rectificationsformel auch schreiben:

$$y = \alpha\ \mathfrak{Cof}.\ \frac{x}{\alpha},\quad s = \alpha\ \mathfrak{Sin}.\ \frac{x}{\alpha}$$

oder in cyclischen Cosinus und Sinus mit imaginärem Argumente:

$$y = \alpha \cos \frac{x}{\alpha} i,\quad s = i\alpha \sin \frac{x}{\alpha} i.$$

Wir wollen noch einige geometrische Eigenschaften der Kettenlinie aufführen.

1. Aus den Gleichungen $y = \frac{1}{2}\alpha\,(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}})$, $s = \frac{1}{2}\alpha\,(e^{\frac{x}{\alpha}} - e^{-\frac{x}{\alpha}})$ folgt

$$y + s = \alpha e^{\frac{x}{\alpha}},\quad y - s = \alpha e^{-\frac{x}{\alpha}}$$

und mithin weiter durch Multiplication dieser Gleichungen

$$y^2 = \alpha^2 + s^2,$$

d. h. das Quadrat des Abstandes eines Curvenpunktes von der Directrix ist gleich der Quadratsumme des Bogens vom Scheitel bis zum Curvenpunkte und des Parameters (Fig. 29). Dieser Satz folgt auch unmittelbar aus der Eigenschaft der hyperbolischen Functionen, vermöge welcher

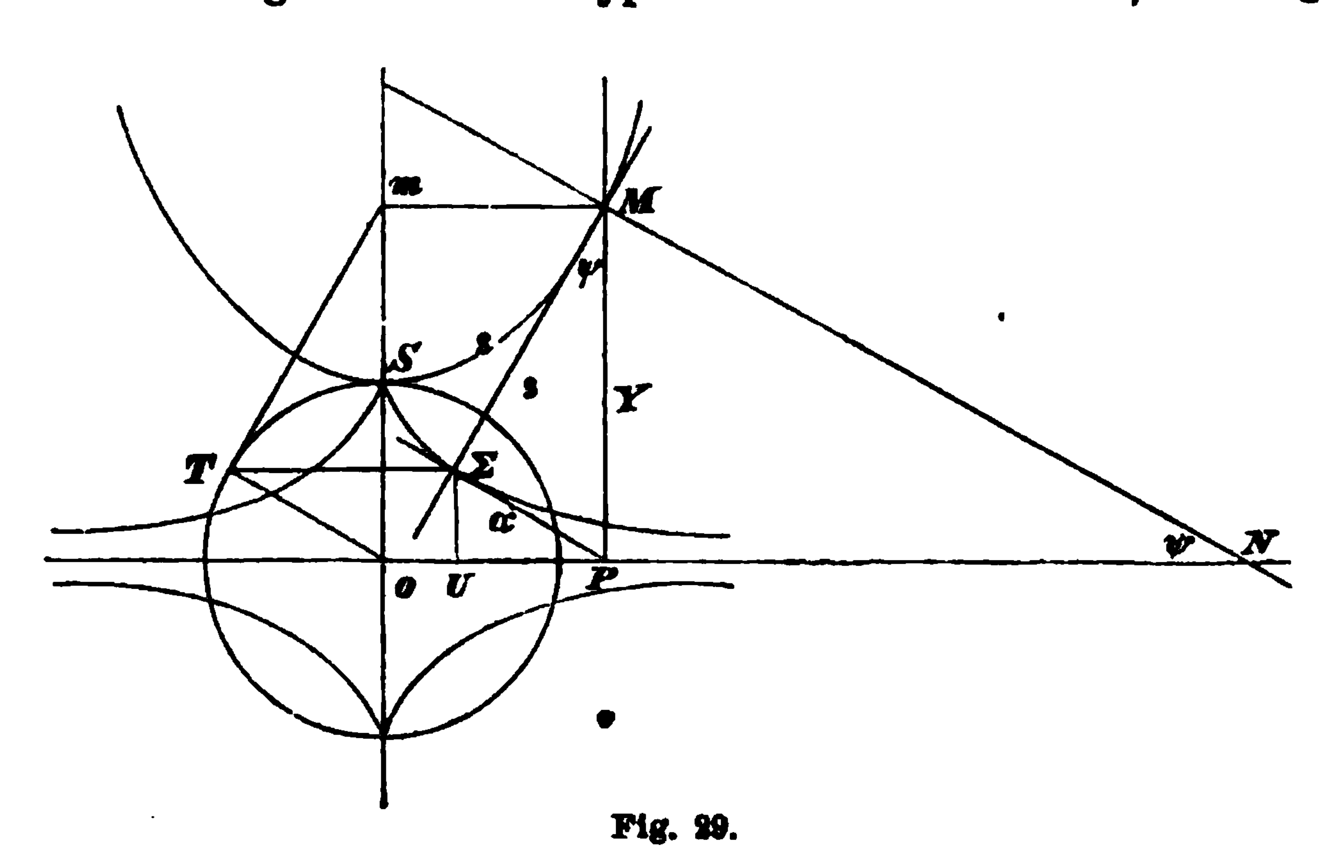


Fig. 29.

$\mathfrak{Cof}.^2\omega - \mathfrak{Sin}.^2\omega = 1$ ist. (Ueber die hyperbolischen Functionen vgl. Gronau, Theorie und Anwendung der hyperbolischen Functionen, Danzig 1865; ferner den von

Heis herrührenden Abschnitt über dieselben in Sohncke's Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung; sowie Laisant, Essai sur les fonctions hyperboliques, Paris 1874.) Beschreibt man daher um den Schnittpunkt O der Axe der Kettenlinie und der Directrix mit dem Parameter α einen Kreis, trägt auf der Axe die Strecke $Om = MP = y$ ab und zieht die Tangente mT an den Kreis, so wird mT gleich dem Bogen $SM = s$ und wenn man das Parallelogramm $POT\Sigma$ vollendet, Dreieck $P\Sigma M \backsim OTm$, mithin $\sphericalangle P\Sigma M = \frac{1}{2}\pi$, $P\Sigma = \alpha$ und ΣM die Tangente der Kettenlinie in M sein; d. h.

Die Richtung der Tangente in einem beliebigen Punkte M der Kettenlinie ist parallel der Tangente des um O mit dem Parameter α beschriebenen Kreises, welche man von der Projection m des Punktes M auf die Axe der Curve an diesen legen kann.

Die Länge des Perpendikels $P\Sigma$, welches man von der Projection P des Curvenpunktes M auf die Tangente fällen kann, ist constant und gleich dem Parameter α der Kettenlinie.

Die Projection $M\Sigma$ des Abstandes MP des Curvenpunktes M von der Directrix auf die Tangente von M ist die Länge s des Curvenbogens vom Scheitel S bis zum Punkte M.

2. Da $M\Sigma$ der von der Tangente abgewickelte Bogen MS ist, so hat $M\Sigma$ die Richtung der Normalen und ΣP die der Tangente der Evolvente der Kettenlinie im Punkte Σ. Das Tangentenstück der Evolvente der Kettenlinie vom Curvenpunkt bis zur Directrix der Kettenlinie ist daher constant; die Evolvente ist eine Tractrix, deren constante Tangentenlänge gleich dem Parameter der Kettenlinie ist. Um eine Gleichung für die Evolvente zu finden, seien x, y die Coordinaten des Punktes Σ und $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$ die Gleichung der Tangente in Σ für X, Y als laufende Coordinaten. Für den Schnittpunkt P der Tangente mit der x-Axe ist $Y = 0$ und die Subtangente

$$UP = X - x = -y\frac{dx}{dy}.$$

Da $UP^2 + U\Sigma^2 = \alpha^2$ sein muss, so ist

$$-y\frac{dx}{dy} = \sqrt{\alpha^2 - y^2} \quad \text{oder} \quad y\,dx + dy\sqrt{\alpha^2 - y^2} = 0$$

die Differentialgleichung der Evolvente. Durch die Substitution $\alpha^2 - y^2 = z^2$ geht sie über in $dx + \left(1 - \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - z^2}\right)dz = 0$, deren Integral

$$x + z = \frac{1}{2}\alpha\, l \cdot \frac{(\alpha + z)^2}{\alpha^2 - z^2}$$

ist, ohne Constante, da mit $x = 0$ die Ordinate $y = \alpha$, also $z = 0$ wird. Nach der Restitution von y nimmt sie die Form an

$$\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - y^2}}{y} = e^{\frac{x + \sqrt{\alpha^2 - y^2}}{\alpha}}.$$

3. Bezeichnet, wie oben, ψ den Winkel der Tangente und Axe der Kettenlinie, so ist der Krümmungshalbmesser $\varrho = -\frac{ds}{d\psi}$, da $\cotg \psi = \frac{s}{\alpha}$, also

$$-\frac{d\psi}{\sin^2\psi} = \frac{ds}{\alpha} \text{ ist}, \quad \varrho = \frac{\alpha}{\sin^2\psi}.$$

Es ist aber, wie leicht aus der Figur zu sehen, $\alpha : \sin^2 \psi$ die Länge MN der Normalen. Daher ist der Krümmungshalbmesser der Kettenlinie gleich der Länge der Normalen zwischen dem Curvenpunkte und der Directrix. Die obige Differentialgleichung der Curve spricht diesen Satz aus. Denn es ist $\frac{d^2y}{dx^2} : \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\varrho}$, mithin

$$\frac{d^2y}{dx^2} : \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\varrho}\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = \frac{\operatorname{cosec}^2 \psi}{\varrho},$$

womit die Differentialgleichung übergeht in $\varrho \sin^2\psi = \alpha$. Projicirt man den Krümmungshalbmesser auf die Axe und von da rückwärts auf die Normale, so erhält man den Parameter der Curve.

4. Die Fläche F der Kettenlinie, enthalten zwischen dem Abscissenstück $x - x_0$, dem darüberstehenden Curvenbogen $s - s_0$ und den dessen Endpunkten entsprechenden Ordinaten ist, da $y = \alpha : \sin \psi$, $dx = ds \sin \psi$ ist:

$$F = \int_{x_0}^{x} y\,dx = \int_{s_0}^{s} \alpha\,ds = \alpha\,(s - s_0),$$

also proportional dem Curvenbogen $s - s_0$.

Die Spannung T in einem Punkte $M(x, y)$ ist zufolge §. 2, S. 94 $T = T_0 \frac{ds}{dx}$, wenn $T_0 = \delta g \alpha$ die constante Horizontalspannung $T\alpha$ bezeichnet, welche dort A genannt wurde. Da $\frac{ds}{dx} = \operatorname{cosec} \psi = \frac{y}{\alpha}$, so folgt $T = T_0 \operatorname{cosec} \psi$, sowie $T = \frac{T_0}{\alpha}\, y = \delta g y$. Ferner ist die Verticalcomponente T_y der Spannung:

$$T_y = T_0 \operatorname{cotg} \psi = T_0 \frac{s}{\alpha},$$

daher wird auch

$$T^2 = T_0^2 + T_0^2 \frac{s^2}{\alpha^2} = T_0^2 + (\delta g s)^2.$$

Die Spannung in irgend einem Punkte ist daher proportional der Secante der Neigung der Tangente gegen die Horizontale, sie ist auch gleich dem Gewichte eines Fadentheiles gleich dem Abstande des Punktes von der Directrix und der Unterschied ihres Quadrates vom Quadrate der Horizontalspannung (im Scheitel) ist gleich dem Quadrate des Gewichtes vom Bogen vom Scheitel bis zum Curvenpunkte.

In der letzteren Form folgt der Satz unmittelbar aus der S. 80. gegebenen Methode zur Bestimmung der Spannung. Aus $T = \delta g y$ folgt, dass der Faden vom Scheitel bis zu irgend einem Punkte M im Gleichgewicht erhalten wird, wenn man denselben in M über eine kleine Rolle führt und ein Stück desselben bis zur Directrix überhängen lässt. Ebenso folgt, dass die Enden eines im Gleichgewicht befindlichen Fadens, welcher über zwei unendlich kleine Rollen hängt, bis zur Directrix hinabreichen, also beide in einer Horizontalen liegen; ferner dass, wenn ein geschlossener Faden über zwei kleine Rollen hingehängt wird, die beiden Kettenlinien, die er bildet, eine gemeinschaftliche Directrix haben. Denn die Spannungen beider Kettenlinien in je einem Aufhängepunkt sind gleich, also würden auch die Fadenstücke, welche die Kettenstücke im Gleichgewicht

erhalten würden, falls der Faden an den Aufhängestellen durchgeschnitten würde, bis zu derselben Horizontalen hinabreichen.

Wir nehmen jetzt an, es sei ein schwerer Faden von der Länge l gegeben, welcher als Kettenlinie zwischen zwei Punkte A, B aufgehängt werden soll und suchen die Elemente dieser Curve zu bestimmen.

Nimmt man die noch unbekannte Directrix zur x-Axe, die Vertikale des Scheitels S zur y-Axe und bezeichnen x, y die Coordinaten von A, $x+a$, $y+b$ die von B, sodass a, b die Horizontal- und Vertikalprojection des Bogens $AB = l$ darstellen, so hat man für $SA = s$ und $SB = s + l$ den oben entwickelten Gleichungen zufolge:

$$y + s = \alpha e^{\frac{x}{\alpha}}, \qquad y - s = \alpha e^{-\frac{x}{\alpha}},$$

$$y + b + s + l = \alpha e^{\frac{x+a}{\alpha}}, \qquad y + b - s - l = \alpha e^{-\frac{x+a}{\alpha}},$$

worin α den gleichfalls noch unbekannten Parameter OS bezeichnet. Durch Elimination von y und s aus diesen vier Gleichungen gelangt man zu zwei, die Unbekannten x, α bestimmenden Gleichungen. Die Subtraction der übereinanderstehenden Gleichungen liefert nämlich:

$$b + l = \alpha e^{\frac{x}{\alpha}} \left(e^{\frac{a}{\alpha}} - 1\right), \quad b - l = \alpha e^{-\frac{x}{\alpha}} \left(e^{-\frac{a}{\alpha}} - 1\right) = \alpha e^{-\frac{x}{\alpha}} \cdot e^{-\frac{a}{\alpha}} \left(1 - e^{\frac{a}{\alpha}}\right)$$

und weiter liefert die Multiplication dieser Gleichungen, wodurch x eliminirt wird, zur Bestimmung von α die Gleichung:

$$l^2 - b^2 = \alpha^2 e^{-\frac{a}{\alpha}} \left(e^{\frac{a}{\alpha}} - 1\right)^2.$$

Setzt man nun $\frac{a}{\alpha} = z$ und $\frac{1}{a} \sqrt{l^2 - b^2} = c$, so ergibt sich für z die transcendente Gleichung:

$$c = \frac{1}{z} \left(e^{\frac{1}{2}z} - e^{-\frac{1}{2}z}\right).$$

Mit ihrer Hilfe ist zunächst z durch a, b, l auszudrücken, wodurch sodann $\alpha = \frac{a}{z}$ und hiermit x aus der Gleichung $b + l = \alpha e^{\frac{x}{\alpha}} \left(e^{\frac{a}{\alpha}} - 1\right)$, sowie y mit Hilfe der Gleichung der Curve $y = \frac{1}{2} \alpha \left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)$ gewonnen werden. Die ganze Schwierigkeit beruht also in der Behandlung der transcendenten Gleichung für z. Hierzu kann man sich dreier Methoden bedienen: 1. der Entwickelung der rechten Seite der Gleichung für c in eine Potenzreihe, nämlich:

$$c = 1 + \frac{1}{3!} (\tfrac{1}{2} z)^2 + \frac{1}{5!} (\tfrac{1}{2} z)^4 + \cdots$$

2. der graphischen Darstellung, indem man z als Abscisse des Durchschnitts der Curve $y = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{1}{2}z} - e^{-\frac{1}{2}z}\right)$ mit der Geraden $y = \frac{1}{2} c z$ betrachtet, oder 3. indem man sich eine Tabelle entwirft, in welcher zu einem System von Werthen c die entsprechenden Werthe von z eingetragen sind oder aus welcher dieselben wenigstens leicht ermittelt werden können. Setzt man $\frac{1}{2} \left(e^{\frac{1}{2}z} + e^{-\frac{1}{2}z}\right) = \frac{1}{\sin\vartheta}$, so wird wegen $\frac{1}{\sin\vartheta} = \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \vartheta}$ der Ausdruck $\frac{1}{2} \left(e^{\frac{1}{2}z} - e^{-\frac{1}{2}z}\right) = \operatorname{cotg} \vartheta$,

mithin $e^{\frac{1}{2}z} = \operatorname{cotg}\vartheta + \frac{1}{\sin\vartheta} = \frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta$ und folglich

$$\tfrac{1}{2}z = l\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\vartheta.$$

Hierdurch nimmt die zu behandelnde transcendente Gleichung die Gestalt an:

$$\frac{1}{c} = \operatorname{tg}\vartheta \cdot l\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\vartheta.$$

Die Tafel hierfür, welche von Broch berechnet wurde (Lehrbuch der Mechanik, Berlin und Christiania 1854, S. 46) und in Moigno, *Leçons de mécanique analytique. Statique* p. 261, sowie auch in Duhamel, Lehrbuch der analytischen Mechanik, deutsch von Schlömilch, S. 162 aufgenommen ist, liefert zu $\frac{1}{c}$ den Werth von ϑ und es ergibt sich dann z durch die Gleichung $z = 2l\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta$.

Die Anwendung der Gudermann'schen Tafeln der hyperbolischen Functionen erleichtert die Berechnung von z und ermöglicht die Aufstellung einer Tafel für z selbst. Es ist nämlich

$$c = \frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}z}{\frac{1}{2}z}.$$

Aus der Gleichung $c = \frac{1}{z}\left(e^{\frac{1}{2}z} - e^{-\frac{1}{2}z}\right)$ lässt sich noch eine leichte Folgerung ziehen. Der Werth von c, also auch z ändert sich nicht, wenn $b = 0$, aber zugleich $\sqrt{l^2 - b^2}$ für l gesetzt wird. Ist aber $b = 0$, so liegen die beiden Aufhängepunkte in derselben Horizontalen. Bei gleichem a haben überhaupt alle die Kettenlinien denselben Parameter, für welche $l^2 - b^2$ denselben Werth besitzt. Ist α^2 dieser gemeinsame Werth, also $l^2 = \alpha^2 + b^2$ und construirt man (Fig. 30) zu $AB = a$ die Linie $A_0B = \alpha$, so ergibt sich zu jedem Aufhängepunkte B die Bogenlänge $A_0B = l = \sqrt{\alpha^2 + b^2}$ für den Kettenbogen ASB.

Entwickelt man die rechte Seite der Gleichung $y = \frac{1}{2}\alpha\left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)$ in eine Reihe, so ergibt sich $y - \alpha = \frac{1}{2!}\frac{x^2}{\alpha} + \frac{1}{4!}\frac{x^4}{\alpha^3} + \cdots$ und für sehr kleine x, also in der Nähe des Scheitels, stimmt diese Gleichung näherungsweise mit der Gleichung $y - \alpha = \frac{1}{2}\frac{x^2}{\alpha}$ überein, welche eine Parabel vom Parameter 4α bedeutet. Galilei, welcher zuerst die Gestalt eines schweren, an zwei Punkten aufgehängten Fadens zu bestimmen suchte, hielt dieselbe für eine Parabel. Jac. Bernoulli behandelte dies Problem zuerst analytisch und von ihm rührt der Name „Kettenlinie" her (*Acta eruditorum*. Lipsiae 1690, p. 217, oder *Opera* T. I, p. 424). Joh. Bernoulli, Leibnitz und Huyghens gaben 1691 gleichfalls in den *Act. erudit.* Lösungen.

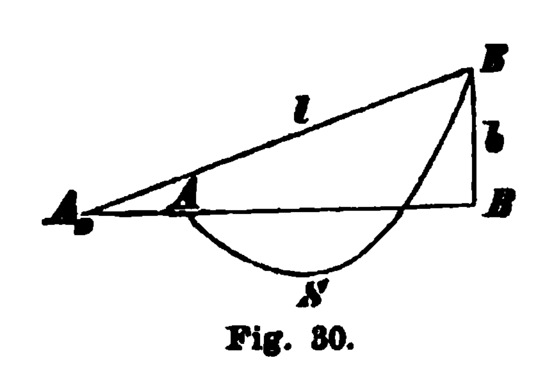


Fig. 30.

§. 4. Die Kettenlinie auf der schiefen Ebene. Ein homogener, schwerer Faden sei an zwei Punkten einer schiefen Ebene befestigt und liege auf der Ebene auf; dieselbe bilde mit der Vertikalen den Winkel α und werde zur xy-Ebene gewählt, sodass in ihr die x-Axe horizontal angenommen wird. Die y-Axe sei positiv nach oben gerichtet; die z-Axe, senkrecht zur xy-Ebene, liegt dann mit der y-Axe in einer Vertikalebene, welche den Neigungswinkel α ent-

hält. Man hat alsdann behufs Anwendung der Gleichungen §. 1., N. 5.: $X = 0$, $Y = -\delta g \cos\alpha$, $Z = -\delta g \sin\alpha$ und da $F = z = 0$ die Gleichung der Ebene des Fadens ist, $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 1$ und demnach $N_x = N_y = 0$, $N_z = N$, sodass die Gleichungen des Gleichgewichts werden:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) - \delta g \cos\alpha\, ds = 0, \quad -\delta g \sin\alpha\, ds + N ds = 0.$$

Die beiden ersten sind die Gleichgewichtsbedingungen eines freien Fadens, auf dessen Punkte die Schwerkraft nicht mit der vollen Beschleunigung g, sondern mit deren Componente $g\cos\alpha$ wirkt; der Faden bildet daher auf der Ebene eine Kettenlinie und da die Bestimmung dieser Curve dem vorigen §. zufolge diese Beschleunigung nicht enthält, so bleibt die Fadencurve dieselbe, wenn die Ebene um die Horizontale beliebig gedreht wird und stimmt überein mit der Kettenlinie des freihängenden Fadens. Die letzte Gleichung gibt den Druck auf die Ebene: $N = \delta g \sin\alpha$; derselbe ist in allen Punkten der Fadencurve gleich, variirt aber mit dem Winkel α und verschwindet mit α, d. h. für die vertikale Lage des Fadens.

Ueber die Kettenlinie auf der Kugelfläche und auf Rotationsflächen überhaupt s. Gudermann, *de curvis catenariis sphaericis dissertatio analytico-geometrica.* Crelle, Journ. Bd. 33, S. 189 u. 281; Biermann, *problemata quaedam mechanica functionum ellipticarum ope soluta.* Berolini 1865, §. 11 („*De catenariis in superficiebus curvis nonnullis rotatione generatis*"). — In mehrfacher Hinsicht wichtig ist die Abhandlung von Clebsch: „Ueber die Gleichgewichtsfigur eines biegsamen Fadens" (Crelle's Journal B. 57, S. 93 [1860]).

§. 5. Die Kettenlinie von constanter Spannung. Ein schwerer, biegsamer Faden sei an zwei Punkten befestigt; er sei nicht homogen, vielmehr sei die Masse so über ihn vertheilt, dass die Spannung in jedem Punkte der specifischen Masse proportional sei. Man soll die Gestalt des Fadens und das Gesetz der Massenvertheilung längs desselben ermitteln (Coriolis).

Die Bedingungen des Gleichgewichts sind

$$d \cdot T\frac{dx}{ds} = 0, \quad d \cdot T\frac{dy}{ds} - \delta g\, ds = 0, \quad T = a\delta,$$

wenn δ die specifische Masse im Punkte (x, y) und a ein Proportionalitätsfactor ist. Die erste Gleichung gibt $T\frac{dx}{ds} = T_0$, d. h. die Horizontalcomponente der Spannung ist constant, also gleich der ganzen Spannung T_0 im tiefsten Punkte. Hieraus folgt, wenn man noch $T_0 = a\delta_0$, d. h. die specifische Masse im tiefsten Punkte gleich δ_0 setzt:

$$T = T_0\frac{ds}{dx} = T_0 \operatorname{cosec}\psi, \quad \delta = \delta_0\frac{ds}{dx} = \delta_0 \operatorname{cosec}\psi,$$

wo ψ den Winkel, den die Tangente mit der Verticalen bildet, bedeutet. Hiemit geht die zweite Gleichung nach Elimination von T und δ wegen $T_0 = a\delta_0$ und $\delta = \delta_0\frac{ds}{dx}$ über in $a d \cdot \frac{dy}{dx} = g\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 dx$, d. h.

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{g}{a}.$$

Diese Gleichung ist gleichbedeutend mit

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} : \varrho = \frac{g}{a}, \quad \text{oder} \quad \varrho \sin\psi = \frac{a}{g},$$

d. h. **die Projection des Krümmungshalbmessers der Fadencurve auf die Verticale ist constant.**

Ihre Integration liefert $\operatorname{Arctg}\frac{dy}{dx} = g\,\frac{x}{a}$ oder

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} g\,\frac{x}{a},$$

ohne Constante, wenn der tiefste Punkt der Ursprung und die Tangente daselbst die x-Axe ist. Die nochmalige Integration liefert $y = -\frac{a}{g}\, l \cos g\,\frac{x}{a}$ oder

$$e^{g\frac{y}{a}} \cdot \cos g\,\frac{x}{a} = 1.$$

Aus $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} g\,\frac{x}{a}$ folgt $\frac{ds}{dx} = \sec g\,\frac{x}{a}$ und hiemit

$$T = T_0 \sec g\,\frac{x}{a}, \quad \delta = \delta_0 \sec g\,\frac{x}{a}.$$

Die Ordinatenaxe theilt die Fadencurve symmetrisch. Die durchaus positive Ordinate wird unendlich, wenn $\cos g\,\frac{x}{a} = 0$, d. h. $g\,\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi, \ldots$ d. h. $x = \frac{1}{2}\frac{\pi}{g}a,\ \frac{3}{2}\frac{\pi}{g}a,\ \frac{5}{2}\frac{\pi}{g}a, \ldots$ wird. Von $x = \frac{1}{2}\frac{\pi}{g}a$ bis $\frac{3}{2}\frac{\pi}{g}a$, von $x = \frac{5}{2}\frac{\pi}{g}a$ bis $\frac{7}{2}\frac{\pi}{g}a, \ldots$ ist y imaginär. Die Curve ist daher aus congruenten Aesten zusammengesetzt, jeder von zwei verticalen Asymptoten eingeschlossen, so dass der Flächenstreifen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Asymptoten $\frac{\pi}{g}a$ beträgt. Zwischen je zwei Streifen, welche je einen Curvenast enthalten, liegt ein leerer Streifen. Die horizontale Abscissenaxe berührt die Aeste in der Mitte der Streifen.

Die beiden Constanten a und T_0 oder a und δ_0 können bestimmt werden sobald ausser dem Coordinatenursprung noch ein Punkt (x_0, y_0), durch welchen die Curve hindurchgehen soll und das Gewicht G des Bogens vom Ursprung bis zu diesem Punkte gegeben ist. Man hat nämlich alsdann aus der Gleichung

$$e^{g\frac{y_0}{a}} \cdot \cos g\,\frac{x_0}{a} = 1$$

die Ordinate

$$y_0 = \frac{a}{g}\, l \sec g\,\frac{x_0}{a},$$

mithin, wenn man mit x_0 dividirt und $g\,\frac{x_0}{a} = \omega$ setzt:

$$\cos^{\frac{1}{\omega}} \omega = e^{-\frac{y_0}{x_0}}.$$

Ist aus dieser Gleichung ω mit Hülfe einer Tabelle gefunden, so liefert $g\,\frac{x_0}{a} = \omega$

den Proportionalitätsfactor $a = \frac{g}{\omega} x_0$. Ferner ist das Gewicht des Fadenelementes ds gleich

$$\delta g ds = \delta_0 g \sec g \frac{x}{a} \cdot \sec g \frac{x}{a} \cdot dx = \delta_0 g \sec^2 g \frac{x}{a} \cdot dx,$$

mithin das Gewicht des Bogens von $x = 0$ bis $x = x_0$:

$$G = \delta_0 g \int_0^{x_0} \frac{dx}{\cos^2 g \frac{x}{a}} = a \delta_0 \operatorname{tg} g \frac{x_0}{a} = T_0 \operatorname{tg} g \frac{x_0}{a} = T_0 \operatorname{tg} \omega$$

und also

$$T_0 = G \operatorname{cotg} \omega, \quad \delta_0 = \frac{T_0}{a} = \frac{G \omega}{g x_0} \operatorname{cotg} \omega.$$

§. 6. Die parabolische Kettenlinie. Ein gewichtloser Faden sei in seinen Elementen ds durch Gewichte continuirlich belastet, welche proportional den Projectionen dx dieser Elemente auf die Horizontale sind; man soll die Gestalt des Fadens bestimmen.

Es sei p die Last, welche auf einen Bogen fällt, dessen Horizontalprojection die Längeneinheit ist, dann wird $-pdx$ die Belastung von ds sein und bestehen folglich die Gleichungen:

$$d \cdot T \frac{dx}{ds} = 0, \quad d \cdot T \frac{dy}{ds} - p dx = 0.$$

Aus diesen folgt:

$$T \frac{dx}{ds} = T_0, \quad T \frac{dy}{ds} = px + C,$$

wovon die erste Gleichung aussagt, dass die Horizontalcomponente der Spannung constant ist. Weiter ergibt sich aus der letzten mit Hülfe der ersten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{T_0} x + C;$$

die nochmalige Integration liefert

$$y = \tfrac{1}{2} \frac{p}{T_0} x^2 + Cx$$

und zeigt, dass die gesuchte Curve eine Parabel ist. Eine weitere Constante tritt nicht hinzu, wenn einer der Aufhängepunkte als Coordinatenursprung gilt. Ist die Spannweite des Curvenbogens $2a$, so geht die Curve durch den Punkt $x = 2a$, $y = 0$ und erhält man zur Bestimmung der Constanten C die Gleichung: $0 = \frac{p}{T_0} \cdot 2a^2 + 2Ca$, d. h. $C = -\frac{pa}{T_0}$, wodurch die Parabelgleichung die Form annimmt: $y = \frac{1}{2} \frac{p}{T_0} (x^2 - 2ax)$. Verlegt man den Ursprung in die Mitte der Spannweite, so wird sie: $y = \frac{1}{2} \frac{p}{T_0} (x^2 + a^2)$. Um die Horizontalspannung T_0 durch Elemente der Curve auszudrücken, wollen wir die Länge des Fadens mit L bezeichnen, d. h.

$$L = a \sqrt{1 + \left(\frac{pa}{T_0}\right)^2} + \frac{T_0}{p} \, l \left(\frac{pa}{T_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{pa}{T_0}\right)^2}\right)$$

setzen. In den Anwendungen ist gewöhnlich der Unterschied $L - 2a$ zwischen

der Bogenlänge und der Spannweite sehr klein und folglich auch die Ordinate $\frac{1}{2}\frac{pa^2}{T_0}$ des Scheitels oder der Pfeil des Bogens und also auch $\frac{pa}{T_0}$ sehr klein und kann man daher die Wurzelgrösse und den Logarithmus in Reihen entwickeln, nämlich für $\frac{pa}{T_0} = z$:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{1+z^2} &= 1 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{z^4}{4} + \cdots \\ l\,(z+\sqrt{1+z^2}) &= \frac{z}{1} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^5}{5} - \cdots \end{aligned}\right\} -1 < z < +1$$

setzen, wodurch $L = 2a + \frac{1}{3}\frac{p^2a^3}{T_0^2} + \cdots$ und folglich annähernd $T_0 = \frac{pa\sqrt{a}}{\sqrt{3L-2a}}$ wird.

Besser entwirft man sich eine Tabelle, indem man in

$$\frac{L}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{pa}{T_0}\right)^2} + \frac{T_0}{pa}\,l\left(\frac{pa}{T_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{pa}{T_0}\right)^2}\right)$$

die Grösse $\frac{pa}{T_0} = \operatorname{tg}\omega$ setzt, wo ω den Neigungswinkel der Tangente in einem Aufhängepunkte gegen die Horizontale bedeutet. Man hat dann behufs Berechnung der Tabelle

$$\frac{L}{a} = \sec\omega + \operatorname{cotg}\omega\; l\,(\operatorname{tg}\omega + \sec\omega).$$

§. 7. **Die Kettenlinie constanter Spannung bei einer continuirlichen Belastung, welche in horizontalem Sinne gleichmässig vertheilt ist.** Der biegsame Faden sei belastet durch sein eigenes Gewicht und ausserdem durch continuirlich über ihn vertheilte, den Horizontalprojectionen der Bogenelemente proportionale Gewichte; welches ist die Gestalt der Fadencurve, wenn das Gesetz der Massenvertheilung des Fadens so bestimmt ist, dass die Spannung in jedem Punkte der specifischen Masse δ desselben proportional sein soll?

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen sind die Gleichungen des Problems:

$$d\cdot T\frac{dx}{ds} = 0, \quad d\cdot T\frac{dy}{ds} - (\delta g\,ds + p\,dx) = 0, \quad T = a\delta,$$

von denen die erste $T\frac{dx}{ds} = T_0$ liefert, so dass $T = T_0\frac{ds}{dx} = T_0\operatorname{cosec}\psi$ und ebenso $\delta = \delta_0\frac{ds}{dx} = \delta_0\operatorname{cosec}\psi$ wird. Die zweite Gleichung liefert sodann

$$T_0\,d\cdot\frac{dy}{dx} = \delta g\,ds + p\,dx$$

oder da $T_0 = a\delta_0$ und $\delta = \delta_0\frac{ds}{dx}$ und $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ ist,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g}{a}\left[\left(1 + \frac{p}{\delta_0 g}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

Dividirt und multiplicirt man rechts mit $1 + \frac{p}{\delta_0 g}$ und setzt $y : \sqrt{1 + \frac{p}{\delta_0 g}} = Y$,

so kommt

$$\frac{\frac{d^2 Y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dY}{dx}\right)^2} = \frac{g}{a}\sqrt{1+\frac{p}{\delta_0 g}}.$$

Dies ist dieselbe Differentialgleichung, wie beim Problem §. 5; es ist blos $g\sqrt{1+\frac{p}{\delta_0 g}}$ an die Stelle von g getreten. Sie gibt daher die Gleichung der Fadencurve

$$e^{g\sqrt{1+\frac{p}{\delta_0 g}}\cdot\frac{Y}{a}} \cos\left(g\sqrt{1+\frac{p}{\delta_0 g}}\cdot\frac{x}{a}\right) = 1$$

oder nach der Restitution von y

$$e^{g\frac{y}{a}} \cdot \cos\left(g\sqrt{1+\frac{p}{\delta_0 g}}\cdot\frac{x}{a}\right) = 1.$$

Die Fadencurve ist daher dieselbe, wie beim vorigen Problem, nur ist die Breite der Streifen eine andere, nämlich:

$$\frac{\pi a}{g\sqrt{1+\frac{p}{\delta_0 g}}}.$$

§. 8. Probleme zur Bearbeitung.

1. Eine homogene, schwere Kette, deren Glieder als unendlich klein angesehen werden sollen, ist mit ihrem einen Ende an einem Punkte B fest und hängt von diesem herab, jedoch so, dass ein Theil derselben am anderen Ende A auf einer Horizontalebene E mit Reibung vom Coefficienten μ aufliegt. Welches sind die äussersten Gleichgewichtslagen der Kette, in welchen also ein möglichst kleiner Theil derselben mit der Horizontalebene in Berührung kommt und wie ist die Spannung in einer solchen Gleichgewichtslage beschaffen?

Ist b die ganze Länge der Kette, λ die des aufliegenden Stücks, b die Höhe von B über E, x der Abstand des Scheitels S (des Endpunktes von λ, da die Kette E berührt), α der Parameter, so wie p das Gewicht der Längeneinheit, so wird $T_0 = \alpha p = \mu p \lambda$, $l - \lambda = \frac{1}{2}\alpha\left(e^{\frac{x}{\alpha}} - e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)$, $b + \alpha = \frac{1}{2}\alpha\left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)$, woraus α, λ, x folgen.

2. Eine homogene schwere Kette von der Länge l hängt mit einem Ende an einem festen Punkte B, ihr anderes Ende A ist an einer schweren Masse vom Gewichte g befestigt, welche mit Reibung μ auf einer durch A gehenden Horizontalebene über einen Einschnitt hinweggleiten kann, in welchen die Kette hineinhängt. Welches ist die äusserste Entfernung, auf welche A von der Verticalen des Punktes B ohne Störung des Gleichgewichts hinweggeschoben werden kann und welches sind Gestalt und Spannung der Kette für diesen Fall?

3. Von einer gemeinen Kettenlinie sind gegeben zwei Punkte A, B und ihre Abstände y_1, y_2 von der Directrix, sowie ihr Horizontal-

abstand a; man soll den Scheitel, den Parameter und die Bogenlinie zwischen A und B finden. (Zwei Lösungen.)

4. Ein schwerer, homogener, undehnbarer Faden von der Länge l wird über zwei gleichhochliegende, um die Strecke $2a$ von einander abstehende Punkte gehangen, sodass die Enden herabfallen und er eine Gleichgewichtslage annimmt. Welche Grösse muss l mindestens haben, damit das Gleichgewicht überhaupt möglich sei? Wie viele Gleichgewichtslagen sind für denselben Werth von l möglich, wie unterscheiden sie sich statisch und wie findet man den Parameter α der Kettenlinie, den Druck P auf die Stützpunkte und die Neigung φ der Endtangenten gegen die Directrix? Wie modificirt sich die Untersuchung, wenn die Stützpunkte nicht in gleicher Höhe liegen? Welchen Gang hat die Untersuchung einzuschlagen, wenn der Faden über drei Stützpunkte hinwegläuft und welchen besonderen Einfluss übt dabei die relative Lage des mittelbaren Stützpunktes gegen die Verbindungslinie der beiden äusseren aus?

§. 9. An die im Vorstehenden behandelten Lehren können sich weitere Untersuchungen über biegsame Netze und biegsame Flächen anreihen. Das Problem biegsamer Flächen ist eng verwandt mit dem rein geometrischen schwierigen Problem der Deformation der Flächen.

VII. Capitel.

Einige statische Probleme über das Gleichgewicht von Kräften an elastischen Systemen.

§. 1. Es seien zwei Punkte A, B so miteinander durch eine veränderliche gerade Linie verbunden, dass wenn ihre Entfernung AB durch Kräfte vergrössert oder verkleinert wird, dieselbe wieder abnimmt oder wächst, wenn die Kräfte aufhören zu wirken. Wir sagen, die Punkte seien elastisch mit einander verbunden.

Nehmen wir an, dass unter Einwirkung zweier Kräfte P, Q, welche an A und B angreifen (Fig. 31) und deren Richtungslinien in die Gerade AB fallen, Gleichgewicht eingetreten sei, nachdem die Linie AB eine Aenderung x erlitten habe, wobei x positiv oder negativ angenommen werden soll, je nachdem es eine Verlängerung oder Verkürzung der Entfernung AB bedeutet. Schneiden wir die elastische Verbindung durch, so sind, um das Gleichgewicht zu erhalten, zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte nöthig, eine an A, die andere an B, längs AB wirkend erforderlich. Diese beiden gleichen Kräfte, welche die Elasticität der Verbindung repräsentiren und die wir elastische Kräfte (Spannungen oder Pressungen) nennen, hängen von der Aenderung x ab, welche AB durch die Kräfte P, Q erlitten hat. Sie verschwinden mit x und wechseln das Zeichen mit einem Zeichenwechsel von x. Ueber die Natur der Function von x, welche diese Kräfte darstellen kann, sind verschiedene Voraussetzungen möglich, deren jede eine besondere Art von Elasticität der Verbindung ausdrückt. Nehmen wir den

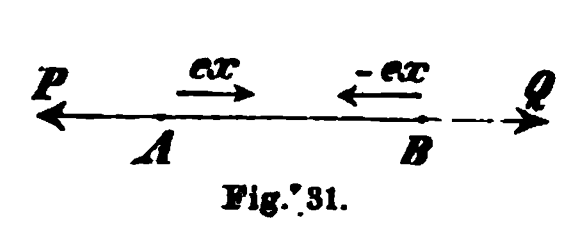


Fig. 31.

einfachsten Fall an, dass dieselbe algebraisch vom 1. Grade sei, so sind die Kräfte ex und $-ex$, wo e eine Constante ist. Da das Gleichgewicht nach der Trennung an beiden Punkten für sich fortbesteht, so erhalten wir die Gleichungen $P + ex = 0$ und $Q - ex = 0$, wobei der Sinn der Kräfte positiv im Sinne von AB sei und P, Q als positive oder negative Grössen zu betrachten sind. Diese Gleichungen liefern durch Addition $P + Q = 0$, d. h. die Kräfte P, Q müssen der Gleichgewichtsbedingung, wie am unveränderlichen System genügen, sie müssen nämlich entgegengesetzt gleich sein. Weiter erhalten wir, wenn diese Bedingung erfüllt ist, aus beiden die Aenderung des Abstandes AB, nämlich $x = \frac{-P}{e} = \frac{Q}{e}$. Ist P negativ, also Q positiv, d. h. wirken P, Q nach aussen ziehend, so ist x positiv und drückt eine Verlängerung von AB aus; ist P positiv und Q negativ, d. h. wirken P, Q pressend nach innen, so ist x negativ, also eine Verkürzung. Der constante Coefficient e kann aufgefasst werden, als die Intensität der elastischen Kraft, welche der Aenderung der Länge AB gleich 1 entspricht.

Die elastischen Kräfte sind gedachte Kräfte, welche einen Widerstand gegen die freie Beweglichkeit der Punkte AB ausdrücken, ebenso wie die früheren Spannungen und Pressungen T, die wir einführten, wenn wir eine unveränderliche Verbindung zweier Punkte A, B lösten; dort war der Widerstand ein absoluter, hier ist er abhängig von den wirkenden Kräften P, Q. Die Einführung der elastischen Spannungen ist nur der Ausdruck einer gewissen dem Punktsystem auferlegten Bedingung; sie sind Bedingungskräfte.

§. 2. Es seien A, B, C drei Punkte in gerader Linie und sowohl A und B, als B und C, als auch A und C elastisch mit einander verbunden. An ihnen greifen Kräfte P, Q, R an, welche in die Gerade ABC fallen. In Folge ihrer Einwirkung erleiden die drei Strecken AB, BC, AC die Aenderungen x, y, $z = x + y$ und trete Gleichgewicht ein. Die elastischen Kräfte, welche nach Lösung der Verbindungen das Gleichgewicht erhalten, seien fx, gy, hz, sodass längs AB die Kräfte fx und $-fx$, längs BC die Kräfte gy und $-gy$ und hz, $-hz$ längs AC einzuführen sind. Das Gleichgewicht an den Punkten A, B, C verlangt alsdann:

$$P + fx + hz = 0, \quad Q - fx + gy = 0, \quad R - gy - hz = 0, \quad \text{wo } z = x + y.$$

Aus ihnen folgt durch Addition: $P + Q + R = 0$, d. h. die Kräfte P, Q, R erfüllen die Bedingung des Gleichgewichts am unveränderlichen System. Weiter erhalten wir die Gleichungen

$$(fg + gh + hf)\,x = Qh - Pg, \quad (fg + gh + hf)\,y = Rf - Qh,$$
$$(fg + gh - hf)\,z = Rf - Pg,$$

von denen jede eine Folge der beiden andern ist und aus ihnen ergeben sich die Aenderungen x, y, $z = x + y$. Sind also P, Q, R und die Coefficienten f, g, h gegeben, so können die Aenderungen x, y, z gefunden werden, welche je nach dem Vorzeichen Dehnungen oder Verkürzungen darstellen und ebenso die elastischen Spannungen oder Pressungen im Innern der Strecken AB, BC, AC, nämlich fx, gy, hz.

§. 3. Es seien n Punkte in gerader Linie paarweise sämmtlich elastisch mit einander verbunden und wirken an ihnen Kräfte, P, Q, R, . . . welche in dieselbe Gerade fallen. Indem man die elastischen Kräfte einführt und die Verbindungen der Punkte löst, erhält man n Gleichgewichtsbedingungen, soviele als

Punkte. Aus ihnen ergibt sich durch Addition eine, welche frei von den elastischen Kräften ist, indem diese, paarweise entgegengesetzt gleich, durch die Addition eliminirt werden. Sie drückt aus, dass die gegebenen Kräfte der Gleichgewichtsbedingung von Kräften in einer unveränderlichen Linie genügen müssen. Ausser ihr sind noch $n-1$ andere Gleichungen vorhanden, welche von einander unabhängig sind und die Kräfte $P, Q, \ldots$ mit den elastischen Kräften verbunden enthalten. Sie liefern die Aenderungen der Abstände der Punkte. Bei n Punkten in gerader Linie kann man aber aus $n-1$ Aenderungen ihrer Abstände die Aenderungen aller Abstände und hiemit auch alle Spannungen finden, da diese ihnen proportional sind.

§. 4. Es seien A, B, C drei Punkte in gerader Linie, A mit B, B mit C, nicht aber A mit C elastisch verbunden. An A und C greifen Kräfte P, R in der Richtung der Geraden an, an B aber greift keine Kraft an, sodass Q in den Formeln des §. 2 gleich Null ist. Dann bestehen die Gleichungen:

$$P + fx = 0, \quad -fx + gy = 0, \quad R - gy = 0,$$

woraus $P + R = 0$ und $x = -\frac{P}{f}, \quad y = \frac{f}{g}x = -\frac{P}{g} = \frac{R}{g}$ folgen.

Aehnlich hat man, wenn von $n+1$ Punkten in gerader Linie jeder mit dem folgenden elastisch verbunden ist und $f, g, h, \ldots$ die Coefficienten der Elasticität sind, wenn blos am ersten und letzten Punkte die Kräfte P, Q angreifen

$$P + fx = 0, \quad -fx + gy = 0, \quad -gy + hz = 0, \ldots .$$

woraus

$$P + Q = 0, \quad x = -\frac{P}{f} = \frac{Q}{f}, \quad y = -\frac{P}{g}, \quad z = -\frac{P}{h}, \ldots$$

folgen. Die Aenderung λ der ganzen Länge l vom ersten bis zum letzten Punkte ist daher

$$\lambda = -P\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g} + \frac{1}{h} + \cdots\right).$$

Sind insbesondere die ursprünglichen Abstände AB, BC, $CD, \ldots$ alle gleich, so ist $l = n \cdot AB$ und wenn die Coefficienten $f, g, h, \ldots$ ebenfalls alle gleich, d. h. die Elasticität in allen Strecken AB, BC, $CD, \ldots$ dieselbe ist, so wird die Gesammtänderung

$$\lambda = -\frac{nP}{f} = \frac{nQ}{f} = \frac{lQ}{f \cdot AB}.$$

Es ist demnach die Gesammtänderung der ursprünglichen Länge der Intensität der spannenden Kraft direct und der Grösse $f \cdot AB$ umgekehrt proportional. Nimmt AB ohne Ende ab, so geht die Strecke l in eine continuirliche, homogene, gleichartig dehnbare oder zusammendrückbare Linie über. Der Coefficient f wird im Allgemeinen von AB abhängen. Lassen wir, da über diese Abhängigkeit nichts vorausgesetzt ist, die Voraussetzung eintreten, dass f mit der Abnahme von AB sehr rasch wachse, sodass $f \cdot AB$ sich einer Constanten E als Grenze nähere, so gilt, wenn wir den absoluten Werth der spannenden Kraft P nennen, die Formel

$$\lambda = \frac{lP}{E}$$

für die Aenderung λ der Länge l einer continuirlichen homogenen, gleichartig elastischen Strecke durch zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte von der Intensität P.

Die Grösse E heisst der Elasticitätsmodulus. In den Anwendungen drückt sie die specifische Beschaffenheit der Elasticität des Materials aus, aus welchen die elastische Strecke besteht und ist meist eine ausserordentlich grosse Zahl. Für $P = 1$, $l = 1$ wird $\lambda = 1 : E = \varepsilon$. Es ist also $1 : E$ oder ε die Verlängerung, welche die Linieneinheit durch zwei entgegengesetzt gleiche, sie spannende Krafteinheiten erleidet (Ausdehnungscoefficient).

Aus der Formel für λ erhält man

$$P = E\frac{\lambda}{l}$$

für die Kraft, welche im Stande ist, die Strecke l um λ zu verlängern. Für $\lambda = l$ wird $P = E$, d. h. der Elasticitätsmodulus gibt die Intensität der Kräfte an, welche eine Länge l um sich selbst zu verlängern im Stande sein würden.

§. 5. Es seien n Punkte in der Ebene elastisch mit einander verbunden und wirken an ihnen Kräfte P, Q, ... Für das Gleichgewicht eines solchen Systems bestehen $2n$ Gleichungen zwischen diesen Kräften und den elastischen Spannungen, nämlich für die Kräfte an jedem Punkte zwei. Eliminirt man aus diesen Gleichungen die elastischen Spannungen, so müssen drei Gleichungen für das Gleichgewicht am unveränderlichen System bleiben. Die $2n - 3$ übrigen Gleichungen dienen dazu die Aenderungen von $2n - 3$ Abständen der Punkte unter einander und damit die Aenderungen aller Abtsände sowie die diesen proportionalen elastischen Kräfte zu bestimmen. Dies ist möglich; denn, wenn $2n - 3$ Abstände gegeben sind, so können alle $\frac{1}{2}n(n-1)$ Abstände, also auch ihre Aenderungen gefunden werden. Sind die Punkte nicht alle unter sich elastisch verbunden, sondern nur reihenweise, sodass jeder Punkt nur zwei sich in ihr kreuzenden Reihen angehört, so ist das System ein ebenes elastisches Netz, dessen Gleichgewichtsfigur und Spannungen also bestimmt werden können.

Wenn bei einem Punktsystem, dessen Punkte mit einander verbunden sind, die Anzahl der Verbindungslinien grösser ist, als die Zahl derer, welche hinreichen, um die Lage aller Punkte zu bestimmen, und das Punktsystem ist unveränderlich, so ist es nicht möglich alle Spannungen und Pressungen der unveränderlichen Verbindungslinien zu bestimmen, dieselben bleiben vielmehr zum Theil unbestimmt. Sind die Verbindungen aber elastisch dehnbar oder zusammendrückbar, so können sie alle gefunden werden.

Bei n Punkten im Raume, welche elastisch mit einander verbunden sind und von Kräften afficirt werden, ergeben sich nach Einführung der elastischen Kräfte $3n$ Gleichungen. Eliminirt man diese Kräfte, so bleiben 6 Gleichungen zwischen den gegebenen Kräften, welche das Gleichgewicht am unveränderlichen System ausdrücken; die übrigen $3n - 6$ Gleichungen liefern ebensoviele Aenderungen von Abständen, aus welchen alle übrigen gefunden werden können. Sind die Punkte unveränderlich verbunden, so gilt eine der vorigen ähnliche Bemerkung.

§. 6. Gleichgewicht von Kräften am elastisch dehnbaren, aber vollkommen biegsamen Faden.

Ein elastisch dehnbarer Faden von vollkommener Biegsamkeit werde an allen Bogenelementen von Kräften ergriffen und es trete nach der Dehnung ein Gleichgewichtszustand ein; man soll die Bedingungen des Gleichgewichts aufstellen und die Gleichgewichtsfigur, die Spannung und Dehnung derselben finden.

1. Indem wir die elastischen Kräfte in jedem Bogenelemente einführen, können wir den Faden als unelastisch aber vollkommen biegsam ansehen und gelten für ihn die Bedingungsgleichungen des Cap. VI. Sind also x, y, z die Coordinaten eines Punktes der Gleichgewichtsfigur des Fadens, ds das Bogenelement, ϱ' dessen specifische Masse, also $\varrho' ds$ seine Masse, T die Spannung und $\varrho' X ds$, $\varrho' Y ds$, $\varrho' Z ds$ die Componenten der Kraft $\varrho' P ds$, welche an ds angreift, wo P, X, Y, Z die Beschleunigung und ihre Componenten, welche die Kraft einem Punkte zu ertheilen vermag oder was dasselbe ist, die Kraft und ihre Componenten bezogen auf die Masseneinheit bedeuten, so sind die drei Gleichgewichtsbedingungen im Punkte (x, y, z):

$$d \cdot T \frac{dx}{ds} + \varrho' X ds = 0, \quad d \cdot T \frac{dy}{ds} + \varrho' Y ds = 0, \quad d \cdot T \frac{dz}{ds} + \varrho' Z ds = 0.$$

Das Bogenelement ds, dessen ursprüngliche Länge $d\sigma$ sei, hat seine Länge durch Dehnung in Folge der Spannung T erlangt und ist daher

$$ds = d\sigma + \varepsilon T d\sigma = d\sigma (1 + \varepsilon T)$$

wenn ε den Ausdehnungscoefficienten bedeutet. War ϱ die ursprüngliche specifische Masse im Punkte (x, y, z), so war $\varrho d\sigma$ die Masse des Bogenelementes vor der Dehnung. Nach der Dehnung ist sie $\varrho' ds$ und da dieselbe sich nicht geändert hat, so muss $\varrho d\sigma = \varrho' ds$, d. h. $\varrho d\sigma = \varrho' d\sigma (1 + \varepsilon T)$, oder

$$\varrho' = \frac{\varrho}{1 + \varepsilon T}$$

sein. Setzt man diesen Werth in die Gleichungen des Gleichgewichts ein, so werden sie:

$$\begin{aligned}
&d \cdot T \frac{dx}{ds} + \frac{\varrho X}{1 + \varepsilon T} ds = 0, & & (1 + \varepsilon T)\, d \cdot T \frac{dx}{ds} + \varrho X ds = 0, \\
&d \cdot T \frac{dy}{ds} + \frac{\varrho Y}{1 + \varepsilon T} ds = 0, & \text{oder:} \quad & (1 + \varepsilon T)\, d \cdot T \frac{dy}{ds} + \varrho Y ds = 0, \\
&d \cdot T \frac{dz}{ds} + \frac{\varrho Z}{1 + \varepsilon T} ds = 0, & & (1 + \varepsilon T)\, d \cdot T \frac{dz}{ds} + \varrho Z ds = 0.
\end{aligned}$$

War der Faden ursprünglich homogen, so ist ϱ constant. X, Y, Z sind Functionen des Ortes (x, y, z). Diese Gleichungen liefern T und nach Elimination dieser Grösse die Gestalt des Fadens.

2. Um die Spannung T als Function von x, y, z darzustellen, hat man, indem man die Gleichungen des Gleichgewichts mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ multiplicirt und addirt, dabei aber berücksichtigt, dass

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \quad \frac{dx}{ds}\, d \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\, d \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\, d \cdot \frac{dz}{ds} = 0,$$

$$(1 + \varepsilon T)\, dT = \frac{1}{\varepsilon}\, d \cdot \tfrac{1}{2} (1 + \varepsilon T)^2$$

ist:

$$\frac{1}{2\varepsilon}\, d \cdot (1 + \varepsilon T)^2 = -\varrho (X dx + Y dy + Z dz).$$

Da das Verlängerungsverhältniss $\frac{ds}{d\sigma} = 1 + \varepsilon T$ ist, so folgt für dasselbe hieraus

$$\frac{1}{2\varepsilon}\, d \cdot \left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = -\varrho (X dx + Y dy + Z dz).$$

Da ferner das Verdünnungsverhältniss $\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{ds}{d\sigma}$, so ergibt sich auch dieses hiemit.

8. Um die Spannung T aus den Gleichungen des Gleichgewichts zu eliminiren, führen wir die Differentiation in denselben aus und erhalten:

$$(1+\varepsilon T)\,Td\cdot\frac{dx}{ds}+(1+\varepsilon T)\,dT\cdot\frac{dx}{ds}+\varrho X ds=0,$$

$$(1+\varepsilon T)\,Td\cdot\frac{dy}{ds}+(1+\varepsilon T)\,dT\cdot\frac{dy}{ds}+\varrho Y ds=0,$$

$$(1+\varepsilon T)\,Td\cdot\frac{dz}{ds}+(1+\varepsilon T)\,dT\cdot\frac{dz}{ds}+\varrho Z ds=0,$$

und hieraus, indem wir dT eliminiren:

$$\begin{vmatrix}\frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds}\\ Y & Z\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}\frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds}\\ d\cdot\frac{dy}{ds} & d\cdot\frac{dz}{ds}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds}\\ Z & X\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}\frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds}\\ d\cdot\frac{dz}{ds} & d\cdot\frac{dx}{ds}\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}\frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds}\\ X & Y\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}\frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds}\\ d\cdot\frac{dx}{ds} & d\cdot\frac{dy}{ds}\end{vmatrix} = -\frac{(1+\varepsilon T)\,T}{\varrho ds},$$

sodass die Gleichsetzung der drei ersten Ausdrücke untereinander die Differentialgleichungen der Fadencurve geben.

§. 7. Die elastisch dehnbare Kettenlinie.

Es wirke auf den Faden die Schwere, so dass bei vertical gedachter y-Axe und horizontalen x- und z-Axen $X=0$, $Y=-g$, $Z=0$ und wie leicht zu sehen, die Fadencurve eben ist. Man hat dann, wenn man die Ebene der Curve zur xy-Ebene wählt und ϱ constant, d. h. den Faden im ungedehnten Zustande als homogen voraussetzt, die beiden Gleichungen:

$$d\cdot T\frac{dx}{ds}=0,\quad (1+\varepsilon T)\,d\cdot T\frac{dy}{ds}=g\varrho ds.$$

Aus der ersten von ihnen folgt $T\frac{dx}{ds}=T_0$, d. h. die Horizontalcomponente der Spannung ist constant, gleich der Spannung T_0 im tiefsten Punkte. Hieraus ergibt sich weiter

$$T=T_0\frac{ds}{dx}=T_0\operatorname{cosec}\psi=\frac{T_0}{\sin\psi},$$

wenn ψ, wie früher, den Winkel der Tangente der Fadencurve mit der Verticalen bedeutet.

Die zweite Gleichung gibt hiemit, da $\frac{dy}{dx}=\operatorname{cotg}\psi$ ist

$$\left(1+\frac{\varepsilon T_0}{\sin\psi}\right)d\cdot T_0\operatorname{cotg}\psi=g\varrho ds,$$

mit deren Hülfe man die Coordinaten x, y als Functionen von ψ finden kann. Es ist nämlich $dx=ds\sin\psi$, $dy=ds\cos\psi$ und daher

$$g\varrho dx=g\varrho ds\sin\psi=(\sin\psi+\varepsilon T_0)\,d\cdot T_0\operatorname{cotg}\psi,$$

$$g\varrho dy=g\varrho ds\cos\psi=(\cos\psi+\varepsilon T_0\operatorname{cotg}\psi)\,d\cdot T_0\operatorname{cotg}\psi.$$

Setzen wir, wie bei der gemeinen Kettenlinie $T_0=g\varrho\alpha$, d. h. drücken wir

die Horizontalspannung durch das Gewicht eines Fadenstückes α aus, so wird

$$dx = \alpha \sin\psi\, d\cdot\operatorname{cotg}\psi + \varepsilon g\varrho\alpha^2\, d\cdot\operatorname{cotg}\psi$$
$$= -\alpha\frac{d\psi}{\sin\psi} + \varepsilon g\varrho\alpha^2 d\cdot\operatorname{cotg}\psi = -\alpha\frac{d\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi} + \varepsilon g\varrho\alpha^2 d\cdot\operatorname{cotg}\psi$$
$$dy = \alpha\cos\psi d\cdot\operatorname{cotg}\psi + \varepsilon g\varrho\alpha^2\operatorname{cotg}\psi d\,.\operatorname{cotg}\psi$$
$$= -\alpha\frac{\cos\psi\, d\psi}{\sin^2\psi} + \tfrac{1}{2}\varepsilon g\varrho\alpha^2 d\cdot\operatorname{cotg}^2\psi\,.$$

Die Integration dieser Ausdrücke liefert

$$x = -\alpha\, l\cdot\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi + \varepsilon g\varrho\alpha^2\operatorname{cotg}\psi,$$
$$y = \frac{\alpha}{\sin\psi} + \tfrac{1}{2}\varepsilon g\varrho\alpha^2\operatorname{cotg}^2\psi,$$

ohne Constanten, wenn wir die Ordinatenaxe durch den tiefsten Punkt, sodass $x = 0$ wird für $\psi = \frac{1}{2}\pi$ und den Ursprung um die Grösse α tiefer legen, als diese liegt, sodass $y = \alpha$ wird für $\psi = \frac{1}{2}\pi$. Die Elimination von ψ liefert die Gleichung der Fadencurve in x, y.

Für eine sehr geringe Dehnbarkeit ist ε sehr klein. Mit Vernachlässigung von ε^2, ε^3, ... gelangen wir auf folgendem Wege zu der Elimination von ψ. Setzen wir abkürzend

$$-\varepsilon g\varrho\alpha^2\operatorname{cotg}\psi = -\tfrac{1}{2}\varepsilon g\varrho\alpha^2(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\psi - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi) = u,$$
$$-\tfrac{1}{2}\varepsilon g\varrho\alpha^2\operatorname{cotg}^2\psi = -\tfrac{1}{8}\varepsilon g\varrho\alpha^2(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\psi - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi)^2 = v,$$

so werden die beiden Gleichungen

$$x + u = -\alpha l\cdot\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi,\quad y + v = \tfrac{1}{2}\alpha(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\psi + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi).$$

Aus der ersten zieht man

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi = e^{-\frac{x}{\alpha}-\frac{u}{\alpha}} = e^{-\frac{x}{\alpha}}\left(1 - \frac{u}{\alpha} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{u}{\alpha}\right)^2 - \cdots\right),$$
$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\psi = e^{\frac{x}{\alpha}+\frac{u}{\alpha}} = e^{\frac{x}{\alpha}}\left(1 + \frac{u}{\alpha} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{u}{\alpha}\right)^2 + \cdots\right)$$

und hiemit

$$u = -\tfrac{1}{2}\varepsilon g\varrho\alpha^2\left\{\left(e^{\frac{x}{\alpha}} - e^{-\frac{x}{\alpha}}\right) + \left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)\frac{u}{\alpha} + \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{\alpha}} - e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)\left(\frac{u}{\alpha}\right)^2 + \cdots\right\}$$
$$v = -\tfrac{1}{8}\varepsilon g\varrho\alpha^2\left\{\left(e^{\frac{x}{\alpha}} - e^{-\frac{x}{\alpha}}\right) + \left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)\frac{u}{\alpha} + \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{\alpha}} - e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)\left(\frac{u}{\alpha}\right)^2 + \cdots\right\}^2,$$

oder da u den Factor ε enthält, bis zu den Termen der Ordnung ε^2 genau:

$$u = -\tfrac{1}{2}\varepsilon g\varrho\alpha^2\left(e^{\frac{x}{\alpha}} - \varepsilon^{-\frac{x}{\alpha}}\right),\quad v = -\tfrac{1}{8}\varepsilon g\varrho\alpha^2\left(e^{\frac{x}{\alpha}} - e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)^2.$$

Durch Einsetzen in den Ausdruck für $y + v$ ergibt sich daher

$$y - \tfrac{1}{8}\varepsilon g\varrho\alpha^2\left(e^{\frac{x}{\alpha}} - e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\alpha\left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}}\right) - \tfrac{1}{4}\varepsilon g\varrho\alpha^2\left(e^{\frac{x}{\alpha}} - e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)^2$$

oder

$$y = \tfrac{1}{2}\alpha\left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}}\right) - \tfrac{1}{8}\varepsilon g\varrho\alpha^2\left(e^{\frac{x}{\alpha}} - e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)^2.$$

Die Ordinate der elastischen Kettenlinie ist also etwas kleiner, als die der unelastischen. Die Senkung $\frac{1}{8}\varepsilon g\varrho\alpha^2\left(e^{\frac{x}{\alpha}} - e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)$ wächst mit x, im Scheitel ist sie Null.

Für das Verlängerungsverhältniss ist

$$\frac{d\sigma}{ds} = \left(1 + \varepsilon T\right)^{-1} = 1 - \varepsilon T = 1 - \varepsilon T_0 \frac{ds}{dx} = 1 - \varepsilon T_0 \operatorname{cosec}\psi = 1 - \varepsilon g\varrho\alpha \operatorname{cosec}\psi.$$

Es ist aber $y = \alpha \operatorname{cosec}\psi + \frac{1}{2}\varepsilon g\varrho\alpha^2 \operatorname{cotg}^2\psi$, also wird bis zur Ordnung von ε^2 genau

$$\frac{d\sigma}{ds} = 1 - \varepsilon g\varrho y,$$

also

$$\sigma = s - \varepsilon g\int\varrho y\, ds;$$

oder weil $\int\varrho y\, ds = m \cdot y_1$ ist, wenn y_1 die Ordinate des Massenmittelpunktes und m die Masse von s bedeutet, so wird die Verlängerung des Bogens s:

$$s - \sigma = \varepsilon g m y_1.$$

§. 8. **Der vertical herabhängende, schwere elastische Faden.** Es sei der schwere Faden am oberen Ende durch eine verticale Kraft festgehalten oder befestigt. Dann ist in den allgemeinen Gleichungen des §. 6 $X = Y = 0$, $Z = -g$ und daher

$$d\cdot T\frac{dx}{ds} = 0,\quad d\cdot T\frac{dy}{ds} = 0,\quad d\cdot T\frac{dz}{ds} - \frac{g\varrho\, ds}{1 + \varepsilon T} = 0,\quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{1 + \varepsilon T}.$$

Hieraus folgt, dass die beiden horizontalen Componenten $T\frac{dx}{ds}$ und $T\frac{dy}{ds}$ der Spannung constant und da sie, wenn wir die Verticale des oberen Endes zur z-Axe wählen, an diesem Ende Null sind, überhaupt verschwinden, d. h. dass $\frac{dx}{ds} = 0$, $\frac{dy}{ds} = 0$ sind. Dies liefert weiter, dass x und y constant, und da sie für das obere Ende Null sind, durchweg Null sind. Demnach bildet die Fadencurve eine Verticallinie. Für die noch übrigbleibenden Gleichungen wollen wir z und s positiv vom unteren Ende an aufwärts rechnen. Dann ist $ds = dz$ und geht die dritte Gleichung mit Hülfe der vierten über in

$$dT = g\varrho\, d\sigma$$

und liefert

$$T = g\varrho\sigma,$$

ohne Constante, da wir am unteren Ende $T = 0$ haben, wenn wir dort keine Kraft wirkend annehmen, sondern der Faden blos durch sein Gewicht gespannt wird. Es ist aber $g\varrho\sigma$ das Gewicht des Fadens von der ursprünglichen Länge σ. **In jedem Punkte ist also die Spannung gleich dem Gewicht des darunter hängenden Fadenstücks.** Setzt man diesen Werth für T in die Verlängerungsformel, so wird sie

$$ds = (1 + \varepsilon g\varrho\sigma)\, d\sigma$$

und gibt

$$s = \sigma + \tfrac{1}{2}\varepsilon g \varrho \sigma^2,$$

ohne Constante, da s und σ zusammen verschwinden. Die Verlängerung

$$s - \sigma = \tfrac{1}{2}\varepsilon g \varrho \sigma^2$$

ist das Produkt aus ε, dem halben Gewichte $\frac{1}{2} g \varrho \sigma$ des Fadenstücks und dessen Länge σ. Denkt man sich den Faden nicht schwer, dagegen am Ende dessen halbes Gewicht als spannende Kraft wirkend, so würde er nach der Formel des §. 3 dieselbe Verlängerung erleiden.

Für den Fall, dass ausser dem Gewichte des Fadens am unteren Ende noch ein Gewicht $P = Mg$ wirkt, ist aus $dT = g \varrho d\sigma$ zu ziehen: $T = g \varrho \sigma + C$ und ist für $\sigma = 0$ die Spannung gleich Mg. Daher wird

$$T = Mg + g\varrho\sigma$$

und $ds = (1 + \varepsilon g M + \varepsilon g \varrho \sigma)\, d\sigma$, also

$$s = \sigma + \varepsilon g \sigma (M + \tfrac{1}{2}\varrho\sigma).$$

Man kann diese Formel zur Bestimmung der Variation der Schwere auf der Oberfläche der Erde benutzen. Denn aus ihr folgt

$$g = \frac{s - \sigma}{\varepsilon \sigma (M + \frac{1}{2}\varrho\sigma)}$$

und wenn man für die verschiedenen Orte der Erdoberfläche M jedesmal so wählt, dass der Faden auf dieselbe Länge s ausgedehnt wird, so wird g umgekehrt proportional der Grösse $M + \frac{1}{2}\varrho\sigma$, d. h. der angehängten Masse, vermehrt um die halbe Masse $\frac{1}{2}\varrho\sigma$ des Fadens. Diese Methode, die Beschleunigung der Schwere zu bestimmen, rührt von John Herschel her.

§. 9. Der elastisch biegsame Faden (die elastische Saite) in der Ebene.

Ein undehnbarer, nicht vollkommen biegsamer Faden (unendlich dünner Draht, unendlich dünne Saite) werde durch Kräfte aus der Form der geraden Linie in eine andere, aber ebene Gleichgewichtsform gebogen. Der Widerstand gegen die Biegung sei so beschaffen, dass nach Wegfall der biegenden Kräfte der Faden mehr oder weniger in die ursprüngliche Gestalt zurückkehrt. Die Kräfte, welche diesem Widerstand äquivalent sind und nach deren Einführung die Saite als vollkommen biegsam angesehen werden darf, nennt man elastische Kräfte. Sie sind fingirte Kräfte, welche man einführt, um auf den elastischen Faden die bereits entwickelte Theorie des vollkommen biegsamen Fadens anwenden zu können.

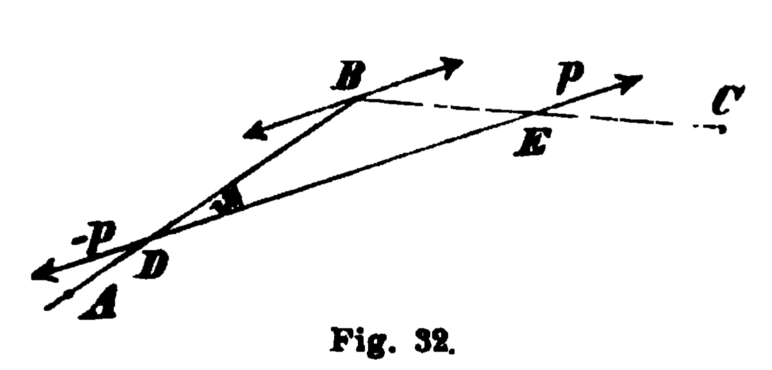


Fig. 32.

1. Es seien AB und BC (Fig. 32) zwei aufeinanderfolgende Bogenelemente der elastischen Linie, nachdem sie durch Kräfte in die Gleichgewichtsform gebogen worden ist. Trennt man sie ab, oder lässt man diese Kräfte aufhören zu wirken, so würde die Configuration des Winkels, welche sie bilden, dadurch erhalten werden können, dass man irgend zwei ihrer Punkte D, E durch eine undehnbare Linie verbände. Man könnte diese Punkte selbst auf den Verlängerungen der Bogenelemente, die man in diesem Falle als starr anzusehen hätte, annehmen, nur würde ihre Verbindungslinie dann unzusammendrückbar, statt undehnbar sein müssen. Würde man die Linie DE durchschneiden, so würde man zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte p, $-p$, die eine von D nach E, die andere von E nach D wirkend einführen müssen, damit die Bogenelemente nicht in die ursprüngliche

geradlinige Configuration zurückschnellen könnten und der Contingenzwinkel verschwinden würde. Da sie dem elastischen Widerstande der Saite gegen die Biegung Gleichgewicht halten, so würden zwei ihnen entgegengesetzt gleiche Kräfte $-p$, p zusammen diesem Widerstande äquivalent sein und statt seiner eingeführt werden können. Da die Angriffspunkte D, E dieser beiden Kräfte willkührlich wählbar sind, so kann dieser Widerstand auf unzählige Arten durch 2 solche entgegengesetzt gleiche Kräfte ausgedrückt werden. Alle solche Paare müssen daher einander äquivalent sein. Um das Gemeinsame aller solcher Darstellungen des elastischen Widerstandes der Bogenelemente zu erkennen, sei $-p$, p das eine, $-q$, q das andere von zwei solchen Paaren. Kehren wir das zweite um, so müssen beide sich Gleichgewicht halten an dem aus beiden Bogenelementen bestehenden veränderlichen System. Schneidet man dieses in B durch und bringt zwei entgegengesetzt gleiche Spannungskräfte von entsprechender Intensität in diesem Punkte an, so besteht das Gleichgewicht an jedem Bogenelemente fort. Reducirt man daher die Kräfte $-q$ und q, welche an AB angreifen für den Punkt B, so folgt, dass die sich hiebei ergebenden Kräftepaare $(-p, p)$ und $(q, -q)$ entgegengesetzt gleiche Momente haben müssen. Hieraus schliesst man, dass alle Kräfte, welche den elastischen Widerstand zweier aufeinanderfolgender Bogenelemente der elastischen Curve darstellen, so beschaffen sind, dass ihr Moment constanten Werth hat, welche Lage sie auch gegen die Bogenelemente haben.

Trifft also die Kraft p das Bogenelement AB in D, die Kraft p' in F und sind die Richtungen derselben gegen AB unter den Winkeln ϑ, ϑ' geneigt, so muss $p \cdot BD \cdot \sin\vartheta = p' \cdot BF \cdot \sin\vartheta' = u$ sein, wenn u der constante Werth des Momentes ist. Die Elasticität des Fadens wird also durch ein Moment u oder wenn man will, durch ein Kräftepaar ausgedrückt, dessen Moment u ist oder, wenn man an B noch zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte p und $-p$ zufügt, durch zwei entgegengesetzt gleiche Kräftepaare vom Momente u und $-u$, von denen das eine an AB, das andere an BC angreift.

2. Ueber die Natur des elastischen Widerstandes, welcher durch das Moment u dargestellt wird, können verschiedene Voraussetzungen gemacht werden, von denen jede eine andere Art Elasticität begründet. Wir wollen hier die möglichst einfache zu Grunde legen. Damit die Elemente AB und BC, welche ursprünglich eine Gerade bilden, nach der Biegung den Contingenzwinkel $d\psi$ bilden, muss eine Drehung von BC gegen AB im Sinne dieses Winkels erfolgen. Da das Moment u den Widerstand darstellt, der auf eine Zurückführung von BC in die Richtung von AB abzielt, so ist der Sinn von u (das Paar an BC angreifend gedacht) dem Sinne von $d\psi$ entgegengesetzt, mithin von entgegengesetztem Zeichen, wie $d\psi$. Wir wollen u proportional $d\psi$ oder, da $\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\varrho}$, nämlich die Krümmung der Fadencurve darstellt, proportional der Krümmung annehmen und setzen

$$u = -\varepsilon \frac{d\psi}{ds} = -\frac{\varepsilon}{\varrho},$$

wo ϱ den Krümmungshalbmesser bedeutet. Da $d\psi$ das Increment des Winkels ist, welchen die Tangente mit der x-Axe bildet, so ist $d\psi$ positiv oder negativ, je nachdem ψ wächst oder abnimmt. Daher ist u negativ oder positiv, je nachdem ψ wächst oder abnimmt.

3. Um die Gleichgewichtsbedingungen der Fadencurve zu finden, denken wir zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Bogenelementen die entgegengesetzt gleichen

elastischen Kräfte eingeführt und betrachten in Folge dessen den elastischen Faden als vollkommen biegsam. Unter den Sätzen über den vollkommen biegsamen Faden war nun auch der (Cap. VI, §. 1, Nr. 2, S. 88), dass die Summe der Momente aller Kräfte, welche an einem Bogenstücke der Curve vom Anfange bis zu irgend einem Punkte derselben gerechnet, angreifen, in Bezug auf den Endpunkt Null ist. Diese Summe besteht aber aus zwei Theilen, 1. nämlich aus dem Momente aller äussern Kräfte, das wir sogleich bestimmen wollen und 2. aus dem Momente der elastischen Kräfte. Diese sind aber alle paarweise einander entgegengesetzt gleich, bis auf eine, welche nur einzig vorhanden ist. An dem letzten Elemente, welches mit dem Endpunkte schliesst und an dem folgenden Bogenelemente, welches nicht mehr zu dem fraglichen Bogenstücke gehört, wirken auch zwei entgegengesetzte elastische Kräfte, von denen aber die an dem folgenden Elemente angreifende bei der Bildung der Momentensumme nicht in Betracht kommt, sondern nur die ihr entgegengesetzte, am Schlusselemente des Bogen angreifende Kraft. Ist daher u das Moment der am folgenden Elemente angreifenden elastischen Kraft, so ist $-u$ das Moment der hier in Betracht kommenden Kraft in Bezug auf den Endpunkt des Bogens. Alle paarweise auftretenden elastischen Kräfte haben in Bezug auf diesen Punkt entgegengesetzt gleiche Momente, welche sich in der Summe tilgen, sodass diese ganze Summe der Momente der elastischen Kräfte des Bogens sich auf $-u$, das Moment der letzten Kraft, reducirt.

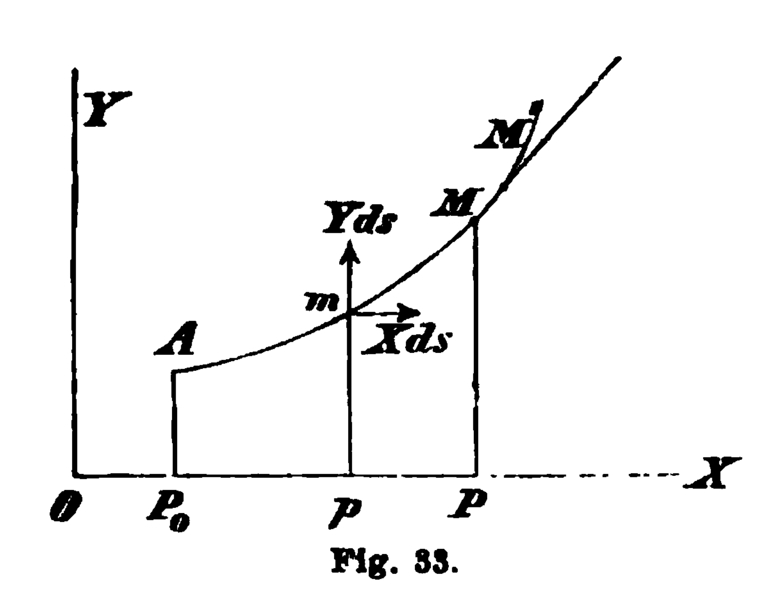


Fig. 33.

Um das Moment der Kraft Pds, welche an den Bogenelementen ds (ξ, η) angreift in Bezug auf den Endpunkt $M(x, y)$ des Bogens AM (Fig. 33) zu finden, seien Xds, Yds deren Componenten parallel den Coordinatenaxen; dann ist dies Moment

$$\begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y \\ Xds & Yds \end{vmatrix}$$

und wenn das Moment nicht für M, sondern für den nächstfolgenden Punkt

$$M'(x + dx,\ y + dy)$$

gesucht würde, so würde dasselbe übergehen in

$$\begin{vmatrix} \xi - x - dx & \eta - y - dy \\ Xds & Yds \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y \\ Xds & Yds \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} dx & dy \\ Xds & Yds \end{vmatrix}.$$

Daher stellt

$$-\begin{vmatrix} dx & dy \\ Xds & Yds \end{vmatrix}$$

das Differential des Momentes der Kraft Pds und mithin

$$-\int \begin{vmatrix} dx & dy \\ Xds & Yds \end{vmatrix} = -dx\int Yds + dy\int Xds$$

das Differential der Momentensumme aller Kräfte Pds von A bis M dar für den Fall, dass der Bogen AM um MM' wächst. Bezeichnen wir dies Moment mit H, so wäre

$$dH = -dx\int Yds + dy\int Xds \quad \text{und also} \quad H = \int[dy\int Xds - dx\int Yds],$$

die Integrationen ausgedehnt über den ganzen Bogen AM. Da nach dem angeführten Satze $H - u = 0$ ist, so erhalten wir als eine Bedingung des Gleichgewichts

$u = H = \int [dy \int X ds - dx \int Y ds]$ und ist $\frac{du}{ds} = \frac{dy}{ds}\int X ds - \frac{dx}{ds}\int Y ds$,
wo für u zu setzen ist

$$-\frac{\varepsilon}{\varrho} = -\varepsilon \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

4. Wird von dem elastischen Faden ein Theil abgetrennt, so genügt es zur Erhaltung des Gleichgewichts nicht, am Ende in der Richtung der Tangente zwei entgegengesetzte spannende oder pressende Kräfte einzuführen, wie beim unelastischen Faden; denn durch die Abtrennung wird an dem letzten Bogenelemente eine elastische Kraft frei, welche in der zusammenhängenden Fadencurve durch die entgegengesetzt gleiche Kraft im Gleichgewicht gehalten wurde. Damit ein Ausweichen der beiden getrennten Elemente oder der Tangenten nicht eintrete, sind noch zwei andere entgegengesetzt gleiche Kräfte erforderlich, an jedem Elemente eine solche, welche dies hindert. Am Ende jedes der abgetrennten Fadenstücke sind die beiden Kräfte, die Spannung oder Pressung in der Richtung der Tangente und die eben erwähnte zweite Kraft zusammen einer einzigen Kraft äquivalent, welche die Tangente in einem gewissen Punkte N treffen wird, der aber nicht mit dem Endpunkt des Bogens zusammenfällt, oder einem Kräftepaar. Man hat sich die Verlängerung des letzten Bogenelements, die Tangente, als starr, gewissermassen als ein unveränderliches System an das Element angelöthet zu denken. Ist eine Einzelkraft im Stande das Gleichgewicht am Bogen zu erhalten, so kann diese in ihrem Schnittpunkte N mit der Tangente in zwei Componenten zerlegt werden, nämlich T in der Richtung der Tangente, die wir, wie früher, die Spannung nennen wollen und eine dazu senkrechte V, die wir die Normalkraft nennen (Fig. 34).

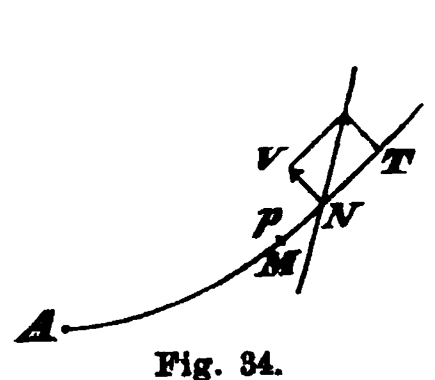


Fig. 34.

Da das Gleichgewicht auch fortbestehen muss, wenn der Faden, der nach Einführung der elastischen Kräfte als vollkommen biegsam angesehen werden kann, erstarrt, wobei alle elastischen Kräfte verschwinden, so muss zwischen T, V und den Kräften $P ds$ Gleichgewicht, wie am unveränderlichen System bestehen. Nehmen wir also den Endpunkt M des Bogens zum Reductionspunkt und die Tangente und Normale daselbst zu Axen der Zerlegung, so erhalten wir, weil T die Richtungscosinusse $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\sin\alpha = \frac{dy}{ds}$ und V die Richtungscosinusse $\cos(\alpha + \frac{1}{2}\pi) = -\frac{dy}{ds}$, $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$ hat,

$$T + \frac{dx}{ds}\int X ds + \frac{dy}{ds}\int Y ds = 0,$$

$$V - \frac{dy}{ds}\int X ds + \frac{dx}{ds}\int Y ds = 0.$$

Bezeichnet noch p den Abstand MN der Kraft V von M, so wird die dritte Gleichgewichtsgleichung (die der Momente)

$$H + Vp = 0,$$

wozu noch die früher gefundene

$$u = H$$

tritt. Aus diesen Gleichungen erhält man

$$T = -\frac{dx}{ds}\int Xds - \frac{dy}{ds}\int^s Yds,$$

$$V = \frac{dy}{ds}\int Xds - \frac{dx}{ds}\int Yds = \frac{du}{ds} \quad \text{(s. Nr. 3)},$$

$$p = -\frac{u}{V} = -\frac{u}{\frac{du}{ds}},$$

$$u = H = \int [dy \int Xds - dx \int Yds].$$

Die Gleichung $u = H$ ist die Differentialgleichung der Gleichgewichtsfigur der Saite, da sie weder T, V noch p, sondern nur geometrische Elemente und die Componenten der Kräfte Pds enthält. Die in ihr auftretenden Integrale führen bereits drei Constante mit sich und da u ein Differentialausdruck der 2. Ordnung ist, so werden durch die Integration noch zwei weitere Constante eingeführt, sodass die endliche Gleichung der Fadencurve 5 Constanten enthält. Dieselben können durch die 5 Bedingungen bestimmt werden: 1. dass die Fadencurve durch zwei gegebene Punkte gehe, 2. dass ihre Länge zwischen diesen eine gegebene Grösse sei und 3. dass die Tangenten in den gegebenen beiden Punkten bestimmte Richtungen haben, d. h. dass $\frac{dy}{dx}$ in ihnen gegebene Werthe annehme.

§. 10. **Eine gleichförmig elastische gerade Strecke sei an ihren Enden A und B durch starre Geraden oder durch irgend welche andere unveränderliche lineare oder plattenförmige Stücke verlängert. Auf die Verlängerungen wirken zwei Kräfte und nimmt in Folge dieser Einwirkung die Strecke eine Gleichgewichtsgestalt in Form einer ebenen Curve an, man soll diese, sowie die Spannung oder Pressung in einem beliebigen Punkte, sowie die Normalkraft für denselben bestimmen.**

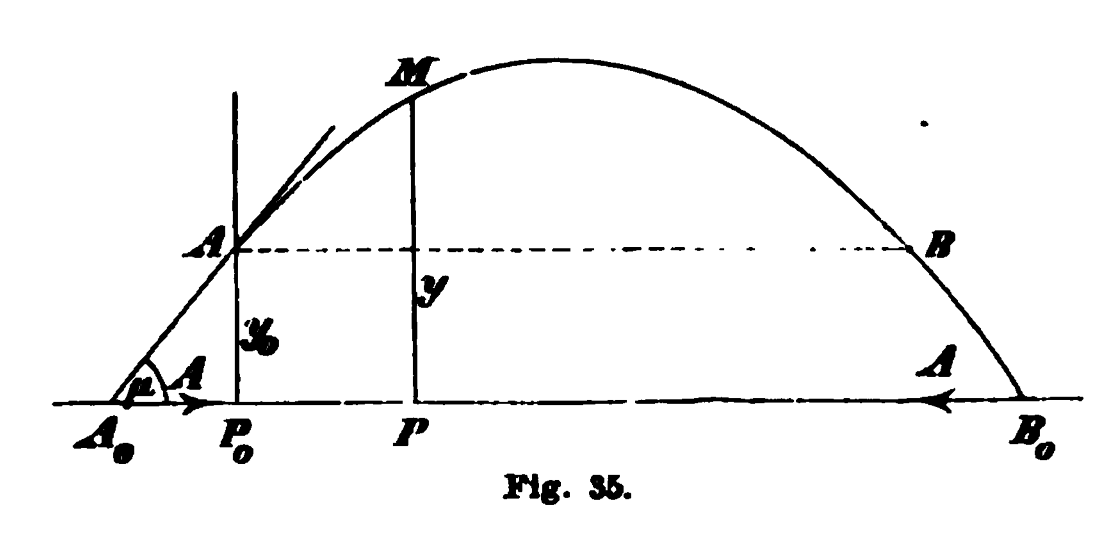


Fig. 35.

1. Da das Gleichgewicht auch noch fortbestehen muss, wenn das System unveränderlich wird, so müssen die beiden Kräfte entgegengesetzt gleich sein. Ihre gemeinsame Richtungslinie A_0B_0 heisst die Axe der elastischen Curve. Wählen wir diese Gerade zur x-Axe (Fig. 35), so ist das Moment aller Kräfte, welche das Bogenstück AM afficiren, das Moment der einzigen in A_0 angreifenden Kraft, die wir mit A bezeichnen, gleich Ay und daher nach §. 9 die Differentialgleichung der Curve

$$Ay = u = -\varepsilon \frac{d\psi}{ds} = -\frac{\varepsilon}{\varrho},$$

oder wenn wir $\varepsilon : A = a^2$ setzen:

$$\varrho y = -a^2 \quad \text{oder} \quad y = -a^2 \frac{d\psi}{ds}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass das Produkt des Krümmungshalbmessers der Curve und des Abstandes des Curvenpunktes von der Axe der Kräfte constant, also die Krümmung der Ordinate proportional ist. Die Krümmung kann daher nur in Punkten verschwinden, welche die Curve mit der Axe gemein hat. Sind Wendepunkte vorhanden, so können sie, weil in ihnen die Krümmung verschwindet, nur auf der Axe liegen. Die von der Axe entferntesten Punkte zeigen die stärkste Krümmung; in allen Punkten desselben Abstandes von ihr ist die Krümmung gleichstark.

2. Wir suchen zunächst die Ordinate y, die Bogenlänge s und die Abscisse x als Functionen der Summe ψ der Contingenzwinkel. Die Gleichung $y = -a^2 \frac{d\psi}{ds}$ gibt differentiirt $\frac{dy}{ds} = -a^2 \frac{d^2\psi}{ds^2}$ und da $\frac{dy}{ds} = \sin\psi$ ist,

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} + \frac{1}{a^2}\sin\psi = 0\,,$$

welche Gleichung mit der Differentialgleichung der Pendelbewegung übereinkommt. Sie liefert nach Multiplication mit $\frac{d\psi}{ds}$ als erstes Integral

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 - \frac{1}{a^2}\cos\psi = C \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2}y^2 = a^2\cos\psi + C,$$

wenn für $\frac{d\psi}{ds}$ sein Werth $-y : a^2$ gesetzt wird. Die Constante C können wir mit Hülfe der Ordinate y_0 des Anfangspunktes A des elastischen Bogens bestimmen. Denn hiefür ist $\frac{1}{2}y_0^2 = a^2\cos\mu + C$ und hiemit wird

$$\tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}y_0^2 = a^2(\cos\psi - \cos\mu) = 2a^2\sin^2\tfrac{1}{2}\mu - 2a^2\sin^2\tfrac{1}{2}\psi\,.$$

Die Gleichung $\frac{1}{2}y^2 = a^2\cos\psi + C$ zeigt, dass die Ordinate einen Maximalwerth f erreicht für $\psi = 0$. Mit Hülfe dieses Maximalwerthes kann die Constante C ebenfalls bestimmt werden. Für ihn ist $\frac{1}{2}f^2 = a^2 + C$, und wird also

$$\tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}f^2 = -2a^2\sin^2\tfrac{1}{2}\psi \quad \text{oder} \quad y^2 = f^2 - 4a^2\sin^2\tfrac{1}{2}\psi\,.$$

Die Vergleichung beider Bestimmungsarten der Constanten liefert zugleich:

$$\tfrac{1}{2}f^2 = \tfrac{1}{2}y_0^2 + 2a^2\sin^2\tfrac{1}{2}\mu\,.$$

Es sind nun die drei Fälle möglich:

$$1.\ \frac{f}{2a} < 1, \quad 2.\ \frac{f}{2a} = 1, \quad 3.\ \frac{f}{2a} > 1,$$

die wir der Reihe nach betrachten wollen. Aus der Formel

$$y^2 = f^2 - 4a^2\sin^2\tfrac{1}{2}\psi,$$

folgt, dass im dritten Falle y nicht Null werden, die Curve also die Axe der Kräfte nicht schneiden oder berühren kann, während dies im ersten und zweiten Fall möglich ist.

3. Für den ersten Fall setzen wir $f : 2a = k$ und erhalten aus

$$y^2 = f^2 - 4a^2\sin^2\tfrac{1}{2}\psi,$$

indem wir $f = 2ak$ und $\sin\frac{1}{2}\psi = k\sin\omega$ substituiren,

$$y = 2ak\cos\omega = f\cos\omega\,.$$

Beschreibt man daher um den Fusspunkt C (Fig. 36) einer Maximalordinate $SC = f$ einen Kreis, so ergibt sich die Bedeutung des Winkels ω, indem man

die Ordinate $y = MP = QC$ auf SC projicirt; es ist nämlich $\measuredangle NCQ = \omega$. Zugleich sieht man, wie die Winkel ψ und ω von einander abhängen. Nimmt ψ von μ bis 0 ab, so nimmt ω von einem der Ordinate y_0 entsprechenden Werthe ω_0 bis zu Null ab.

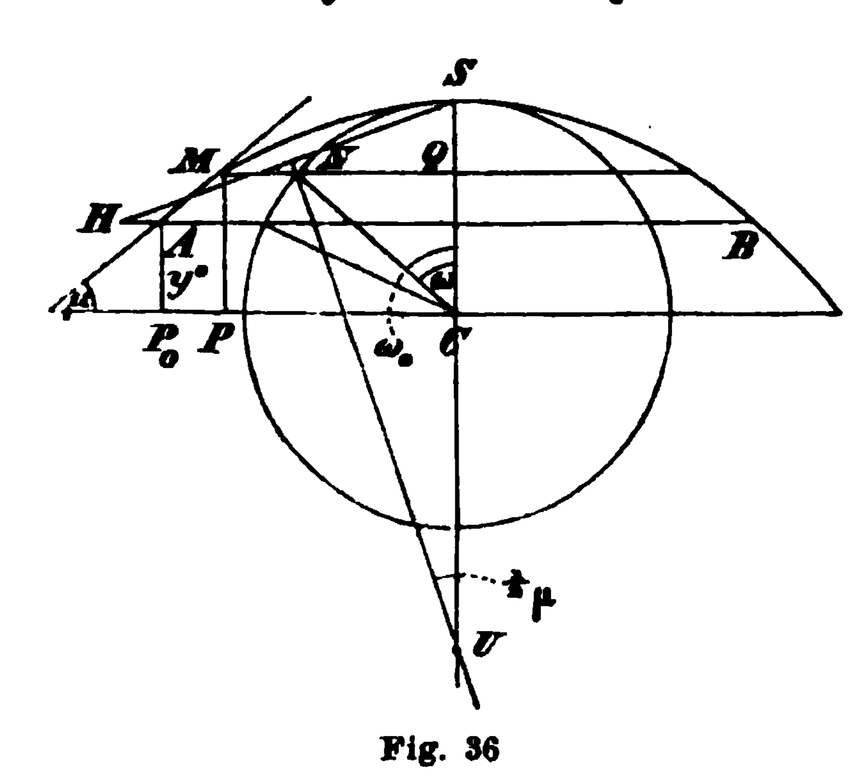


Fig. 36

Da $\sin \frac{1}{2}\mu = k \sin \omega_0$ und $f = 2ak$, also $f \sin \omega_0 = 2a \sin \frac{1}{2}\mu$ wird, so ergibt sich eine einfache Construction der Länge a. Man ziehe NU senkrecht zur Halbirungslinie des Winkels μ. Ist $\omega_0 = \frac{1}{2}\pi$, also A der Angriffspunkt der Kraft, so ist die durch den Scheitel S gelegte zur Halbirungslinie von μ parallele Gerade $HS = 2a$.

4. Aus $dy : ds = \sin \psi$ folgt $ds = dy : \sin \psi = dy : 2 \sin \frac{1}{2}\psi \cos \frac{1}{2}\psi$ und wenn man $dy = -2ak \sin \omega d\omega$ und $\sin \frac{1}{2}\psi = k \sin \omega$ zu Hülfe nimmt,

$$ds = -a d\omega : \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}.$$

Mithin wird der Bogen $AM = s$:

$$s = a \int_{\omega}^{\omega_0} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}}.$$

Die Länge l des Bogens AS von A bis zum nächsten Scheitel ($\omega = 0$) ist

$$l = a \int_{\omega_0}^{0} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}}$$

und hiemit erhalten wir für die Bogenlänge $SM = \sigma$ vom Scheitel S ($\omega = 0$) bis zum Punkte M ($\omega = \omega$):

$$\sigma = a \int_{0}^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}} = aF(\omega, k), \quad k = \frac{f}{2a}, \quad k \sin \omega = \sin \tfrac{1}{2}\psi.$$

5. Die Abscisse x wollen wir auf der Axe vom Fusspunkte P_0 der Ordinate y_0 an zählen. Da $dx = ds \cos \psi$ ist, so wird

$$dx + ds = ds(1 + \cos \psi) = 2 ds \cos^2 \tfrac{1}{2}\psi = 2 ds (1 - \sin^2 \tfrac{1}{2}\psi) = -2a d\omega \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}$$

und folglich

$$x + s = 2a \int_{\omega}^{\omega_0} d\omega \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}.$$

Ist c die Abscisse des Scheitels S, so hat man hieraus

$$c + l = 2a \int_{0}^{\omega_0} d\omega \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}$$

und folglich, wenn die Abscisse ξ des Punktes M von C aus gezählt und der Bogen $SM = l - s$, wie vorher mit σ bezeichnet wird

$$\xi + \sigma = 2a \int_{0}^{\omega} d\omega \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega} = 2aE(\omega, k).$$

Indem man den in Nr. 4 gefundenen Werth von σ einsetzt, erhält man für die Abscisse ξ:

$$\xi = 2aE(\omega, k) - aF(\omega, k),$$

wozu die Ordinate

$$y = 2ak\cos\omega$$

kommt.

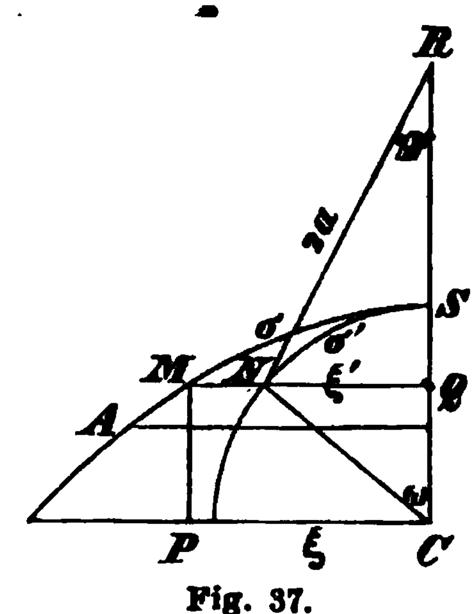


Fig. 37.

6. Die Gleichung $\sigma = aF(\omega, k)$ gibt $\omega = am \cdot \frac{\sigma}{a}$ und hiemit (Fig. 37), wenn wir $NQ = \xi'$ setzen.

$$\frac{y}{f} = \cos am \cdot \frac{\sigma}{a}, \qquad \frac{\xi'}{f} = \sin am \cdot \frac{\sigma}{a}.$$

Trägt man $NR = 2a$ an, wodurch $f\sin\omega = 2a\sin QRN$, also vermöge $f\sin\omega = 2a\sin\frac{1}{2}\psi$ der Winkel $QRN = \frac{1}{2}\psi$ wird, so erhält man

$$\overline{QR}^2 = 4a^2 - f^2\sin^2\omega = 4a^2(1 - k^2\sin^2\omega),$$

also, wenn $QR = q$ gesetzt wird

$$\frac{q}{2a} = \Delta am \cdot \frac{\sigma}{a}.$$

Da der Kreisbogen $\sigma' = SN = f\omega$ ist, so gehört hiezu noch: $\frac{\sigma'}{f} = am \cdot \frac{\sigma}{a}$.

Es finden also die elliptischen Functionen $am\cdot$, $\cos am\cdot$, $\sin am\cdot$, $\Delta am\cdot$ sämmtlich ihre Bedeutung in der Figur. Aehnlich wie Neper die Quadratur der Hyperbel benutzte, um die Zahlenwerthe der Logarithmen zu berechnen, hat man die Gleichgewichtsform, welche ein elastischer, durch gleiche Endkräfte gespannter Draht annimmt, zur Berechnung der elliptischen Functionen vorgeschlagen. Vgl. Greenhill, *Graphical representation of the elliptic functions by means of a bent elastic beam. Messenger of Mathem. Vol. V, p.* 180 (1876).

7. Die Figur gibt noch eine einfache Tangentenconstruction der elastischen Linie. Da die Tangente in M mit MQ den Winkel ψ bildet, so ist an MQ der doppelte Winkel $NRQ = \frac{1}{2}\psi$ anzutragen.

8. Die Ordinate $y = f\cos\omega$ verschwindet für $\omega = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ und hiefür nimmt ψ immer denselben absoluten Werth an, der aus

$$\sin\tfrac{1}{2}\psi = k\sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^n k$$

folgt. Schneidet daher die Curve die Axe, so bildet in den Schnittpunkten die Tangente mit der Axe immer denselben Winkel, aber abwechselnd nach der einen und nach der anderen Seite hingewandt.

Aus der Natur der elliptischen Functionen folgt, dass die Ordinate jedes Scheitels eine Symmetrieaxe ist, und dass, wenn die Curve die Axe schneidet, jeder Schnittpunkt in die Mitte zwischen zwei aufeinanderfolgende Scheitelordinaten fällt, dass die Abstände aufeinanderfolgender Scheitelordinaten und aufeinanderfolgender Schnittpunkte mit der Axe gleichgross sind, dass, wenn die Curve die Axe schneidet, je zwei aufeinanderfolgende Scheitel auf entgegengesetzten Seiten der Axe liegen, dass alle Scheitelordinaten absolut gleich und alle Schnittpunkte mit der Axe Wendepunkte sind.

Es fragt sich nun, wie viele Scheitel oder Wendepunkte auf einer gegebenen Bogenlänge L liegen können. Wir wollen diese Untersuchung in dem einfacheren Falle führen, dass die beiden Endkräfte A an den Enden des Bogens L selbst

angreifen und die Verbindunglinie dieser Endpunkte also die Axe der Curve ist. In diesem Falle ist $y_0 = 0$, $\omega_0 = \frac{1}{2}\pi$, $k = \sin\frac{1}{2}\mu$ und theilt sich die ganze Länge L der Curve in eine noch unbekannte Zahl n von Abtheilungen von der Länge $2l$, so dass $L = 2nl$ wird und zwischen dem Anfangs- und Endpunkte $n - 1$ Wendepunkte auf der Axe liegen, deren Länge $AB = 2nc$ ist. Man hat daher vermöge des Ausdrucks l in Nr. 4:

$$L = 2na \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\omega}} = 2naF(\tfrac{1}{2}\pi, k).$$

Dies Integral ist gleich $\frac{1}{2}\pi$, multiplicirt mit einem gewissen Mittelwerth der Function $(1 - k^2 \sin^2\omega)^{-\frac{1}{2}}$. Da der kleinste Werth derselben 1 ist, so ist der Mittelwerth jedenfalls > 1 und also $L = 2na[\frac{1}{2}\pi + \cdots]$, d. h. $L \geqq na\pi$, also $n \leqq \frac{L}{a\pi}$. Es ist daher die Anzahl n der Abtheilungen des Bogens höchstens gleich der grössten ganzen Zahl, welche in $L : a\pi = \frac{L}{\pi}\sqrt{\frac{A}{\varepsilon}}$ enthalten ist. Diese Anzahl wächst mit der Kraft A. Zu jedem gegebenen n und $k = \sin\frac{1}{2}\mu$ gehört eine ganz bestimmte Kraft A, bei welcher diese Anzahl von Abtheilungen möglich ist. Es folgt nämlich aus $L = 2naF(\frac{1}{2}\pi, k)$ die Formel

$$a = \sqrt{\frac{\varepsilon}{A}} = \frac{L}{2nF(\frac{1}{2}\pi, k)}, \quad \text{also} \quad A = \frac{4n^2\varepsilon}{L^2}\left(F(\tfrac{1}{2}\pi, k)\right)^2.$$

9. Die Gestalt der Curve hängt ab von den Constanten A, μ, y_0, d. h. von der Intensität und der Lage des Angriffs der Kräfte A und der Neigung der Tangente des Bogenanfanges gegen die Axe. Nehmen wir zunächst an, es sei $y_0 = 0$, d. h. die Verbindungslinie der Bogenenden sei die Axe. Wir unterscheiden folgende Fälle:

a) $\mu = 0$ oder $\mu = \pi$ (Fig. 38). In beiden Fällen ist die gerade Linie Gleichgewichtsform. Im Falle $\mu = \pi$ ist das Gleichgewicht sicher, für $\mu = 0$ kann es,

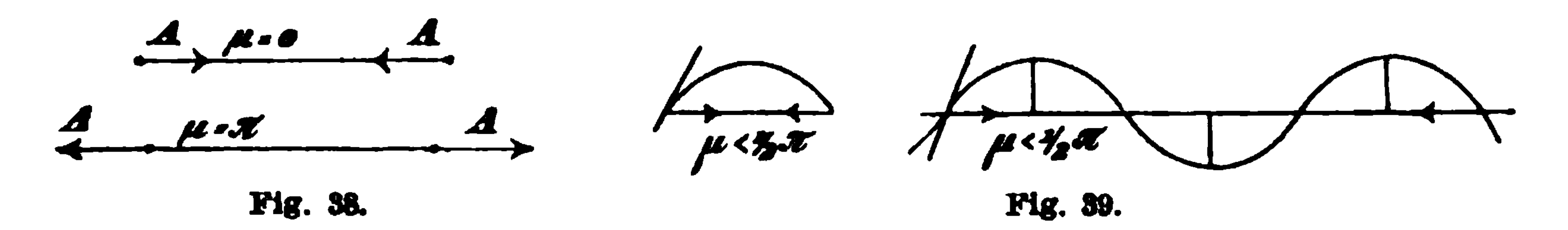


Fig. 38. Fig. 39.

je nach der Intensität der Kraft A sicher oder unsicher sein. Denn für die Anzahl der Abtheilungen der Curve durch die Wendepunkte gilt die Ungleichung $n \leqq \frac{L}{\pi a}$. Ist nun $A = \varepsilon : a^2$ nur so gross, dass $L : \pi a$ nicht grösser als 1 ist, so kann n nur 0 sein, d. h. die Curve hat weiter keine Abtheilungen. Es ist daher die Gerade so lange Gleichgewichtsform, als $L : \pi a \leqq 1$, d. h. $A \leqq \frac{\pi^2\varepsilon}{L^2}$ ist. Ueberschreitet A diese Grenze, so wird das Gleichgewicht unsicher, d. h. ist nicht mehr unabhängig vom Geschwindigkeitszustande; bei gewissen Geschwindigkeitszuständen bleibt es, bei anderen hört es auf.

b) $\mu < \frac{1}{2}\pi$ (Fig. 39). Je nach der Intensität von A ohne Wendepunkt oder mit Wendepunkten.

c) $\mu = \frac{1}{2}\pi$ (Fig. 40). Die rechtwinklige elastische Linie. Da $k = \sin \frac{1}{2}\mu$ ist, so wird $f = 2ak = a\sqrt{2}$.

d) $\mu > \frac{1}{2}\pi$ (Fig. 41). Die Ω-Curve mit oder ohne Wendepunkte. Von besonderem Interesse ist der Fall, dass $c = 0$ wird. Dann fallen alle Wendepunkte in

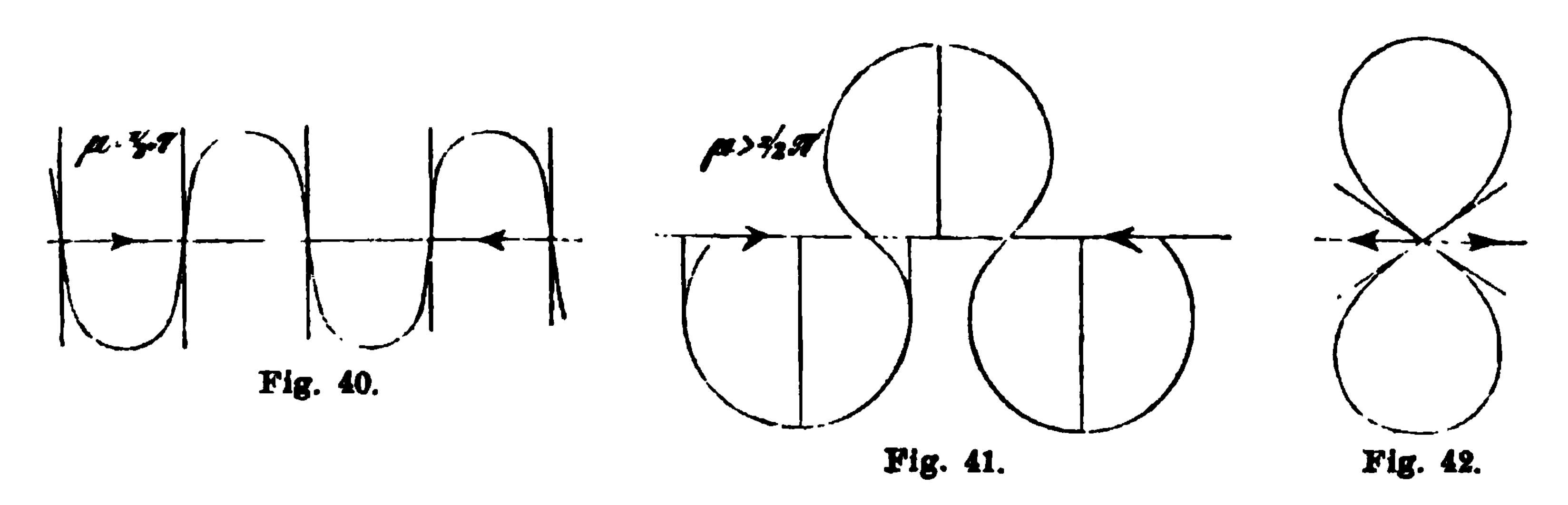


Fig. 40. Fig. 41. Fig. 42.

einen zusammen und erlangt die Curve die Gestalt des Zeichens der Unendlichkeit (Fig. 42). Es ist nach Nr. 5 $c = 2aE(\frac{1}{2}\pi, k) - aF(\frac{1}{2}\pi, k)$ und folgt der Werth von μ aus den Gleichungen

$$2E(\tfrac{1}{2}\pi, k) - F(\tfrac{1}{2}\pi, k) = 0, \quad k = \sin \tfrac{1}{2}\mu.$$

Man findet $\mu = 139^\circ, 9'$.

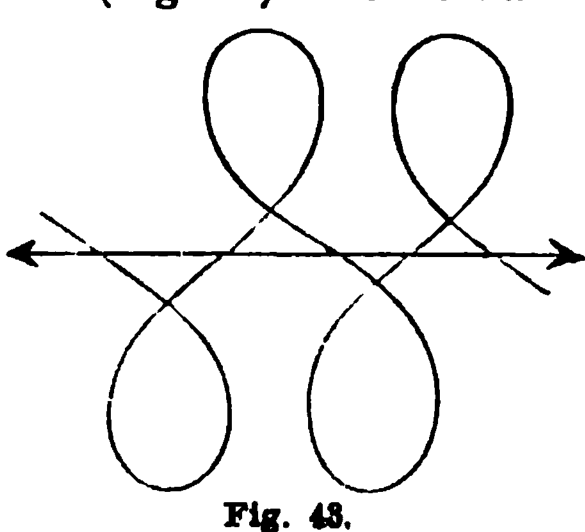


Fig. 43.

Verschieben sich bei stumpfem μ die Endpunkte übereinander hin, so entsteht die Form (Fig. 43).

10. Im zweiten Falle der in Nr. 2 gewählten Eintheilung ist $f : 2a = k = 1$. Hiefür wird

$$2a \cos \tfrac{1}{2}\mu = y_0, \quad y = 2a \cos \tfrac{1}{2}\psi.$$

Man erhält weiter

$$\sigma = a\int_0^{\frac{1}{2}\psi} \frac{d\omega}{\cos\omega} = al \cdot \operatorname{cotg}(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{4}\psi), \quad \xi + \sigma = 2a \sin \tfrac{1}{2}\psi,$$

so dass

$$y = 2a \cos \tfrac{1}{2}\psi,$$

$$\xi = 2a \sin \tfrac{1}{2}\psi - al \cdot \operatorname{cotg}(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{4}\psi)$$

die Gleichungen der Curve werden. Die Curve hat die Axe der Kräfte zur Asymptote; es ist $y = 0$, $\xi = -\infty$ für $\psi = 0$ (Fig. 44).

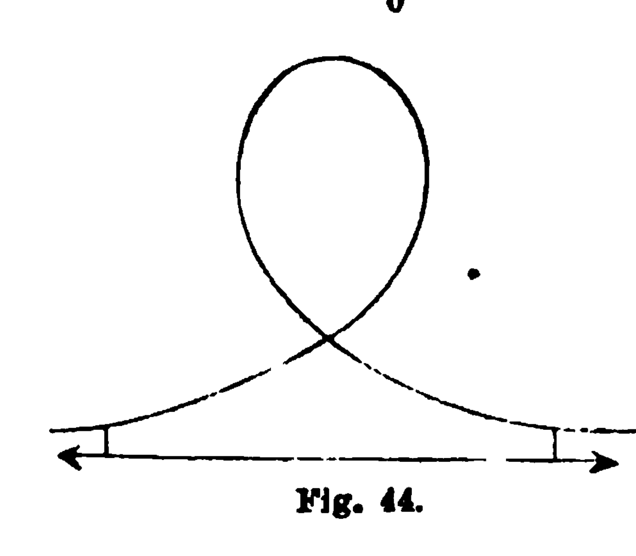


Fig. 44.

11. Im dritten Falle ist $f : 2a > 1$, also wenn man $2a : f = k$ setzt, wo $k < 1$ ist, erhält man

$$y = f\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\psi},$$

also für $k \sin \frac{1}{2}\psi = \sin\omega$ wieder $y = f\cos\omega$. Ferner wird

$$ds = dy : \sin\psi = -akd\tfrac{1}{2}\psi : \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\psi},$$

mithin

$$s = ak\int_{\frac{1}{2}\psi}^{\frac{1}{2}\mu} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\omega}}, \quad l = ak\int_0^{\frac{1}{2}\mu} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\omega}}, \quad \sigma = akF(\tfrac{1}{2}\psi, k).$$

Ebenso

$$dx = ds\cos\psi = ds(1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\psi) = \left(1 - \frac{2}{k^2}\right)ds + \frac{2}{k^2}(1 - k^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\psi)\,ds,$$

mithin

$$x = \left(1 - \frac{2}{k^2}\right)s + f\int_{\frac{1}{2}\psi}^{\frac{1}{2}\mu} d\omega\sqrt{1 - k^2 \sin^2\omega}\,, \quad \xi = (ak - f)\,F(\tfrac{1}{2}\psi, k) + fE(\tfrac{1}{2}\psi, k).$$

Diesen Gleichungen entspricht die Form Fig. 45 mit einer oder mehreren Windungen.

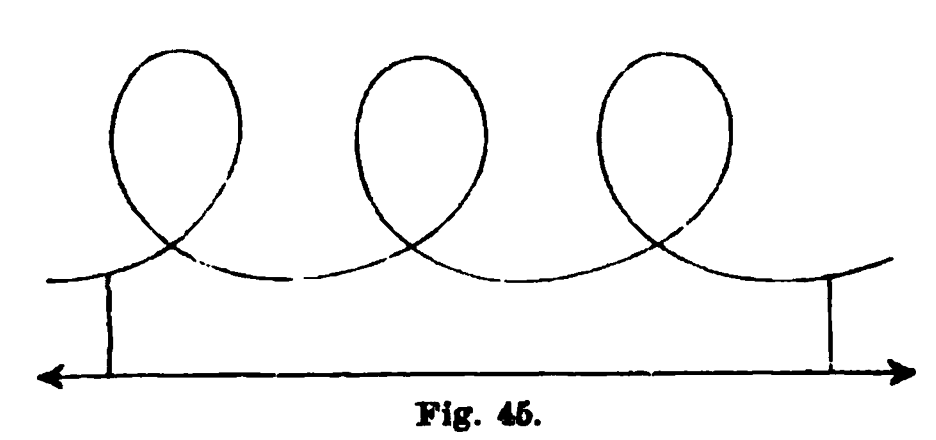


Fig. 45.

12. Wenn die Kräfte A unendlich klein werden und ihre Angriffspunkte, also auch die Axe der Curve, ins Unendliche rücken, so stellen sie zwei entgegengesetzt gleiche Kräftepaare dar. Ist das Moment derselben gleich m und wählen wir die Verbindungslinie der Endpunkte des elastischen Bogens zur x-Axe, so besteht die Gleichung $u = m$ statt der Gleichung in Nr. 2, indem das Moment m für alle Punkte M der Ebene constant ist. Diese Gleichung wird also $-\varepsilon\dfrac{d\psi}{ds} = m$ und folgt aus ihr $\psi = -\dfrac{m}{\varepsilon}s + C$, mithin, wenn $\psi = \mu$ für $s = 0$ wird $\mu - \psi = \dfrac{m}{\varepsilon}s$, d. h. die Summe der Contingenzwinkel von der Anfangstangente bis zur Tangente in irgend einem Punkte der Curve ist proportional dem zwischenliegenden Bogen. Daher ist die Curve ein Kreis vom Radius $\varepsilon : m$. Zwei entgegengesetzt gleiche Kräftepaare ertheilen also der elastischen Linie die Gleichgewichtsform eines Kreisbogens, dessen Radius der Elasticitätsmodulus, dividirt durch das Moment der Kräftepaare ist. Die Axe der Curve ist in diesem Falle die unendlich ferne Gerade, längs welcher zwei unendlich kleine entgegengesetzt gleiche Kräfte gedacht werden können, welche den beiden Paaren äquivalent wären.

13. Für die Spannung T der elastischen Linie erhalten wir nach §. 9, Nr. 4 wegen $\int X ds = A$, $\int Y ds = 0$ den Ausdruck

$$T = -A\frac{dx}{ds} = -A\cos\psi.$$

Die Spannung ist daher die Projection der Kraft A auf die Tangente, im umgekehrten Sinn genommen. Sie ist positiv, wenn die Tangente mit der Axe einen stumpfen Winkel bildet, negativ, d. h. Pressung, wenn dieser Winkel spitz ist, sie verschwindet mit $\psi = \frac{1}{2}\pi$. In den Formen (Fig. 41) z. B. findet also theils Spannung, theils Pressung statt; in den Uebergangspunkten, für welche die Tangente rechtwinklig zur Axe ist, ist keine Tangentialkraft erforderlich, um das Gleichgewicht bei Abtrennung des Bogens zu erhalten.

Die Normalkraft V wird nach demselben §. $V = A\sin\psi$, nämlich gleich der Projection der Kraft A auf die Normale der Curve. Der Abstand p der Normalkraft V vom Curvenpunkte M ist

$$p = -u : V = Ay : A\sin\psi = y : \sin\psi,$$

d. h. gleich der Tangentenlänge MT vom Punkte M bis zum Schnittpunkt mit der Axe.

14. Der Fall schwacher Biegungen lässt eine einfache approximative Behandlung zu, indem für ihn die Differentialgleichung der elastischen Linie durch

eine lineare Differentialgleichung ersetzt werden kann. Indem wir in dieselbe, nämlich $y = -a^2 \frac{d\psi}{ds}$ den Werth $\frac{d\psi}{ds} = \frac{d^2y}{dx^2} : \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$ einführen, nimmt sie die Gestalt an

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{a^2}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Der schwachen Biegung wegen ist aber $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ sehr klein und mit Vernachlässigung dieses Gliedes gegen 1 geht sie über in

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{a^2} \cdot y = 0,$$

welcher die Form

$$y = A \cos\frac{x}{a} + B \sin\frac{x}{a}$$

genügt. Greifen die Kräfte A an den Enden des Bogens selbst an, so ist $y = 0$ mit $x = 0$, also die Constante $A = 0$ und bleibt $y = B \sin\frac{x}{a}$ als Gleichung der Curve. B aber ist das Maximum f der Ordinate, so dass $y = f \sin\frac{x}{a}$ ist. Ist e der Abstand der Endpunkte, so muss $y = 0$ für $x = e$, also wenn B nicht Null ist, was nur im Falle der geraden Linie als Gleichgewichtsfigur eintritt, $\sin\frac{e}{a} = 0$, d. h. $e = n\pi a$ sein. Nun ist aber e sehr nahe gleich der Gesammtlänge L der Curve, also sehr nahe $L = n\pi a$. Für $n = 1$ wird $a = \frac{L}{\pi}$, also $y = f \sin\frac{\pi x}{L}$. Für $n = 2$ ist $y = f \sin\frac{2\pi x}{L}$; die Curve schneidet die Axe dreimal auf der Länge L, nämlich für $x = 0$, $x = \frac{1}{2}L$, $x = L$. Für $n = 3$ wird $y = f \sin\frac{3\pi x}{L}$ u. s. f.

Die Kräfte A, welche kleine Biegungen hervorzubringen vermögen, sind nach Nr. 8, da für solche $k = f : 2a$ sehr klein ist, also $F(\frac{1}{2}\pi, k)$ sich nahezu auf $\frac{1}{2}\pi$ reducirt: $A = \frac{4n^2\varepsilon}{L^2}(\frac{1}{2}\pi)^2 = \frac{n^2\varepsilon\pi^2}{L^2}$.

15. Die ebene elastische Linie, an welcher blos zwei Endkräfte angreifen und welche Galilei gleichfalls, wie die Kettenlinie, für eine Parabel hielt (*Discorsi e dimostrazioni matematiche etc.*, Leida 1638), wurde zuerst von Jacob Bernoulli behandelt (*Curvatura laminae elasticae; ejus identitas cum curvatura lintei a pondere inclusi fluidi expansi, etc. Acta eruditorum Lips.* 1694, p. 262 und *Explicationes, annotationes et additiones ad ea, quae in Actis superioris anni de curra elastica, isochrona, paracentrica et velaria hinc inde memorata, et partim controversa leguntur; ubi de linea mediarum directionum, aliisque novis.* Ibid. 1695 p. 537—553. Zehn Jahre später schrieb er eine Abhandlung: *Véritable hypothèse de la résistance des solides, avec la demonstration de la courbure des corps qui font ressort.* (Mém. de l'Acad. des scienses, 1705, p. 230 oder Opera, T. II, p. 976). Daniel Bernoulli theilte Euler mit, dass er gefunden habe, dass für diese Curve das Integral $\int\frac{ds}{\varrho^2}$ ein Minimum werde, wo ϱ den Krümmungshalbmesser bedeutet. Dies veranlasste Euler sich die Aufgabe zu stellen: „die ebene Curve zu finden, für welche unter allen Curven gleicher Bogenlänge, welche durch dieselben zwei Punkte A, B

hindurchgehen und in diesen von denselben Geraden berührt werden, das Integral $\int \frac{ds}{\varrho^2}$ ein Minimum werde. Er löste sie in seinem berühmten Werke: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*; Lausannae et Genevae 1774, S. 245 u. ff. (*Additamentum I, De curvis elasticis* p. 245—310). Er gibt eine vollständige Discussion der elastischen Linie und führt 9 Hauptformen derselben auf. Ausserdem gehören hierher: L. Euler, *Solutio problematis de invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata.* (Comment. Acad. Petrop. T. III, ad a. 1728.) — *Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flexibilium, quam elasticorum* (Novi Comment. Acad. Petrop. T. XV, p. a. 1770, p. 381—413). — *De gemina methodo tam aequilibrium, quam motum corporum flexibilium determinandi et utriusque egregio consensu* (Novi Comment. Acad. Petrop. T. XX, p. a. 1775, p. 286—303).

§. 11. Wir fügen einige weitere leichte Aufgaben über die elastischen Linien hinzu, um dieselben unter Voraussetzung schwacher Biegung approximativ, wenn auch nur andeutungsweise, zu behandeln.

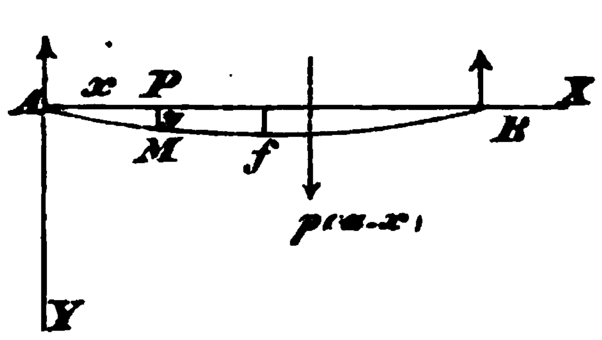


Fig. 46.

Eine homogene, schwere elastische Gerade ruht auf zwei Stützen A, B gleicher Höhe und biegt sich unter dem Einfluss der Schwere (Fig. 46); die Form derselben zu bestimmen.

Die horizontale Verbindungslinie der Stützen A, B sei die x-Axe, die Verticale des Punktes A die y-Axe, positiv abwärts gerechnet. In einem beliebigen Punkte M (x, y) trennen wir ab und betrachten das Linienstück MB. Ist p das Gewicht der Längeneinheit der Linie und $AB = a$, so ist das Gewicht des Bogens MB nahezu gleich dem seiner Horizontalprojection, nämlich gleich $p\,(a-x)$; dasselbe greift im Massenmittelpunkte des Bogens an und das Moment desselben in Bezug auf M ist daher $\frac{1}{2}p\,(a-x)^2$, im positiven Sinne zu nehmen. Der Widerstand bei B ist gleich dem halben Gewichte $\frac{1}{2}pa$ des ganzen Bogens und sein Moment $-\frac{1}{2}pa\,(a-x)$. Die Summe der Momente aller am Bogen MB angreifenden Kräfte in Bezug auf dessen Ende M ist daher

$$\tfrac{1}{2}p\,(a-x)^2 - \tfrac{1}{2}pa\,(a-x) = -\tfrac{1}{2}px\,(a-x);$$

dieselbe ist gleich dem Biegungsmomente $\frac{\varepsilon}{\varrho}$ der elastischen Kräfte zu setzen, d. h. wegen der Schwäche der Biegung gleich $\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}$ (es ist $-\frac{\varepsilon}{\varrho}$ das Biegungsmoment für M als Endpunkt von AM, $\frac{\varepsilon}{\varrho}$ für M als Endpunkt von MB).

Man hat daher

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{1}{2}px\,(a-x)$$

und hieraus

$$\varepsilon\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}p\,(\tfrac{1}{12}a^3 - \tfrac{1}{2}ax^2 + \tfrac{1}{3}x^3),$$

da wegen der Symmetrie der Figur $\frac{dy}{dx}$ für $x = \frac{1}{2}a$ verschwindet. Ferner hat man

$$\varepsilon y = \tfrac{1}{12}p\,(\tfrac{1}{2}a^3x - ax^3 + \tfrac{1}{2}x^4),$$

ohne Constante, da $y = 0$ wird für $x = 0$. Das Maximum f der Ordinate (die Senkung oder Durchbiegung), entsprechend $x = \frac{1}{2}a$ ist $f = \frac{5}{384\varepsilon}a^4p$.

Es ist weiter $\int Xds = 0$, $\int^s Yds = \frac{1}{2}p(a-x) - \frac{1}{2}pa$; daher die Spannung nach §. 9, Nr. 4

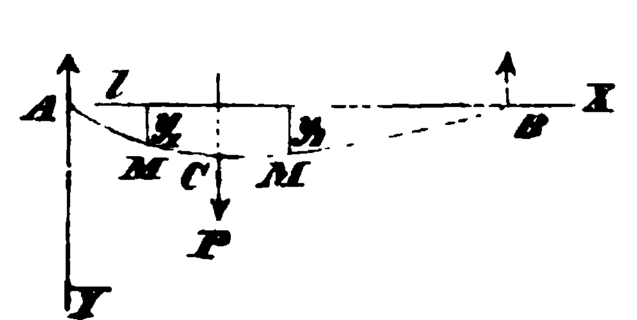


Fig. 47.

$$T = -\frac{dy}{ds}\int^s Yds = +\tfrac{1}{2}px\frac{dy}{dx},$$

da $\frac{dy}{ds}$ nahezu gleich $\frac{dy}{dx}$ wird.

§. 12. Die homogene, schwere elastische Linie liege auf zwei gleich hohen Stützen, trage aber im Abstande l von A noch ein Gewicht P (Fig. 47).

Den Widerstand der Stütze B findet man, indem man Momente nimmt in Bezug auf A, nämlich $Na = \frac{1}{2}pa^2 + Pl$. Man hat hier zweierlei Formeln zu bilden, je nachdem der Punkt $M(x, y)$ zwischen A und C oder zwischen B und C liegt. Im ersteren Falle ist die Momentensumme

$$M_1 = \tfrac{1}{2}p(a-x)^2 + P(l-x) - \left(\tfrac{1}{2}pa + P\frac{l}{a}\right)(a-x),$$

im andern Falle

$$M_2 = \tfrac{1}{2}p(a-x)^2 - \left(\tfrac{1}{2}pa + P\frac{l}{a}\right)(a-x).$$

Man hat daher für die Punkte des Bogens AC und BC die beiden verschiedenen Gleichungen:

$$\varepsilon\frac{d^2y_1}{dx^2} = M_1, \quad \varepsilon\frac{d^2y_2}{dx^2} = M_2.$$

Die Integration derselben führt 4 Constanten ein, welche man durch die 4 Bedingungen zu bestimmen hat: 1. für $x = l$ ist $\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx}$, 2. für $x = 0$ ist $y = 0$, 3. für $x = l$ ist $y_1 = y_2$, 4. für $x = a$ ist $y = 0$.

Die Senkung ist der grösste Werth unter den Maximis von y_1 und y_2.

§. 13. Die elastische Linie sei nicht schwer, sondern blos am Ende B mit einem Gewichte belastet, bei A aber eingespannt, so dass die Tangente daselbst horizontal ist (Fig. 48).

Hier ist $\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = P(a-x)$, $\varepsilon\frac{dy}{dx} = P(ax - \frac{1}{2}x^2)$, ohne Constante, da $\frac{dy}{dx} = 0$ ist für $x = 0$; $\varepsilon y = P(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{6}x^3)$, gleichfalls ohne Constante, da $y = 0$ für $x = 0$. Die Senkung (bei $x = a$) beträgt $f = \frac{1}{3}\frac{Pa^3}{\varepsilon}$.

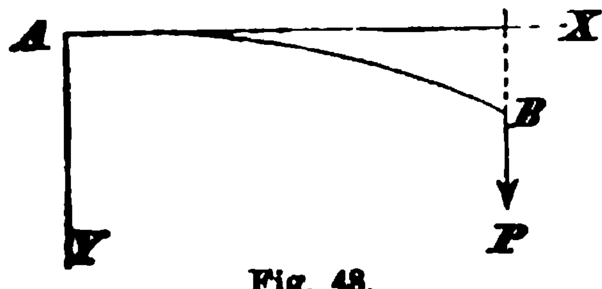


Fig. 48.

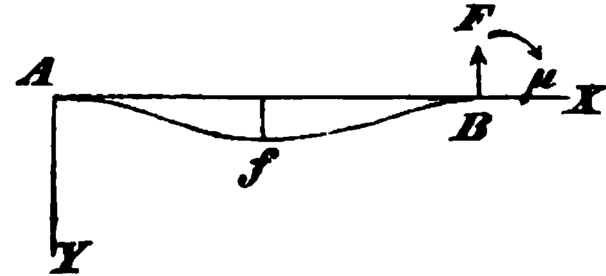


Fig. 49.

§. 14. Die homogene, schwere elastische Linie sei bei A horizontal eingespannt, bei B frei und weiter nicht belastet.

Hiefür ist

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = \tfrac{1}{2}p(a-x)^2, \quad \varepsilon\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{6}pa^3 - \tfrac{1}{6}p(a-x)^3,$$

$$\varepsilon y = \tfrac{1}{2}p\left(\tfrac{1}{2}a^2x^2 - \tfrac{1}{3}ax^3 + \tfrac{1}{12}x^4\right).$$

Die Senkung beträgt $f = \frac{1}{8}\frac{pa^4}{\varepsilon}$.

§. 15. **Die homogene, schwere elastische Linie sei bei A und B horizontal eingespannt und weiter nicht belastet** (Fig. 49).

Die Auflagerung und Einspannung bei B kann als äquivalent angesehen werden einer vertikal stützenden Kraft F und einem Paare vom Momente μ. Dadurch wird das Moment der Kräfte von dem Bogen AB im Punkte M gleich $\frac{1}{2}p\,(a-x)^2 + F\,(a-x) + \mu$ und die Differentialgleichung der elastischen Linie

$$\varepsilon\,\frac{d^2y}{dx^2} = \tfrac{1}{2}p\,(a-x)^2 + F\,(a-x) + \mu.$$

Aus ihr folgt $\varepsilon\,\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}p\,(a^2x - ax^2 + \frac{1}{3}x^3) + F\,(ax - \frac{1}{2}x^2) + \mu x$, ohne Constante, da $\frac{dy}{dx} = 0$ wird für $x = 0$. Weiter folgt $\varepsilon y = \frac{1}{2}p\,(\frac{1}{2}a^2x^2 - \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{12}x^4) + F\,(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{6}x^3) + \frac{1}{2}\mu x^2$, ohne Constante, da $y = 0$ ist für $x = 0$. Um die beiden Constanten F und μ zu bestimmen, hat man für $x = a$ sowohl $\frac{dy}{dx} = 0$, als auch $y = 0$. Diese Bedingungen liefern $F = -\frac{1}{2}pa$, $\mu = \frac{1}{12}pa^2$. Die Senkung beträgt $f = \frac{1}{384\varepsilon}\,pa^4$. Für die frei auf den Stützen aufliegende Linie betrug sie $\frac{5}{384}\,\frac{pa^4}{\varepsilon}$. Die Einspannung reducirt die Senkung also auf ein Fünftel.

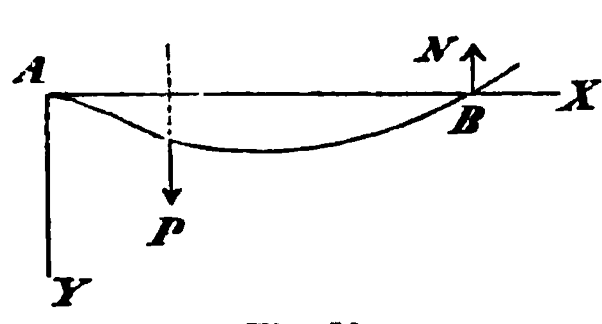


Fig. 50.

§. 16. **Die homogene schwere elastische Linie sei bei A eingespannt und liege bei B frei auf einer Stütze auf; ausserdem sei dieselbe durch ein einzelnes Gewicht P im Abstande l von A belastet** (Fig. 50).

Ist N der Widerstand der Stütze, so erhält man für Punkte $M\,(x, y)$ zwischen A und P und solche zwischen P und B:

$$M_1 = \tfrac{1}{2}p\,(a-x)^2 + P\,(l-x) - N\,(a-x),$$
$$M_2 = \tfrac{1}{2}p\,(a-x)^2 - N\,(a-x);$$

mithin

$$\varepsilon\,\frac{d^2y_1}{dx^2} = M_1, \quad \varepsilon\,\frac{d^2y_2}{dx^2} = M_2.$$

Die Bedingungen für die Bestimmung der Constanten sind

1. für $x = 0$ ist $y_1 = 0$ und $\frac{dy_1}{dx} = 0$,
2. für $x = l$ ist $y_1 = y_2$ und $\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx}$,
3. für $x = a$ ist $y_2 = 0$.

Wir gehen auf das Detail dieser für die Technik wichtigen Aufgaben hier nicht ein, da dieser Gegenstand den Schriften über angewandte Mechanik zufallen muss.

§. 17. **Der elastisch biegsame Faden im Raume.** Fallen die den elastischen Faden afficirenden Kräfte nicht in eine Ebene, so nimmt derselbe im Falle des Gleichgewichts die Gestalt einer doppelt gekrümmten Linie an. Wir setzen dabei voraus, dass blos ein elastischer Widerstand gegen die Biegung, d. h. von Tangente zu Tangente, aber kein Widerstand von Schmiegungsebene zu Schmiegungsebene (Torsionswiderstand) stattfinde. Damit ist, wie bisher, das Moment der elastischen Kräfte eines Curvenbogens vom Anfang A bis zu irgend einem Punkte $M\,(x, y, z)$

$$u = -\varepsilon\,\frac{d\psi}{ds} = -\frac{\varepsilon}{\varrho}.$$

Der Contingenzwinkel $d\psi$ ergibt sich mit Hülfe des Infinitesimaldreiecks Δ dreier aufeinanderfolgender Punkte M, M', M'' der Curve. Es ist nämlich $2\Delta = MM' \,.\, M'M'' \,.\, d\psi = ds\,(ds + d^2s)\,d\psi$, mithin $ds^2 d\psi = 2\Delta$ und $d\psi = \frac{2\Delta}{ds^2}$, sowie $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\psi}{ds} = \frac{2\Delta}{ds^3}$.

Daher wird
$$u = -2\varepsilon\frac{\Delta}{ds^3}.$$

Das Gleichgewicht zwischen den gegebenen und den elastischen Kräften am Bogen AM verlangt, dass das Moment H der ersteren dem Momente u der letzteren entgegengesetzt gleich sei. Die Componenten des Momentes H sind aber entsprechend §. 9 Nr. 4, in den Ebenen der yz, zx, xy oder als Axenmomente parallel den Axen der x, y, z gedacht
$$H_x = \int[dz\int Y ds - dy\int Z ds],\quad H_y = \int[dx\int Z ds - dz\int X ds],$$
$$H_z = \int[dy\int X ds - dx\int Y ds];$$
Die Componenten u_x, u_y, u_z von u parallel denselben Axen erhalten wir, indem wir das senkrecht zur Schmiegungsebene $MM'M''$, der Ebene des Dreiecks Δ, in welcher das Paar liegt, dessen Moment u ist (parallel zur Binormale oder zu der Krümmungsaxe der Curve), aufgetragene u auf die Coordinatenaxen projiciren. Die Richtungscosinusse dieses u gegen die Axen der x, y, z sind aber die Cosinusse der Winkel λ, μ, ν, welche das Dreieck Δ mit seinen Projectionen Δ_x, Δ_y, Δ_z auf die Ebenen der yz, zx, xy bildet, nämlich
$$\frac{\cos\lambda}{\Delta_x} = \frac{\cos\mu}{\Delta_y} = \frac{\cos\nu}{\Delta_z} = \frac{1}{\Delta} = \frac{2\varrho}{ds^3}.$$
Hiemit werden
$$u_x = -2\varepsilon\frac{\Delta_x}{ds^3},\quad u_y = -2\varepsilon\frac{\Delta_y}{ds^3},\quad u_z = -2\varepsilon\frac{\Delta_z}{ds^3}.$$
Mit Rücksicht auf
$$2\Delta_x = \begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix},\quad 2\Delta_y = \begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix},\quad 2\Delta_z = \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}$$
sind daher die Gleichgewichtsbedingungen im Punkte M
$$\frac{\varepsilon}{ds^3}\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix} - H_x = 0,\quad \frac{\varepsilon}{ds^3}\begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix} - H_y = 0,\quad \frac{\varepsilon}{ds^3}\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix} - H_z = 0.$$

Zwei dieser Gleichungen genügen zur Bestimmung der Gleichgewichtsfigur des elastischen Fadens. Die drei darin enthaltenen Integrale $\int X ds$, $\int Y ds$, $\int Z ds$ führen drei Constanten mit sich und die weiteren zur Bildung der Grössen H_x, H_y, H_z geforderten Integrationen verlangen noch je eine Constante weiter. Da die Gleichungen aber Differentialgleichungen 2. Ordnung sind, so treten durch die Integration von zweien von ihnen noch 4 neue Constanten in die Untersuchung ein. Demnach bestimmen 9 Constanten die Gleichgewichtsfigur des Fadens. Nimmt man die Coordinaten der beiden Endpunkte und die Fadenlänge als gegeben an, so bestimmen sich hiedurch 5 Constante. Die Richtung der Tangente in einem gegebenen Punkte ist durch 2 Bedingungen bestimmt. Gibt man also noch die Tangenten in den Endpunkten, so erhält man die vier weiteren Gleichungen zur Bestimmung der vier noch übrigen Constanten.

Schneidet man im Punkte M den Faden durch, so genügt es nicht, zur Erhaltung des Gleichgewichts blos längs der Tangente eine Spannung einzuführen,

vielmehr muss in der Schmiegungsebene des Endpunktes M neben der Tangentialkraft T noch eine Normalkraft V wirken, um das Ausweichen der Tangente in der Schmiegungsebene zu verhindern. Da diese beiden Kräfte, wenn der Faden steif gedacht wird, wobei die elastischen Kräfte verschwinden, wie am unveränderlichen System mit den gegebenen Kräften Gleichgewicht halten müssen, so erhält man T und V indem man die Kräfte $\int Xds$, $\int Yds$, $\int Zds$ auf die Tangente und die Hauptnormale projicirt und den Abstand p der Kraft V von M indem man die Momente in der Schmiegungsebene für M gleich Null setzt. Dies liefert zunächst

$$T + \frac{dx}{ds}\int^s Xds + \frac{dy}{ds}\int^s Yds + \frac{dz}{ds}\int^s Zds = 0$$

und weil die Richtungscosinusse der Hauptnormalen

$$\varrho \cdot \frac{d \cdot \frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \varrho \cdot \frac{d \cdot \frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \varrho \cdot \frac{d \cdot \frac{dz}{ds}}{ds},$$

sind:

$$V + \varrho \left(\frac{d \cdot \frac{dx}{ds}}{ds} \int^s Xds + \frac{d \cdot \frac{dy}{ds}}{ds} \int^s Yds + \frac{d \cdot \frac{dz}{ds}}{ds} \int^s Zds \right) = 0,$$

endlich weil das Moment H der gegebenen Kräfte gleich u sein muss

$$Vp + u = 0.$$

Die Kräfte T und V sind im Allgemeinen einer Einzelkraft äquivalent, welche in die Schmiegungsebene fällt und die Tangente im Abstande p von M trifft; in besonderen Fällen können sie aber auch einer unendlich kleinen unendlich fernen Kraft, d. h. einem Paare äquivalent sein.

§. 18. Auf die verlängerten Tangenten der Endpunkte einer elastisch biegsamen Geraden oder auf sonstige an den Endpunkten angefügte anderweitige unveränderliche Gebilde wirken an jedem Ende beliebige Kräfte im Raume, ohne dass über den Bogen selbst continuirlich Kräfte vertheilt sind; man soll Gestalt, Spannung u. s. w. der Fadencurve ermitteln.

Denken wir die Endkräfte beiderseits für ihre Centralaxen auf Resultante A und resultirendes Axenmoment m reducirt, so folgt sofort, da das Gleichgewicht noch fortbestehen muss, wenn der Faden steif wird, dass die Centralaxen zusammenfallen und sowohl die Resultanten, als auch die Axenmomente entgegengesetzt gleich sein müssen. Die gemeinschaftliche Centralaxe nennen wir die Axe der elastischen Curve. Wir wählen sie zur Axe der x und legen die z-Axe durch den Anfangspunkt des Bogens. Für einen beliebigen Punkt M (x, y, z) sind dann die Momente der Resultanten A gleich m, $-Az$, Ay und bestehen die drei Gleichgewichtsbedingungen:

$$\frac{\varepsilon}{ds^3}\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix} = m, \quad \frac{\varepsilon}{ds^3}\begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix} = -Az, \quad \frac{\varepsilon}{ds^3}\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix} = Ay.$$

Diese Gleichungen können wir auch so schreiben:

$$\frac{\varepsilon}{\varrho}\cos\lambda = m, \quad \frac{\varepsilon}{\varrho}\cos\mu = -Az, \quad \frac{\varepsilon}{\varrho}\cos\nu = Ay.$$

Die erste von ihnen sagt aus, dass die Krümmung der Curve der Secante des Winkels zwischen der Krümmungsaxe und der Axe der Curve

(oder also der Cosecante des Winkels zwischen der Schmiegungsebene und der Axe der Curve) proportional ist.

Quadrirt und addirt man diese drei Gleichungen, so ergibt sich

$$\frac{\varepsilon^2}{\varrho^2} = m^2 + A^2 (y^2 + z^2) = m^2 + A^2 r^2,$$

wenn man mit r den Abstand des Curvenpunktes von der Axe bezeichnet. Das Quadrat der Krümmung der Curve hat daher zwei Glieder, ein constantes und ein veränderliches, dem Quadrate des Abstandes von der Axe proportionales. Die Krümmung wächst daher mit dem Abstande von der Axe.

Schneidet die Curve die Axe, so ist für den Schnittpunkt $r = 0$ und folglich $\frac{\varepsilon}{\varrho} = m$. Da aber $\frac{\varepsilon}{\varrho} \cos\lambda = m$ ist, so folgt $\cos\lambda = 1$, d. h. in einem Schnittpunkte der Curve mit der Axe fällt die Krümmungsaxe mit der Axe der Curve zusammen und steht also die Schmiegungsebene auf dieser Axe senkrecht. Für Punkte der Axe wird die Krümmung ein Minimum; dies Minimum ist Null für $m = 0$.

Parallel mit der Axe kann die Curve nur in einem unendlich fernen Punkte werden. Denn da in diesem Falle auch die Schmiegungsebene mit der Axe parallel werden muss, so wird in der Formel $\frac{\varepsilon}{\varrho} \cos\lambda = m$ der Factor $\cos\lambda = 0$ und mithin $\frac{\varepsilon}{\varrho} = \infty$ werden müssen. Hierzu folgt aber dann $r = \infty$. Nur in dem einen Falle, dass $m = 0$ ist, ist $\cos\lambda$ stets Null, also die Schmiegungsebene immer mit der Axe parallel. In diesem Falle ist aber, wie sich sogleich nachher zeigen wird, die Curve eben und gibt es Punkte im Endlichen, deren Tangente mit der Axe parallel läuft.

Indem man aus den Gleichungen $\frac{\varepsilon^2}{\varrho^2} = m^2 + A^2 r^2$ und $\frac{\varepsilon}{\varrho} \cos\lambda = m$ die Grösse $\frac{\varepsilon}{\varrho}$ eliminirt, ergibt sich $m \operatorname{tg}\lambda = Ar$, d. h. der Abstand des Curvenpunktes von der Axe ist der Tangente des Winkels zwischen der Krümmungsaxe und der Axe der Curve proportional oder das Product aus dem Abstande r und der Tangente der Neigung der Schmiegungsebene gegen die Axe ist eine Constante $m : A$.

Eliminirt man m, so folgt $\frac{\varepsilon}{\varrho} \sin\lambda = Ar$. Daher ist die Krümmung dem Abstande r von der Axe und der Cosecante der Neigung der Krümmungsaxe gegen die Axe der Kräfte proportional.

Multiplicirt man die drei Gleichungen in der zuerst aufgestellten Form der Reihe nach mit dx, dy, dz und addirt sie, so verschwindet die Determinante, welche gleich der Summe der linken Seite wird, indem sie zwei gleiche Reihen enthält und bleibt

$$m dx + A \begin{vmatrix} y & z \\ dy & dz \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad m dx + A (y dz - z dy) = 0.$$

Es ist aber $y dz - z dy$ der doppelte Elementarsector, den die Projection des Abstandes r des Punktes (x, y, z) von der Axe auf die yz-Ebene beim Uebergange von diesem Punkte zum nächstfolgenden beschreibt, während dx die Projection des zwischenliegenden Bogenelementes ds auf die Axe ist. Integrirt man also

von einem Punkte M bis zu einem anderen Punkte N der Curve und bezeichnet die Projectionen dieser Punkte auf die Axe mit μ, ν und ihre Projectionen auf die zur Axe senkrechte yz-Ebene mit M_1, N_1, so erhält man

$$m \,.\, \mu\nu + 2A \,.\, \text{Sect. } OM_1N_1 = 0$$

oder

$$\frac{\text{Sect. } OM_1N_1}{\mu\nu} = -\tfrac{1}{2}\frac{m}{A},$$

d. h. der Sector, welchen der Radiusvector in der Projection der Curve auf die Ebene des Paares m beschreibt, ist proportional der Projection des Bogens auf die Axe der Curve.

Ist insbesondere $m = 0$, d. h. sind die Endkräfte Einzelresultanten äquivalent, so wird die zu integrirende Gleichung $ydz - zdy = 0$, d. h. $z : y = Const.$ oder $z + ay = 0$, also die Curve eben. Dann ist $\frac{\varepsilon}{\varrho} = Ar$, d. h. die Krümmung dem Abstande von der Axe proportional, wie oben §. 10, Nr. 1, S. 120.

Ist $A = 0$, d. h. reduciren sich die Endkräfte auf Paare m, so wird $mdx = 0$, also $x = Const.$; d. h. die Curve liegt in einer zur Axe der Paare senkrechten Ebene; ferner ist $\frac{\varepsilon}{\varrho} = m$, also die Krümmung constant. Mithin ist die Curve ein Kreis (§. 10, Nr. 12, S. 125).

Von den drei Differentialgleichungen des Gleichgewichts genügen irgend zwei oder irgend zwei von einander unabhängige Combinationen derselben zur Bestimmung der Gleichgewichtsform. So z. B. die beiden

$$\frac{\varepsilon^2}{\varrho^2} = m^2 + A^2r^2, \quad mdx + A\,(ydz - zdy) = 0.$$

Jede Curve, welche diesen beiden Gleichungen genügt, ist eine Gleichgewichtsform der elastischen Linie, für welche die x-Axe die Axe der Kräfte ist. Die Gleichgewichtsform ist daher durch die beiden Eigenschaften definirt: 1. das Quadrat der Krümmung ist eine lineare Function vom Quadrate des Abstandes von der Axe der Kräfte und 2. der Sector, welchen die Projection irgend eines Bogens auf die Ebene der Paare mit den Projectionen der Abstände seiner Endpunkte einschliesst, ist proportional der Projection des Bogens auf die Axe. Der Proportionalitätsfactor der Projection des Bogens ist $-\frac{1}{2}\frac{m}{A}$, der Coefficient am Quadrate des Abstandes in dem Ausdrucke für die Krümmung ist $\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)^2$, während das Absolutglied in demselben $\left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2$ ist.

Die Schraubenlinie eines Rotationscylinders genügt diesen beiden Bedingungen und ist daher eine Gleichgewichtsfigur des elastischen Fadens. Denn für sie sind r und ϱ constant und zwar ist $\varrho = a : \sin^2\alpha$, wenn a den Radius des Cylinders, α die constante Neigung der Curve gegen die Axe bedeutet. Man hat daher zur Bestimmung von m und A zunächst die Gleichung $\frac{\varepsilon^2}{a^2}\sin^2\alpha = m^2 + A^2a^2$. Ferner folgt aus der Erzeugungsart der Schraubenlinie, dass auch die zweite Bedingung erfüllt ist. Denn die Projection des Bogens auf die Axe des Cylinders ist proportional dem Winkel, welchen die Radien des Kreisschnittes mit einander bilden, welche nach den Projectionen der Endpunkte

des Bogens hinführen; diesem Winkel ist aber auch der von ihnen eingeschlossene Sector proportional. Daher ist der Sector selbst der Projection des Bogens auf die Axe proportional. Die Constante dieser Proportionalität ist $\pi a^2 : h$, wenn h die Höhe des Schraubenganges bedeutet, oder da $h : 2\pi a = \text{cotang}\,\alpha$ ist,

$$\pi a^2 : 2\pi a \text{ cotang } \alpha = \tfrac{1}{2} a \text{ tg } \alpha.$$

Wir erhalten daher als weitere Gleichung zur Bestimmung von m und A vermöge der zweiten Bedingung $-m : A = a \,.\, \text{tang}\,\alpha$. Aus den beiden Gleichungen ergeben sich:

$$m = \frac{\varepsilon}{a}\sin^2\alpha, \qquad A = -\frac{\varepsilon}{a^2}\frac{\sin^2\alpha}{\text{tg}\,\alpha}.$$

Die zweite Bedingung liefert den einfachen Satz

$$-\frac{m}{A} = \frac{\pi a^2}{h},$$

d. h. es verhält sich das Moment m des Paares zur Kraft A, wie die Fläche des Cylinderquerschnitts zur Höhe des Schraubenganges.

Für die Spannung T, die Normalkraft V und deren Abstand p ergeben sich nach §. 17. wegen $\int X ds = A$, $\int Y ds = \int Z ds = 0$, nämlich

$$T = -A\frac{dx}{ds}, \quad V = -A\frac{d\cdot\frac{dz}{ds}}{ds}, \quad Vp + m = 0.$$

Für die Schraubenlinie ist $\frac{dx}{ds}$ constant, nämlich der Cosinus der constanten Neigung der Curve gegen die Axe. Daher hat T durchaus denselben Werth. Die Normalkraft V ist Null, wie auch direkt ersichtlich, denn die Hauptnormale der Schraubenlinie ist senkrecht zur Axe und daher ist die Projection von A auf sie Null. Da $V = 0$ ist, so muss $p = \infty$ werden. Es kann daher nur ein Paar von dem Momente $-m$ in der Schmiegungsebene das Gleichgewicht erhalten in Verbindung mit T; dasselbe kann mit T zu einer Kraft vereinigt werden.

§. 19. Ein elastischer Faden habe die Gestalt einer ebenen Curve; durch gegebene Kräfte werde er in die Gestalt einer doppelt gekrümmten Curve verdreht, jedoch so, dass die Contingenzwinkel nicht verändert werden und nur die Ebene der Curve sich in die verschiedenen Schmiegungsebenen der Curve doppelter Krümmung entblättert. Es findet demnach keine weitere Biegung, nur eine Torsion um die Tangenten statt. Man soll die Gestalt der Curve ermitteln.

Es seien M, M', M'', M''' vier aufeinanderfolgende Punkte der Gleichgewichtscurve, also $MM'M''$, $M'M''M'''$ zwei aufeinanderfolgende Schmiegungsebenen und $d\sigma$ der unendlichkleine Winkel, den sie mit einander bilden. Durch den elastischen Torsionswiderstand werden diese beiden Schmiegungsebenen zum Zusammenfallen getrieben; dies Zusammenfallen kann durch eine unveränderliche Linie verhindert werden, welche zwei Punkte derselben, z. B. M und M''', verbindet. Daher ist der Torsionswiderstand der Spannung der Linie MM''' entgegengesetzt gleich. Derselbe kann aber ebensogut durch zwei andere Kräfte dargestellt werden, welche irgend zwei andere Punkte der Schmiegungsebenen verbinden. Durch ähnliche Schlüsse, wie §. 9 bei der Biegung elastischer Linien, ergibt sich für alle solche Kräfte, dass das Moment in Bezug auf die Schnitt-

linie beider Schmiegungsebenen, nämlich in Bezug auf die Tangente $M'M''$ als Axe dasselbe sein muss. Nennen wir v dies Moment, so können wir die Intensität p der längs MM''' wirkenden Kräfte darstellen. Denn das Moment von p in Bezug auf $M'M''$ ist $p\delta \sin(p, M'M'')$, wenn δ der kürzeste Abstand der Kraft p von $M'M''$ ist. Man hat daher

$$p\delta \sin(p, M'M'') = v,$$

woraus p folgt. Da das 6fache Volumen Π der Pyramide $MM'M''M'''$, nämlich $6\Pi = MM''' . M'M'' . \delta \sin(p, M'M'')$ ist, so wird

$$p = \tfrac{1}{6} \frac{MM''' . M'M''}{\Pi} v.$$

Das Moment v heisst das Torsionsmoment. Wir setzen es dem unendlichkleinen Schmiegungswinkel $d\sigma$ oder vielmehr der Torsion $\frac{1}{r} = \frac{d\sigma}{ds}$ proportional, wo r den Torsionsradius bezeichnet, nämlich

$$v = -\vartheta \cdot \frac{d\sigma}{ds} = -\frac{\vartheta}{r},$$

wobei das Zeichen $(-)$ den Sinn von v, entgegengesetzt dem Sinne des Schmiegungswinkels, ausdrückt. Der Coefficient ϑ heisst der Torsionsmodulus.

Um den Schmiegungswinkel $d\sigma$ darzustellen, kann man bemerken, dass

$$6\Pi = 2\Delta MM'M'' \cdot \frac{2\Delta M'M''M'''}{M'M''} \sin d\sigma,$$

nämlich gleich der doppelten Grundfläche $2\Delta MM'M''$ multiplicirt mit der von M''' auf sie gefällte Höhe ist. Diese Höhe ist aber das Produkt aus der Höhe des Dreiecks $\Delta M'M''M'''$, von M''' auf die Grundlinie $M'M''$ gefällt, multiplicirt mit dem Sinus der Neigung $d\sigma$ der Ebenen der Dreiecke $MM'M''$ und $M'M''M'''$ gegen einander. Die Höhe des Dreiecks $\Delta M'M''M'''$ aber ist dessen Fläche, dividirt durch $M'M''$. Nun ist

$$2\Delta MM'M'' = MM' . M'M'' . d\psi = ds\,(ds + d^2 s)\,d\psi,$$

wenn $MM' = ds$, also $M'M'' = d(s + ds) = ds + d^2 s$ und $d\psi$ den Contingenzwinkel bedeutet, also abgekürzt $2\Delta MM'M'' = ds^2 d\psi$ ist. Ebenso ist

$$2\Delta M'M''M''' = (ds + d^2 s)(ds + 2d^2 s + d^3 s)(d\psi + d^2\psi),$$

weil $M''M''' = d(s + ds) + d^2(s + ds) = ds + 2d^2 s + d^3 s$ und die Seiten $M'M''$ und $M''M'''$ den geänderten Contingenzwinkel $d(\psi + d\psi) = d\psi + d^2\psi$ mit einander bilden. Daher wird abgekürzt $2\Delta M'M''M''' = ds^2 d\psi$ und mithin $\Delta M'M''M''' = \Delta MM'M''$. Hiermit wird

$$6\Pi = 4(\Delta MM'M'')^2 \frac{d\sigma}{ds} = ds^3 d\psi^2 d\sigma = ds^6 \cdot \left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 \cdot \frac{d\sigma}{ds}.$$

Man erhält hierdurch für die Schmiegung oder Torsion der Curve, wenn r den Schmiegungs- oder Torsionsradius bedeutet:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{r} = \frac{6\Pi}{4(\Delta MM'M'')^2}.$$

Sind nun x, y, z die Coordinaten von M, so sind $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die von M', $x + dx + d(x + dx) = x + 2dx + d^2 x$, $y + 2dy + d^2 y$, $z + 2dz + d^2 z$ die von M'' und $(x + 2dx + d^2 x) + d(x + 2dx + d^2 x) = x + 3dx + 3d^2 x + d^3 x$, $y + 3dy + 3d^2 y + d^3 y$, $z + 3dz + 3d^2 z + d^3 z$ die von M''' und wird mithin

$$6\Pi = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix} d^3x + \begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix} d^3y + \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix} d^3z.$$

Ferner ist

$$4(\Delta M M' M'')^2 = (2\Delta_x)^2 + (2\Delta_y)^2 + (2\Delta_z)^2$$
$$= \begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}^2.$$

Daher wird schliesslich

$$\frac{1}{r} = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} : \left(\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}^2 \right).$$

Man bemerke, dass 6Π auch unter der Form dargestellt werden kann:

$$6\Pi = \frac{4d\sigma^6}{\varrho^2 r}.$$

Um die Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen, drücken wir aus, dass das Moment aller Kräfte längs des Bogens vom Anfang bis zu einem beliebigen Punkte $M(x, y, z)$ gleich dem Elasticitätsmomente, also hier gleich dem Torsionsmomente, sei. Da die Axe des Torsionsmomentes die Tangente ist, so sind seine Componenten $-\frac{\vartheta}{r}\frac{dx}{ds}$, $-\frac{\vartheta}{r}\frac{dy}{ds}$, $-\frac{\vartheta}{r}\frac{dz}{ds}$. Daher sind die gesuchten Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\vartheta}{r}\frac{dx}{ds} - H_x = 0, \quad \frac{\vartheta}{r}\frac{dy}{ds} - H_y = 0, \quad \frac{\vartheta}{r}\frac{dz}{ds} - H_z = 0,$$

wo

$$H_x = \int [dz \int Y ds - dy \int Z ds], \quad H_y = \int [dx \int Z ds - dz \int X ds],$$
$$H_z = \int [dy \int X ds - dx \int Y ds]$$

sind. Hiezu kommt aber noch die Bedingung, dass der Krümmungshalbmesser eine gegebene Function des Bogens ist; denn da die Contingenzwinkel und die Bogenelemente durch die Torsion nicht geändert werden, so bleiben die Krümmungshalbmesser der Curve doppelter Krümmung, in welche die ursprüngliche ebene Curve übergeht, dieselben, wie die der ursprünglichen ebenen Curve.

Zwei dieser Gleichungen genügen zur Bestimmung der Gleichgewichtsform. Da jede der Grössen H_x, H_y, H_z drei Constante mit sich führt und r dritte Differentialien enthält, so liefert die Integration dieser 2 Gleichungen 12 Constanten, welche zu bestimmen sind. Zur Bestimmung derselben genügt es, wenn zwei Punkte der Curve, in diesen die Tangenten und die Schmiegungsebenen gegeben sind. Denn dass die Curve durch einen Punkt gehen soll, sind zwei Bedingungen, die Lage der Tangente fordert zwei Bedingungen, die Lage der Schmiegungsebene enthält eine weitere und der gegebene Krümmungshalbmesser noch eine solche. Dies gibt für 2 Punkte 12 Bedingungen.

Durchschneidet man die Curve in M, so ist eine Kraft T in der Richtung der Tangente und ein Paar erforderlich, dessen Axe der Tangente parallel ist, um das Gleichgewicht zu sichern.

Reduciren sich die gegebenen Kräfte auf A und m, wie §. 18., so sind die Gleichungen des Gleichgewichts:

$$\frac{\vartheta}{r}\frac{dx}{ds} = m, \quad \frac{\vartheta}{r}\frac{dy}{ds} = -Az, \quad \frac{\vartheta}{r}\frac{dz}{ds} = Ay.$$

Aus ihnen folgt durch Multiplication mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ und Addition, da $\frac{1}{r} = \frac{d\sigma}{ds}$ ist,

$$\vartheta d\sigma = m dx + A(y dz - z dy),$$

welche Gleichung durch Integration einen für die Bestimmung der Curve wichtigen Satz liefert. Denn $ydz - zdy$ ist der doppelte Elementarsector in der Ebene des Paares m, dx die Projection des Bogenelementes ds auf die Axe der Kräfte. Es besteht also eine lineare Relation zwischen der Projection des Bogens auf die Axe, dem Winkel der Schmiegungsebenen in seinen Endpunkten und dem Sector, den die Projection des Bogens auf die Ebene des Paares mit den Projectionen der Abstände der Endpunkte von der Axe auf die Ebene bildet.

Quadrirt und addirt man die Gleichungen, so kommt

$$\frac{\vartheta^2}{r^2} = m^2 + A^2\delta^2,$$

wo δ den Abstand des Curvenpunktes von der Axe bedeutet. Es sind daher r und δ zusammen constant oder variabel.

Da $\frac{dx}{ds}$ der Cosinus der Neigung der Curve gegen die Axe ist, so folgt, im Falle dass $A = 0$ ist, $\frac{dx}{ds} = \frac{\vartheta}{m} \cdot \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\vartheta}{m} \cdot \frac{1}{r}$, d. h. es bildet in diesem Falle die Tangente mit der Axe einen Winkel, dessen Cosinus der Torsion proportional ist.

Man überzeugt sich leicht mit Hülfe dieser Eigenschaften, dass, wenn die ursprüngliche Form der Curve ein Kreis ist, die tordirte Gestalt eine Schraubenlinie eines Kreiscylinders sein wird. Denn für diese ist die Krümmung, Torsion und die Neigung gegen die Axe constant.

§. 20. Es sei der Faden elastisch, sowohl hinsichtlich der Biegung, als auch hinsichtlich der Torsion. Das Moment u der Biegung ist $u = -\frac{\varepsilon}{\varrho} = -\varepsilon\frac{d\psi}{ds}$ und seine Axe senkrecht zur Schmiegungsebene, in welcher das betreffende Paar zu denken ist; das Torsionsmoment v ist

$$v = -\frac{\vartheta}{r} = -\vartheta\frac{d\sigma}{ds}$$

und seine Axe hat die Richtung der Tangente. Die Componenten des ersten, parallel den Coordinatenaxen sind daher

$$-\frac{\varepsilon}{\varrho}\cos\lambda, \quad -\frac{\varepsilon}{\varrho}\cos\mu, \quad -\frac{\varepsilon}{\varrho}\cos\nu,$$

wo

$$\frac{\cos\lambda}{\Delta_x} = \frac{\cos\mu}{\Delta_y} = \frac{\cos\nu}{\Delta_z} = \frac{1}{\Delta},$$

$$2\Delta_x = \begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}, \quad 2\Delta_y = \begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix}, \quad 2\Delta_z = \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix},$$

$$\Delta^2 = \Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{2\Delta}{ds^3}.$$

Die Componenten des Torsionsmomentes sind

$$-\frac{\vartheta}{r}\cos\alpha\,,\quad -\frac{\vartheta}{r}\cos\beta\,,\quad -\frac{\vartheta}{r}\cos\gamma\,,$$

wo

$$\frac{\cos\alpha}{dx}=\frac{\cos\beta}{dy}=\frac{\cos\gamma}{dz}=\frac{1}{ds}\,,$$

$$\frac{1}{r}=\frac{6\Pi}{4\Delta^2}=\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} : \left(\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}^2\right).$$

Daher sind die Bedingungen des Gleichgewichtes:

$$\frac{\varepsilon}{\varrho}\cos\lambda+\frac{\vartheta}{r}\cos\alpha-H_x=0\,,$$

$$\frac{\varepsilon}{\varrho}\cos\mu+\frac{\vartheta}{\varrho}\cos\beta-H_y=0\,,$$

$$\frac{\varepsilon}{\varrho}\cos\nu+\frac{\vartheta}{\varrho}\cos\gamma-H_z=0.$$

Quadrirt und addirt man diese Gleichungen, nachdem man H_x, H_y, H_z auf die rechten Seiten gebracht hat und bezeichnet, wie oben, mit H das Moment der gegebenen Kräfte, so kommt, weil die Tangente und die Binormale zu einander senkrecht sind und also $\cos\alpha\cos\lambda+\cos\beta\cos\mu+\cos\gamma\cos\nu=0$ ist,

$$\frac{\varepsilon^2}{\varrho^2}+\frac{\vartheta^2}{r^2}=H^2.$$

Multiplicirt man die Gleichungen mit $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, addirt sie und nimmt man dieselbe Operation mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ vor, so erhält man

$$\frac{\varepsilon}{\varrho}=H_x\cos\lambda+H_y\cos\mu+H_z\cos\nu\,,$$

$$\frac{\vartheta}{r}=H_x\cos\alpha+H_y\cos\beta+H_z\cos\gamma\,,$$

d. h. die Projectionen von H auf die Binormale und die Tangente sind gleich den Momenten der Biegung und der Torsion.

Multiplicirt man die Gleichungen mit d^2x, d^2y, d^2z und bemerkt, dass

$$d^2x\cos\lambda+d^2y\cos\mu+d^2z\cos\nu$$

$$=\left(\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}d^2x+\begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix}d^2y+\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}d^2z\right):2\Delta=\begin{vmatrix} d^2x & d^2y & d^2z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}:2\Delta=0,$$

$$d^2x\cos\alpha+d^2y\cos\beta+d^2z\cos\gamma$$

$$=\frac{dx}{ds}d^2x+\frac{dy}{ds}d^2y+\frac{dz}{ds}d^2z=\frac{d}{ds}\cdot\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right]\cdot ds=0\,,$$

so folgt

$$H_x d^2x+H_y d^2y+H_z d^2z=0\,.$$

Diese Gleichung drückt aus, dass das Moment H senkrecht zur Hauptnormalen ist. Denn es sind, wenn man den Bogen s als unabhängige Variabele wählt, $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{dz^2}$ den Richtungscosinussen der Hauptnormalen proportional.

Für den Fall, dass blos an den Endpunkten des Bogens Kräfte wirken, hat man $H_x=m$, $H_y=-Az$, $H_z=Ay$ und werden die Gleichungen, in der ausführlichen Form geschrieben:

$$\frac{\varepsilon}{ds^3}\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix} + \frac{\vartheta}{r}\frac{dx}{ds} = m, \quad \frac{\varepsilon}{ds^3}\begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix} + \frac{\vartheta}{r}\frac{dy}{ds} = -Az,$$

$$\frac{\varepsilon}{ds^3}\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix} + \frac{\vartheta}{r}\frac{dz}{ds} = Ay.$$

Quadrirt und addirt man sie, so kommt, dem Obigen entsprechend,

$$\frac{\varepsilon^2}{\varrho^2} + \frac{\vartheta^2}{r^2} = m^2 + A^2\delta^2,$$

wenn δ den Abstand von der Axe der Kräfte bedeutet.

Multiplicirt man die Gleichungen mit dx, dy, dz und addirt sie, so kommt:

$$\vartheta\frac{ds}{r} = mdx + A(ydz - zdy)$$

oder da $\frac{1}{r} = \frac{d\sigma}{ds}$ ist,

$$\vartheta \cdot d\sigma = mdx + A(ydz - zdy).$$

Diese und die vorige Gleichungscombination genügen zur Bestimmung der Gleichgewichtsform des Fadens. Da für die Schraubenlinie ϱ und r constant sind, so folgert man mit Rücksicht auf das über dieselbe im vorigen §. gesagte, dass die Schraubenlinie eine Gleichgewichtsform des elastischen Fadens ist.

Multiplicirt man die Gleichungen mit $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$ und addirt sie, so folgt

$$m\frac{d^2x}{ds^2} + A\left(y\frac{d^2z}{ds^2} - z\frac{d^2y}{ds^2}\right) = 0$$

oder

$$\frac{d}{ds}\left[m\frac{dx}{ds} + A\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right)\right] = 0.$$

Vergleicht man dies mit der vorigen Gleichung, so folgt $\frac{d}{ds}\left(\frac{\vartheta}{r}\right) = 0$, d. h. die Torsion ist constant.

Ist insbesondere $m = 0$, d. h. reduciren sich die äusseren Kräfte auf Einzelresultanten, so folgt

$$y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds} = \alpha,$$

wo α eine willkührliche Constante bedeutet. Es ist daher der doppelte Elementarsector in der yz-Ebene dem Bogenelemente, der Sector selbst also dem Bogen s proportional. Diese Gleichung lässt noch eine andere Deutung zu. Sie ist nämlich die Differentialgleichung der kürzesten Linie auf einer Rotationsfläche um die z-Axe. S. B. I, S. 437. Hieraus folgt, dass in dem Falle $m = 0$ die elastische Linie auf der Fläche, welche sie durch Rotation um die Axe der Kräfte erzeugt, eine kürzeste Linie ist. Daher ist auch das Produkt aus dem Abstande von der Axe in den Sinus des Azimuths constant.

In dem Falle $A = 0$, d. h. wenn an den Enden entgegengesetzte Kräftepaare wirken, folgt $\frac{dx}{ds} = Const.$, d. h. die elastische Linie hat durchaus constante Neigung gegen die Axe.

Vgl. Wantzel, *Note sur l'intégration des équations de la courbe élastique à double courbure.* Comptes r. T. XVIII, p. 1197 (1844). Vgl. auch Binet, *Mé-*

moire sur l'intégration des équations de la courbe élastique à double courbure. Ebendas. p. 1115. Das Problem wird auf elliptische Integrale zurückgeführt und zeigt grosse Aehnlichkeit mit dem Problem des sphärischen Pendels.

§. 21. Ausdehnung und Zusammendrückung eines elastischen Stabes von constantem Querschnitt. Einen homogenen parallelepipedischen oder cylindrischen Stab von der Länge l und dem Querschnitte Q wollen wir als ein Aggregat paralleler Fasern von unendlich kleinem Querschnitt ω ansehen. Ein solcher ist ein elastischer Faden im Sinne von §. 4. und erleidet, wenn er durch entgegengesetzt gleiche Kräfte von der Intensität p gespannt wird, eine Ausdehnung $\lambda = \frac{pl}{\varepsilon}$. Wirken auf unseren Stab entgegengesetzt gleiche Kräfte P und darf vorausgesetzt werden, dass die Kräfte sich ihrer Wirkung nach so über die Endflächen vertheilen, dass an allen Fasern gleiche Kräfte p angreifen, deren Resultante P ist, so besteht die Gleichung

$$\frac{p}{P} = \frac{\omega}{Q}.$$

Entnimmt man hieraus den Werth von $p = \frac{P}{Q}\omega$ und setzt ihn in die Formel für λ ein, so erhält man für die gemeinschaftliche Verlängerung aller Fasern des Stabes oder die Verlängerung des Stabes selbst in Folge der Einwirkung der Kräfte P

$$\lambda = \frac{\omega}{\varepsilon} \cdot \frac{Pl}{Q} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{1}{E} \cdot \frac{Pl}{Q},$$

indem wir $\varepsilon : \omega$ in der Grenze mit E bezeichnen. Diese Grösse $1 : E$ kann aufgefasst werden als die Verlängerung, welche ein Stab von der Länge $l = 1$ und dem Querschnitte $Q = 1$ durch die spannenden Kräfte $P = 1$ erleidet. Sie heisst der Elasticitätsmodulus des Materials, aus welchem der Stab besteht, für Dehnung. Aus dieser Formel erhalten wir für die Intensität P der spannenden Kräfte, welche einen Stab von der Länge l und dem Querschnitte Q um λ ausdehnen:

$$P = EQ\frac{\lambda}{l}.$$

Man sieht hieraus, dass der Elasticitätsmodulus auch als die Kraft definirt werden kann, welche den Stab vom Querschnitte $Q = 1$ um die Länge $\lambda = l$, d. h. um sich selbst verlängern würde. Die Kraft $\frac{P}{Q}$, welche dem Querschnitt 1 entspricht, heisst die Spannung, auf die Flächeneinheit bezogen; die Grösse $\frac{\lambda}{l}$, welche die Ausdehnung der Linieneinheit bedeutet, wird die specifische Ausdehnung genannt. In den Anwendungen auf technische Constructionen darf die Spannung $\frac{P}{Q}$ eine voraus bestimmte Grösse k nicht überschreiten.

Diese Betrachtungen gelten auch für den Fall, dass der Stab durch gleiche Kräfte P zusammengedrückt wird.

1. Es sei l die ursprüngliche Länge eines homogenen, schweren cylindrischen Stabes, welcher vertical am oberen Ende A befestigt, am unteren Ende B von einer Kraft P gespannt wird. Nach der Dehnung sei Gleichgewicht eingetreten. Das Stabstück AM vom oberen Ende an nach unten gerechnet, von der ursprünglichen Länge σ erlange durch die Dehnung die Länge s und sei die Verlängerung

$\lambda = s - \sigma$; dann ist die Verlängerung des Längenelementes $d\sigma$ an der Stelle M gleich $d\lambda$ und die specifische Verlängerung $\frac{d\lambda}{d\sigma}$. Die Kraft, welche diese Verlängerung über den ganzen Querschnitt Q hervorzubringen vermag, wäre $EQ\frac{d\lambda}{d\sigma}$. Sie hält an dem Stabstück AM mit dem Gewichte dieses Stückes und dem Widerstande der Befestigung, gleich P, Gleichgewicht. Ebenso hält sie an dem Stabstück MB, im umgekehrten Sinne genommen, mit dem Gewichte desselben und der Endkraft P Gleichgewicht. Daher ist

$$-EQ\frac{d\lambda}{d\sigma} + P + \delta g Q(l - \sigma) = 0$$

oder

$$EQ\frac{d\lambda}{d\sigma} = P + \delta g Q(l - \sigma).$$

Dividirt man diesen Ausdruck mit Q, so liefert er die Spannung, auf die Flächeneinheit bezogen im Querschnitt bei M. Sie ist eine lineare Function von σ und wird ein Minimum für $\sigma = 0$, d. h. am oberen Ende. Graphisch wird sie durch die Ordinate einer Geraden dargestellt für σ als Abscisse. Durch Integration gibt der Ausdruck die Verlängerung λ des Stabstückes AM, wofür:

$$EQ\lambda = P\sigma + \delta g Q(l\sigma - \tfrac{1}{2}\sigma^2).$$

Die Gesammtverlängerung λ des Stabes folgt für $\sigma = l$ und wird für sie

$$EQ\lambda_0 = Pl + \tfrac{1}{2}\delta g Q l^2 = l(P + \tfrac{1}{2}\delta g Q l).$$

Da das Gesammtgewicht G des Stabes gleich $G = \delta g Q l$ ist, so sieht man, dass die Dehnung ebenso eintreten wird, als ob der Stab nicht schwer wäre, dafür aber am unteren Ende statt P die Kraft $P + \frac{1}{2}G$ angreifen würde.

2. Es sei der Stab unten befestigt und wirke oben eine Kraft P. Rechnen wir die σ positiv aufwärts vom unteren Ende an und betrachten das Stabstück von einem beliebigen Querschnitte M an bis zum oberen Ende. An demselben halten sich P, das Gewicht und $EQ\frac{d\lambda}{d\sigma}$ Gleichgewicht, so dass

$$-EQ\frac{d\lambda}{d\sigma} + P - \delta g Q(l - \sigma) = 0$$

wird. Hieraus folgt wieder die Spannung $E\frac{d\lambda}{d\sigma}$ und die Dehnung λ, nebst der Gesammtverlängerung λ_0 mit Hülfe der Formeln:

$$EQ\lambda = P\sigma - \delta g Q(l\sigma - \tfrac{1}{2}\sigma^2), \quad EQ\lambda_0 = l(P - \tfrac{1}{2}\delta g Q l).$$

λ_0 verschwindet, wenn P der Schwere entgegenwirkt und gleich dem halben Gewichte des Stabes ist. Für kleinere Werthe von P oder für P im Sinne der Schwere wirkend, wird der Stab zusammengedrückt.

(Vgl. die Untersuchung über den elastisch dehnbaren Faden, §. 8.)

§. 22. Biegung eines cylindrischen homogenen gleichförmig elastischen Stabes durch ein in einer Symmetrieebene wirkendes Kräftesystem.

Ein cylindrischer Stab, welcher als ein Aggregat paralleler Fasern angesehen werden kann, habe eine gekrümmte Gestalt, jedoch so, dass seine Fasern parallele ebene Curven bilden. Der Querschnitt senkrecht zu der Richtung der Fasern sei kreisförmig, elliptisch oder rechteckig. Durch die Einwirkung von Kräften, welche sämmtlich in eine der Fasernebenen fallen, die zugleich eine Symmetrieebene des

Stabes sei, oder welche einem ebenen Kräftesystem äquivalent sind, welches dieser Ebene angehört, werde er in eine andere Form gebogen, jedoch so, dass die Fasern nach der Biegung wieder ebene Curven sind in denselben Ebenen, wie vor der Biegung. Durch die Biegung werden die Fasern theils ausgedehnt, theils zusammengedrückt und wollen wir annehmen, dass es eine Schicht neutraler Fasern gebe, d. h. solcher, die keine Verlängerung oder Zusammendrückung erleiden. Sie werden eine Cylinderfläche bilden, senkrecht zu der Symmetrieebene des Stabes. Diese Ebene wollen wir die Biegungsebene nennen und die in ihr enthaltene neutrale Faser insbesondere verstehen, wenn wir kurz von der neutralen Faser reden. Es werde ferner angenommen, dass die Punkte eines Querschnittes vor der Biegung auch nach derselben in einer Ebene liegen, nämlich in einem Querschnitt der neuen Gleichgewichtsform des Stabes.

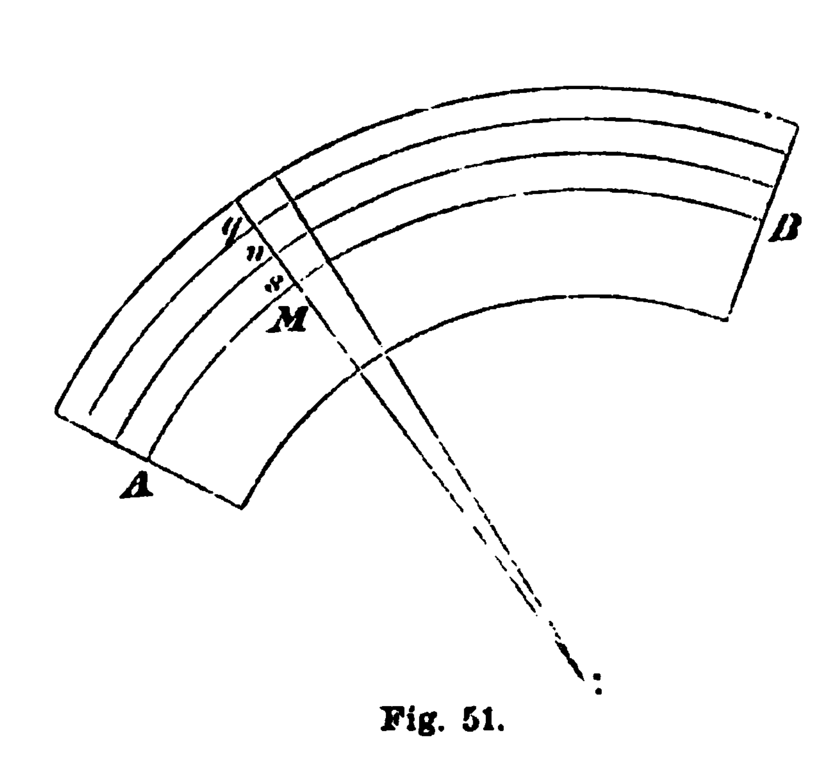


Fig. 51.

Wegen des Parallelismus der Fasern haben diese sämmtlich in allen Punkten desselben Querschnitts gemeinschaftliche Krümmungsaxe senkrecht zur Biegungsebene. Die sämmtlichen Schwerpunkte der Querschnitte bilden eine Faser, die wir die Schwerpunktsfaser s nennen (Fig. 51). Der Abstand der neutralen Faser n von der Schwerpunktsfaser sei z, der einer beliebigen Faser q von ihr sei v. Ist alsdann der Krümmungshalbmesser der Schwerpunktsfaser r, so ist $r+z$ der Krümmungshalbmesser der neutralen und $r+v$ der der beliebigen Faser q. Daher besteht für die Bogenelemente ds und dn der Fasern q und n die Gleichung

$$\frac{ds}{dn} = \frac{r+v}{r+z}.$$

Durch die Biegung gehe nun ds in ds' über, während das Element dn der neutralen Faser ungeändert bleibt. Der Krümmungshalbmesser r sei nach der Biegung gleich ϱ. Dann gilt nach der Biegung die Gleichung

$$\frac{ds'}{dn} = \frac{\varrho+v}{\varrho+z}.$$

Man erhält daher für die Verlängerung des Elementes ds, indem man beide Gleichungen subtrahirt und die neue Gleichung durch die erste dividirt:

$$\frac{ds'-ds}{ds} = \frac{(r-\varrho)(v-z)}{(r+v)(\varrho+z)}.$$

Diese Gleichung gibt die specifische Ausdehnung an der Stelle, wo das Bogenelement liegt und ist mit dem Querschnitt $d\omega$ der Faser und dem Elasticitätsmodulus E zu multipliciren, um die am Elemente angreifende, längs dessen Tangente wirkende Spannung

$$E\,d\omega\,\frac{(r-\varrho)(v-z)}{(r+v)(\varrho+z)}$$

zu erhalten.

Trennen wir jetzt den Stab durch den betrachteten Querschnitt in zwei Theile A und B, so haben wir an jedem von ihnen, damit das Gleichgewicht an ihm fortbestehe, Spannungskräfte einzuführen, welche das leisten, was die elastische

Verbindung des abgetrennten, zu betrachtenden Stückes mit dem übrigen Stabstück leistet. Diese Kräfte sind: 1. die eben genannten, in der Richtung der Fasern wirkenden und mithin zum Querschnitt senkrechten dehnenden oder pressenden Kräfte (Normalspannungen), am Stabstück A in dem einen, am Stabstück B im anderen Sinn zu nehmen und 2. gewisse andere in die Ebene des Querschnitts fallende Kräfte (Tangentialspannungen), gleichfalls an beiden Stabstücken in entgegengesetztem Sinne einzuführen. Diese zuzufügenden, die Elasticität der Verbindung darstellenden Kräfte halten mit den gegebenen äusseren Kräften an dem betreffenden Stabstück Gleichgewicht. Wir wollen dies Gleichgewicht ausdrücken, indem wir alle Kräfte für den Schwerpunkt s des Querschnitts als Ursprung, die Tangente der Schwerpunktsfaser, die zu ihr senkrechte Gerade der Symmetrieebene und die zu dieser Ebene normale Gerade des Schwerpunktes (die Biegungsaxe) als Coordinatenaxen ansehen. Betrachten wir den Sinn der Linien als positiv, wie es dem Verlaufe vom Anfang des Stückes A nach dem Trennungsquerschnitt entspricht, und stellen wir das Gleichgewicht des Stabstückes B dar, so ergibt die Projectionssumme auf die Tangente der Schwerpunktsfaser

$$T - E\frac{r-\varrho}{\varrho+z}\int\frac{v-z}{r+v}\,d\omega = 0,$$

wenn nämlich T die Componentensumme der äusseren Kräfte für diese Axe bedeutet und das Integral der Normalspannungen über den ganzen Querschnitt ausgedehnt wird. Eine ähnliche Gleichung findet statt zwischen den Tangentialspannungen und den Componenten der äusseren Kräfte bezüglich der zweiten, in die Symmetrieebene fallenden Coordinatenaxe. Von dieser Gleichung wollen wir hier absehen. Für die Biegungsaxe besteht eine solche Gleichung nicht, da das Kräftesystem parallel zur Symmentrieebene, also senkrecht zur Biegungsaxe ist. Weiter ist aber noch die Momentengleichung bezüglich dieser Axe aufzustellen. Sie ist

$$M - E\frac{r-\varrho}{\varrho+z}\int\frac{v-z}{r+v}\,v\,d\omega = 0.$$

In ihr bedeutet M das Moment der äusseren Kräfte am Stabstück B und das Integral die Summe der Momente aller Normalspannungen, nämlich des Produktes jeder Normalspannung in ihren Abstand v von der Biegungsaxe.

Die beiden eben aufgestellten Gleichungen genügen, um ϱ und z, d. h. den Krümmungshalbmesser der Schwerpunktsfaser und den Abstand z der neutralen Faser von der Schwerpunktsfaser zu finden. Indem man die Figur auf irgend ein beliebiges, in der Biegungsebene liegendes Coordinatensystem der x, y bezieht, mit x, y die Coordinaten des Punktes s bezeichnet und für ϱ den analytischen Ausdruck des Krümmungshalbmessers in x, y einsetzt, gehen dieselben in Differentialgleichungen zweiter Ordnung über, welche die Gestalt und Lage der Schwerpunktsfaser und der neutralen Faser bestimmen. Sobald diese gefunden, ist damit Gestalt und Lage jeder anderen Faser bestimmt.

Die Spannung in Bezug auf die Flächeneinheit des Querschnitts ist für das Stabstück BM

$$-E\frac{(r-\varrho)(v-z)}{(r+v)(\varrho+z)};$$

indem man diesen Ausdruck einer Constanten gleich setzt, erhält man die Curven gleicher Spannung im Stabe.

§. 23. Für einen ursprünglich geraden Stab ist $r = \infty$ und werden daher die

beiden Gleichungen

$$T - \frac{E}{\varrho + z} \int (v - z)\, d\omega = 0, \qquad M - \frac{E}{\varrho + z} \int (v^2 - zv)\, d\omega.$$

In diesen Integralien bezeichnet v den Abstand eines Punktes im Querschnitt von der Biegungsaxe, welche eine Axe des Massenmittelpunktes ist. Daher wird $\int v d\omega = 0$ und reduciren sich die beiden Gleichungen auf

$$T + \frac{EQz}{\varrho + z} = 0, \qquad M - \frac{EJ}{\varrho + z} = 0,$$

wenn J das Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf die Biegungsaxe bedeutet, nämlich $J = \int v^2 d\omega$.

Ist die Summe der Projectionen der äusseren Kräfte auf die Tangente der Schwerpunktaxe durchaus sehr klein, so folgt aus der ersten der beiden Gleichungen näherungsweise $z = 0$, d. h. für sehr schwache Biegungen durch Kräfte, deren Resultante nahezu rechtwinklig ist gegen die Schwerpunktaxe, fällt die neutrale Faser mit der Schwerpunktsfaser zusammen.

Für diesen Fall schwacher Biegung wird die zweite Gleichung approximativ

$$\frac{EJ}{\varrho} = M.$$

Sie ist die Differentialgleichung der neutralen Faser und stimmt überein mit der §. 9 gegebenen, wenn das dortige ε hier durch EJ vertreten wird. Zu bemerken ist dabei, dass dort $-\frac{\varepsilon}{\varrho}$ steht, weil die Untersuchung auf den Bogen AM bezogen ward, hier aber das Stabstück BM gewählt wurde. Da für schwache Biegungen $\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2y}{dx^2}$ gesetzt werden kann, so wird die Gleichung

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = M.$$

Aus der Formel für die Spannung folgt hiezu für $r = \infty$ und $z = 0$, wenn wir sie mit σ bezeichnen

$$\sigma = E\frac{v}{\varrho},$$

oder, weil $\frac{EJ}{\varrho} = M$ ist:

$$\sigma = \frac{M}{J} v.$$

Die am stärksten gespannte Faser ist daher diejenige, welche den grössten Abstand v von der neutralen Faser hat. Ist T nicht sehr klein, so erhält man als Gleichung für die Schwerpunktsfaser durch Elimination von z:

$$\frac{J}{\varrho} = \frac{MQ}{T + EQ}.$$

Die in den vorstehenden §§. 21, 22, 23 gegebenen Entwickelungen sind nur als fragmentarisch behandelte Einzelfälle aus einer umfangreichen Theorie anzusehen, welcher wir an dieser Stelle keinen Raum geben können, indem sie mehr der angewandten, als der theoretischen Mechanik zuzurechnen ist. Vgl. Grashof, Theorie der Elasticität und Festigkeit mit Bezug auf ihre Anwendung in der Technik; Berlin 1878, II. Abschnitt, S. 37—199.

VIII. Capitel.

Analogie zwischen Problemen des Gleichgewichts und Problemen der Bewegung.

§. 1. Bei den nicht unbedeutenden Schwierigkeiten, welche die Behandlung vieler Probleme der Mechanik darbietet, ist es von grossem Werthe, Analogien zu verfolgen, welche zwischen einzelnen Theorien bestehen, weil sie oft dazu führen, aus der gefundenen Lösung eines Problems die Lösung eines andern, einer ganz andern Gruppe angehörigen unmittelbar abzuleiten. So besteht eine Analogie zwischen der Bewegung eines Punktes und dem Gleichgewichte an einem biegsamen Faden, welche gestattet, jedem Satze der ersten Theorie einen entsprechenden Satz der andern gegenüberzustellen und aus der Lösung jeder Aufgabe über die Bewegung eines Punktes die einer andern über das Gleichgewicht eines gespannten Fadens herzuleiten. Eine Andeutung solcher Analogien findet sich bereits bei Galilei, *Dialoghi intorno a due scienze nuove.* Opere T. 13, p. 263 (Ediz. Firenze 1855); Möbius hat sie, ohne Galilei's Notiz zu kennen, zuerst gründlich untersucht (Lehrbuch der Statik, II, S. 217 u. ff.).

So führt die Vergleichung von B. I, Th. II, Cap. VIII, S. 312 u. ff. und B. II, Th. III, Cap. VI, S. 88 u. ff. unmittelbar zu folgenden Sätzen, die theils dortselbst entwickelt, theils der eine aus dem andern oder der eine, wie der andere durch die einander entsprechenden Betrachtungen der beiden Capitel abgeleitet werden können:

1. Die Schmiegungsebene der Bahn eines Punktes enthält die Beschleunigung. — Die Schmiegungsebene eines biegsamen Fadens enthält die Kraft.

2. Ist die Beschleunigung der Bewegung der Richtung nach constant, so ist die Bahn eine ebene Curve, deren Ebene durch die Richtung der Beschleunigung und die der Anfangsgeschwindigkeit bestimmt ist. Die Bahn eines schweren Punktes z. B. ist eine verticale Parabel. — Ist die Kraft am biegsamen Faden von constanter Richtung, so ist die Fadencurve eben und ihre Ebene ist durch die Richtungen der Kraft und der Spannung im Anfangspunkt des Bogens bestimmt. Die Gleichgewichtsgestalt eines homogenen Fadens ist eine verticale Kettenlinie.

3. Bei constanter Richtung der Beschleunigung ist die Componente der Geschwindigkeit senkrecht zur Beschleunigungsrichtung constant. Die Geschwindigkeitscomponente parallel dieser Richtung ist der Cotangente der Neigung ψ der Tangente der Bahn gegen die Beschleunigungsrichtung und die Geschwindigkeit selbst der Cosecante von ψ proportional. — Bei constanter Richtung der Kraft am Faden ist die Componente der Spannung senkrecht zur Kraft constant. Die Componente der Spannung in der Richtung der Kraft ist der Contangente und die Spannung selbst der Cosecante des Winkels proportional, welchen die Tangente der Fadencurve mit der Kraftrichtung bildet.

4. Ist die Beschleunigung des Punktes normal zur Bahn, so ist die Ge-

schwindigkeit constant und umgekehrt. — Ist die Kraft zur Fadencurve normal, so ist die Spannung constant und umgekehrt.

5. Ist ein Punkt gezwungen, auf einer Fläche zu bleiben und ist seine Beschleunigung normal zur Fläche, so beschreibt er eine kürzeste Linie der Fläche mit constanter Geschwindigkeit. — Ein über eine Fläche gespannter Faden, an welchem die Kraft normal zur Fläche ist, nimmt die Gestalt einer kürzesten Linie der Fläche an und seine Spannung ist constant.

6. Die Tangential- und Normalcomponenten der Beschleunigung sind $\frac{dv}{dt}$, $\frac{v^2}{\varrho}$. — Die Tangential- und Normalcomponenten der Kraft am Faden, auf die Längeneinheit bezogen, sind $\frac{dT}{ds}$ und $\frac{T}{\varrho}$.

7. Ist die Beschleunigung normal zur Bahn, so ist sie umgekehrt proportional dem Krümmungshalbmesser der Bahn. — Ist die Kraft normal zum Faden, so ist sie umgekehrt proportional dem Krümmungshalbmesser der Fadencurve.

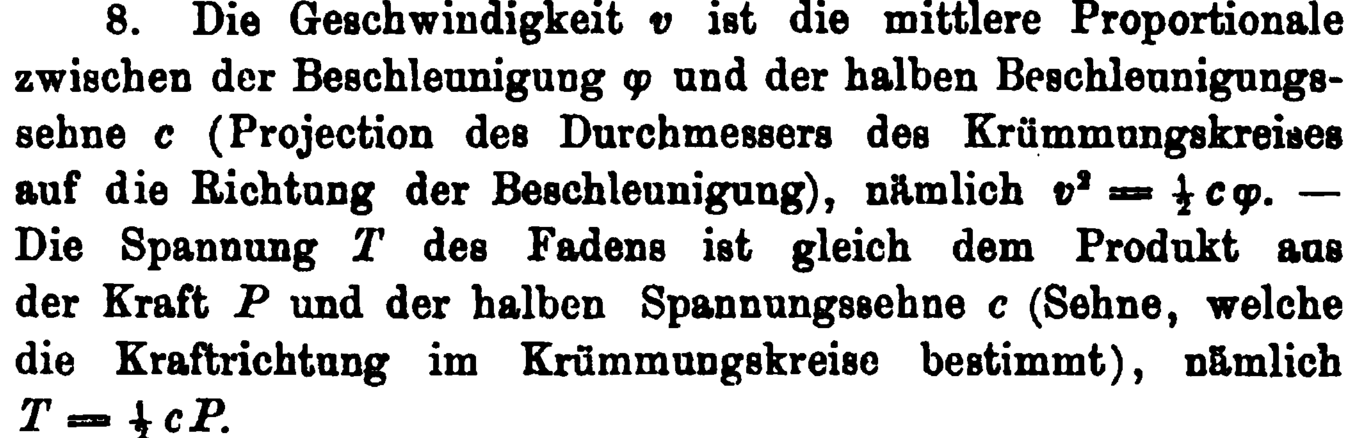


Fig. 52.

8. Die Geschwindigkeit v ist die mittlere Proportionale zwischen der Beschleunigung φ und der halben Beschleunigungssehne c (Projection des Durchmessers des Krümmungskreises auf die Richtung der Beschleunigung), nämlich $v^2 = \frac{1}{2} c \varphi$. — Die Spannung T des Fadens ist gleich dem Produkt aus der Kraft P und der halben Spannungssehne c (Sehne, welche die Kraftrichtung im Krümmungskreise bestimmt), nämlich $T = \frac{1}{2} c P$.

9. Ist die Richtung der Beschleunigung φ constant (Fig. 52) und a die constante Componente der Geschwindigkeit v senkrecht zur Richtung von φ, so ist $a = v \sin \psi = v \cdot \frac{1}{2} c : \varrho$ oder $v : \varrho = a : \frac{1}{2} c$. Combinirt man hiermit $v^2 = \frac{1}{2} c \varphi$, so wird $\varrho = \frac{v^3}{a \varphi}$ oder $\varrho \sin^3 \psi = \frac{a^2}{\varphi}$. — Ist die Richtung der Kraft P am Faden constant und T_0 die constante Componente der Spannung, senkrecht zu P, so wird $T_0 = T \sin \psi = T \cdot \frac{1}{2} c : \varrho$ und da $T = \frac{1}{2} c P$, so wird $\varrho = T^2 : T_0 P$ oder $\varrho \sin^2 \psi = \frac{T_0}{P}$. Hieraus folgt für die Parabel, dass die dritte Projection des Krümmungshalbmessers zwischen den Richtungen der Hauptaxe und der Normalen constant ist. — Ebenso für die Kettenlinie, dass die zweite Projection zwischen Axe und Normale constant ist.

10. Für die Parabel ist, wenn die Zeit $t = 0$ der Scheitellage des beweglichen Punktes entspricht, $\frac{dx}{dt} = a$, $\frac{dy}{dt} = gt$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{g}{a} t$. Für die Kettenlinie ist $\frac{dy}{dx} = \frac{g}{a} s$, wenn der Bogen vom Scheitel an gerechnet wird. Daher ist bei der Parabel als Bahn eines schweren Punktes die Cotangente des Winkels ψ der Zeit, bei der Kettenlinie dem Bogen, vom Scheitel an gerechnet, proportional.

11. Für die Parabel ist, für denselben Anfangsmoment der Zeit $v^2 = a^2 + g^2 t^2$, $v^2 = 2gy$, wenn die Ordinate von der Directrix an gerechnet wird. Aus beiden Formeln folgt $y = \frac{1}{2} \frac{a^2}{g} + \frac{1}{2} g t^2$. Bei der Kettenlinie als Form des schweren Fadens ist $T^2 = T_0^2 + g^2 s^2$, $T = - gy$ und beide Formeln geben $y^2 = \frac{T_0^2}{g^2} + s^2$.

12. Für die Parabel ist, die Ordinate y von der Directrix an als positiv gerechnet, $v^2 = 2gy$ und zugleich ist $\frac{v^2}{\varrho} = g \sin\psi$; daher ist $y = \frac{1}{2}\varrho \sin\psi$, d. h. die Normalstrecke zwischen der Parabel und ihrer Directrix ist gleich der Hälfte des Krümmungshalbmessers. — Für die Kettenlinie ist $T = -gy$ und $\frac{T}{\varrho} = g \sin\psi$, also $y = \varrho \sin\psi$, d. h. der Krümmungshalbmesser ist gleich der Normalstrecke zwischen der Curve und ihrer Directrix.

13. Für jede ebene Bewegung eines Punktes ist das Moment der Beschleunigung $\varphi\varpi$ in Bezug auf irgend einen Punkt O der Ebene die Derivirte des Momentes vp der Geschwindigkeit nach der Zeit in Bezug auf denselben Punkt, d. h. es ist $\frac{d(vp)}{dt} = \varphi\varpi$. — Für jede ebene Fadencurve ist das Moment der Kraft $P\varpi$ in Bezug auf irgend einen Punkt O der Ebene gleich der Derivirten des Momentes der Spannung in Bezug auf O, nach dem Bogen genommen, d. h. es ist $\frac{d(Tp)}{dt} = P\varpi$.

Unter derselben Bedingung bestehen daher die Formeln

$$vp - v_0 p_0 = \int_{t_0}^{t} \varphi\varpi\, dt, \qquad Tp - T_0 p_0 = \int_{s_0}^{s} P\varpi\, ds.$$

Geht die Beschleunigung φ immer durch denselben Punkt O, so ist für diesen das Moment vp der Geschwindigkeit constant; geht die Kraft P durch einen festen Punkt, so ist für ihn das Moment Tp der Spannung constant.

14. Beschreibt ein Punkt eine Bahn, so sind für die Projection der Bewegung auf einer Ebene Geschwindigkeit und Beschleunigung die Projectionen der Geschwindigkeit und Beschleunigung der Hauptbewegung. Ist eine Curve Gleichgewichtsfigur, so ist ihre Projection auf eine Ebene Gleichgewichtsfigur für die Projection der Spannung und der Kraft auf diese Ebene.

Wir wollen im Folgenden den Kern solcher Analogien aufsuchen und Substitutionen angeben, welche von einem Satze der einen Theorie zu dem analogen Satze der anderen hinführen.

§. 2. Jede Curve kann die Bahn eines beweglichen Punktes sein. Es ist dazu nur erforderlich, dass die Geschwindigkeit des Punktes an irgend einer Stelle derselben in die Richtung der Tangente falle und die Beschleunigung ein solches Gesetz befolge, dass sie die Geschwindigkeit in jedem Punkte in die Richtung der folgenden Tangente ablenke.

Jede Curve kann die Gleichgewichtsfigur eines biegsamen Fadens sein. Es ist dazu erforderlich, dass die Spannung an irgend einer Stelle der Richtung nach mit der Tangente zusammenfalle und die auf das Bogenelement wirkende continuirliche Kraft sie in die Richtung der folgenden Tangente abbiege.

Bei der Bewegung des Punktes ist die Geschwindigkeit $v + dv$ zur Zeit $t + dt$ die Resultante aus der Geschwindigkeit v zur Zeit t und der Elementarbeschleunigung du und fällt du auf die Seite der Tangente, auf

welcher der Krümmungsmittelpunkt liegt; bei der Fadencurve hält die Spannung $T + dT$, entsprechend dem Bogen $s + ds$, Gleichgewicht mit der Sannung $-T$, nämlich der dem Bogen s entsprechenden Spannung, im umgekehrten Sinne genommen und der unendlichkleinen Kraft Pdm am Bogenelemente, wenn dm dessen Masse, also P die Beschleunigung der Kraft oder die Kraft, bezogen auf die Masseneinheit, ist. Daher sind T und $-Pdm$ äquivalent $T + dT$ oder es ist $T + dT$ die Resultante von T und $-Pdm$ (Fig. 53).

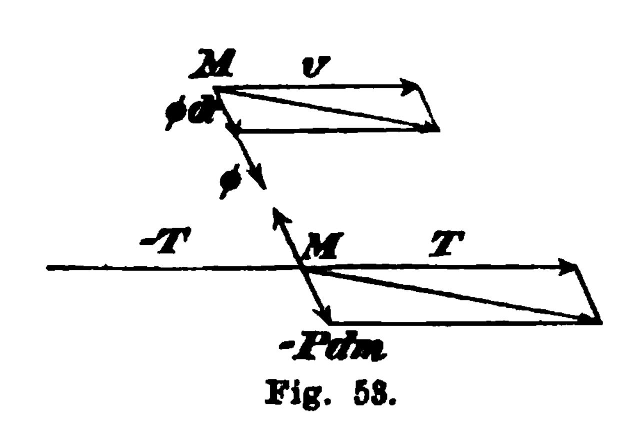


Fig. 53.

Damit beide Curven, die Bahn des Punktes und die Gleichgewichtsfigur des Fadens, identisch seien, ist nothwendig und hinreichend, dass in den entsprechenden Punkten die Bogenelemente ds, ds', Contingenzwinkel $d\varepsilon$, $d\varepsilon'$ und Schmiegungswinkel $d\sigma$, $d\sigma'$ dieselben seien. Für ebene Curven fällt die Bedingung der gleichen Schmiegungswinkel als von selbst erfüllt hinweg. Im Punkte M einer Curve, welche zugleich Bahn eines Punktes und Gleichgewichtsfigur eines Fadens ist, seien v und φ die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Bewegung des Punktes zur Zeit t, T und P seien die Spannung und die continuirliche Kraft, auf die Masseneinheit bezogen, in demselben Punkte M der Fadencurve, deren Bogenelement die Masse dm besitze.

Von den drei Bedingungen

$$ds = ds', \quad d\varepsilon = d\varepsilon', \quad d\sigma = d\sigma'$$

ist die dritte erfüllt, wenn die unendlich schmalen Parallelogramme in dieselbe Ebene fallen, was geschieht, wenn φ und P in allen entsprechenden Punkten mit der Tangente der Curve in derselben Ebene liegen. Da $ds = vdt$ und $dm = \gamma ds'$ ist, wenn γ die specifische Masse bedeutet, so gibt die erste Bedingung

$$\gamma v dt = dm. \tag{1}$$

Ferner geben die beiden unendlich kleinen Parallelogramme der Figur

$$\varphi^2 dt^2 = dv^2 + v^2 d\varepsilon^2, \quad (-P)^2 dm^2 = dT^2 + T^2 d\varepsilon'^2,$$

woraus wir $d\varepsilon$ und $d\varepsilon'$ ziehen und in die zweite Bedingungsgleichung einsetzen. Dies liefert

$$\frac{\varphi^2 dt^2 - dv^2}{(-P)^2 dm^2 - dT^2} = \frac{v^2}{T^2}. \tag{2}$$

Diese Gleichung kann durch verschiedene Annahmen erfüllt werden, von denen wir nur die eine verfolgen wollen, dass $v : T$ eine beliebige Constante λ, nämlich

$$\frac{v}{T} = \lambda \quad \text{oder} \quad v = \lambda T$$

sein solle. Damit wird auch $dv = \lambda dT$ und indem wir dies in (2) einführen, spaltet sich (2) in die beiden Bedingungen:

$$\frac{\varphi dt}{-Pdm} = \lambda, \quad \frac{v}{T} = \lambda. \tag{3}$$

Die gemachte Annahme ist identisch damit, dass die genannten Parallelogramme ähnlich und also die Richtungslinien von φ und P zusammenfallen.

§. 3. Nehmen wir zunächst weiter an, dass der Faden homogen und $\gamma = 1$ sei, so erhalten wir als Bedingungen für diesen Fall:

$$vdt = ds, \quad \frac{\varphi dt}{-Pds} = \lambda, \quad v = \lambda T$$

oder

$$\frac{\varphi}{v} = -\lambda P, \quad v = \lambda T.$$

Daher:

Halten Kräfte P an einem homogenen Faden Gleichgewicht, so ist die Gleichgewichtsfigur des Fadens die Bahn eines Punktes, für dessen Bewegung an jeder Stelle die Beschleunigung φ gleiche Richtung bei entgegengesetztem Sinne mit der Kraft P hat, das Verhältniss $\frac{\varphi}{v}$ der Beschleunigung zur Geschwindigkeit der Kraft P und die Geschwindigkeit v der Spannung T proportional ist. Es ist $\varphi = -\lambda^2 PT$, $v = \lambda T$.

Beschreibt ein Punkt unter Einfluss einer Beschleunigung φ eine Curve, so ist dieselbe Gleichgewichtsfigur eines homogenen Fadens, an dessen Elementen Kräfte P angreifen, proportional dem Quotienten aus der Beschleunigung φ und der Geschwindigkeit v jener Bewegung und ist die Spannung der Geschwindigkeit in demselben Verhältnisse proportional. Die Richtung der Kraft ist dabei die Richtung der Beschleunigung, dem Sinne nach aber sind beide entgegengesetzt.

Zerlegt man φ in die Tangential- und Normalcomponente $\varphi_t = \frac{dv}{dt}$, $\varphi_n = \frac{v^2}{\varrho}$ und ebenso P in die Componenten $\frac{dT}{ds}$ und $\frac{T}{\varrho}$ nach der Tangente und Normalen, so sind die Zerlegungsfiguren gleichfalls ähnlich und kann man die weiteren leicht verständlichen Proportionalitäten hinzufügen:

$$\frac{dv}{dt} : \frac{dT}{ds} = \frac{v^2}{T} = \lambda, \quad \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{dT}{ds}} = \frac{\frac{v^2}{\varrho}\,dt}{\frac{T}{\varrho}\,ds} = \lambda,$$

die aber wegen $ds : dt = v$ nichts Neues sagen.

Die Bedingung der Gleichheit der Schmiegungswinkel ist, da P und φ in dieselben hineinfallen müssen, durch deren gemeinschaftliche Richtung von selbst gesichert. Daher bestehen die beiden Sätze unverändert fort, wenn der Schmiegungswinkel beliebig verändert wird, wenn also z. B. die Ebene einer ebenen Curve sich entblättert und dadurch die Curve zu einer Curve doppelter Krümmung wird, oder wenn die Ebene auf eine abwickelbare Fläche aufgewickelt wird.

§. 4. Beispiele.

1. Die Gerade ist die Gleichgewichtsfigur eines homogenen Fadens, welcher nicht von Kräften P afficirt, sondern nur von Endspannungen im Gleichgewicht erhalten wird; die Spannung ist durchaus constant.

Die Gerade ist die Bahn eines Punktes, der ohne Beschleunigung einer blossen Anfangsgeschwindigkeit folgt; seine Geschwindigkeit ist constant.

2. Die Tangential- und Normalcomponenten der Kraft P am homogenen Faden sind $\frac{dT}{ds}$ und $\frac{T}{\varrho}$. Reducirt sich P auf seine Normalcomponente, so ist $\frac{dT}{ds} = 0$, also T constant. Wird daher ein Faden von Normalkräften (in der Richtung der Hauptnormalen) dem Sinne nach vom Krümmungsmittelpunkte abgewandt afficirt, so ist die Fadencurve die Bahn eines Punktes, dessen Beschleunigung die Richtung der Hauptnormalen hat, dem Krümmungsmittelpunkte zugewandt und deren Grösse aus den Gleichungen $\frac{\varphi}{v} = \lambda \,.\, \frac{T}{\varrho}$, $v = \lambda T$ folgt, nämlich $\varphi = \frac{v^2}{\varrho}$. Die Geschwindigkeit v ist constant. Umgekehrt: Beschreibt ein Punkt unter Einfluss einer blossen Normalbeschleunigung eine Curve, so ist die Curve Gleichgewichtsfigur für Normalkräfte $P = \mu \frac{v^2}{\varrho}$, $v = \mu \frac{v}{\varrho}$ und die Spannung ist durchaus constant, nämlich $T = \mu v$.

3. Die Kettenlinie ist die Gleichgewichtsfigur eines homogenen schweren Fadens, also für $P = g$ und die Spannung ist der Cosecante des Winkels proportional, welchen die Tangente mit der Verticalen bildet. Wird daher ein Punkt vertical nach oben von einer Beschleunigung $\varphi = gv$, also proportional der Geschwindigkeit afficirt, so beschreibt er eine verticale Kettenlinie mit einer Geschwindigkeit, welche der Cosecante ihrer Neigung gegen die Verticale proportional ist. Der Scheitel der Kettenlinie liegt im tiefsten Punkte. Beziehen sich die Grössen φ_0, v_0, $T_0 = \alpha g$, wo α den Parameter bedeutet, auf den Scheitel, so ist dortselbst $\frac{\varphi_0}{v_0} = \lambda g$, $v_0 = \lambda T_0 = \lambda \alpha g$, mithin $\varphi_0 = \lambda g v_0 = \frac{g v_0^2}{T_0} = \frac{v_0^2}{\alpha}$. Daher ist $\alpha = \frac{v_0^2}{\varphi_0}$, d. h. der Parameter der von dem Punkte beschriebenen Kettenlinie ist gleich dem Quadrate der Geschwindigkeit im Scheitel, dividirt durch die Beschleunigung daselbst.

4. Ein Punkt beschreibt unter Einfluss einer nach Grösse und Richtung constanten Beschleunigung $\varphi = g$ eine Parabel, deren Hauptaxe parallel zur Beschleunigung ist; die Geschwindigkeit dieser Bewegung ist der Cosecante des Winkels ψ proportional, den die Tangente mit der Richtung der Beschleunigung

bildet und der halbe Parameter ist das Quadrat der Geschwindigkeit im Scheitel, dividirt durch die Beschleunigung. Denn die Componente von v, senkrecht zur Hauptaxe ist constant gleich a und die Geschwindigkeit ist in jedem Punkte so gross, als ob der Punkt von der Directrix bis dorthin frei gefallen wäre, also ist im Scheitel $a^2 = 2g \,.\, \frac{1}{2}p$ oder $p = \frac{a^2}{g}$.

Eine Parabel ist daher Gleichgewichtsfigur eines Fadens, wenn die Kraft P parallel zur Hauptaxe nach der Directrix hingewandt und der Spannung T umgekehrt proportional ist. Die Spannung ist der Cosecante des Winkels proportional, den die Tangente mit der Hauptaxe bildet und die Spannung T_0 im Scheitel dividirt durch die Kraft P gibt den halben Parameter der Parabel. Denn es ist $\frac{g}{v} = \lambda P$, $v = \lambda T$, also $PT = Const.$; $\frac{g}{a} = \lambda P_0$, $a = \lambda T_0$, also

$$T_0 : P_0 = a^2 : g.$$

§. 5. Wir wollen jetzt die Annahme fallen lassen, dass der Faden homogen sei; es tritt dann noch eine weitere Grösse in die Untersuchung ein, die Masse, und kann hinsichtlich derselben noch eine Beziehung aufgestellt werden, welche den Resultaten grössere Allgemeinheit verleiht. Es war §. 2.

$$\gamma v dt = dm, \quad \frac{\varphi dt}{-Pdm} = \frac{v}{T} = \lambda.$$

Wir setzen, wie §. 2. $\varphi dt = \lambda P dm$, $v = \lambda T$, spalten aber λ in zwei Factoren α, β, so dass $\varphi = \alpha P$, $dt = \beta dm$, $\alpha\beta = \lambda$ wird. Dies sagt soviel, als dass das Zeitelement, in welchem das Bogenelement von dem beweglichen Punkte zurückgelegt wird, proportional der Masse des Bogenelements, also auch überhaupt die Zeit, während welcher ein Bogen beschrieben wird, der Masse dieses Bogens proportional genommen wird. Eine Folge davon ist, dass die Geschwindigkeit der specifischen Masse umgekehrt proportional wird. Denn die Gleichung $\gamma v dt = dm$ gibt unter dieser Voraussetzung $\beta\gamma v = 1$, also $v = \frac{1}{\beta\gamma}$. Den Inhalt der Gleichungen

$$\varphi = \alpha P, \quad dt = \beta dm, \quad v = \alpha\beta \cdot T = \frac{1}{\beta\gamma}$$

können wir in die beiden Sätze fassen:

Halten sich Kräfte P an einem Faden Gleichgewicht, so ist die Fadencurve die Bahn eines Punktes, für dessen Bewegung die Beschleunigung von gleicher Richtung, aber entgegengesetztem Sinne mit der Kraft und nach Grösse ihr proportional, die Zeit, in welcher ein Bogen durchlaufen wird, der Masse dieses Bogens und die Geschwindigkeit der Spannung direct, oder der specifischen Masse umgekehrt proportional wird.

Beschreibt ein Punkt unter Einfluss einer Beschleunigung φ eine Curve, so ist dieselbe Gleichgewichtsfigur eines biegsamen Fadens, wofür die Kraft bei gleicher Richtung und entgegengesetztem Sinne der Beschleunigung, die Spannung der Geschwindigkeit und die Masse eines Bogens der Zeit proportional ist, in welcher er beschrieben wird.

§. 6. Beispiele.

1. Ein Punkt beschreibt bei einer nach Grösse und Richtung constanten Beschleunigung $\varphi = g$ eine Parabel, deren Hauptaxe die Richtung der Beschleunigung hat und ist die Componente der Geschwindigkeit senkrecht zur Hauptaxe constant und somit die Projection des Bogens auf eine zur Beschleunigungsrichtung senkrechte Gerade der Zeit proportional, in welcher er beschrieben wird. Dieselbe Parabel ist daher die Fadencurve für eine constante Kraft derselben Richtung bei entgegengesetztem Sinne mit φ, wenn die Masse der Bogenelemente ihrer Projection auf die zur Kraftrichtung senkrechte Richtung proportional ist. Die Spannung ist der Geschwindigkeit proportional.

2. Ein Punkt beschreibt eine Ellipse unter Einfluss einer nach einem Brennpunkte gerichteten Centralbeschleunigung, umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung von diesem; die Geschwindigkeit ist ihrem Abstande von diesem Brennpunkt umgekehrt und der vom Radiusvector in irgend einer Zeit beschriebene Sector ist der Zeit direct proportional. Dieselbe Ellipse ist die Gleichgewichtsform eines biegsamen Fadens, wenn die Kraft fortwährend durch den Brennpunkt geht, welcher Centrum der Beschleunigung ist, dem Quadrate der Entfernung von demselben umgekehrt proportional ist und von ihm abgewandt wirkt; die Spannung des Fadens ist in jedem Punkte umgekehrt proportional ihrem Abstande von dem Brennpunkte und die Masse eines jeden Bogentheiles ist dem Sector proportional, welcher den Bogen zur Basis und den Brennpunkt zur Spitze hat.

§. 7. Die Betrachtungen der §§. 2. 3. lassen sich leicht auf den Fall ausdehnen, dass der Faden, den wir jetzt wieder als homogen annehmen wollen, nicht frei, sondern über eine Fläche gespannt und der bewegliche Punkt auf der Fläche zu bleiben gezwungen ist. Indem man den Widerstand $R\,ds$ der Fläche der Kraft $P\,ds$ hinzufügt, kann der Faden als frei angesehen werden. Daher ist der Faden die Bahn für die Bewegung eines Punktes, für welche $\frac{\varphi}{v}$ proportional der Resultanten von P und R und v proportional der Spannung T ist, aber φ bei gleicher Richtung entgegengesetzten Sinn mit dieser Resultanten hat. Indem man die Fläche wieder hinzufügt und den beweglichen Punkt auf sie zwingt, vertritt der aus R entspringende Bestandtheil der Beschleunigung diesen Zwang und wird durch die Fläche ersetzt, so dass der erste der beiden Sätze des §. 2. auch für den über die Fläche hingespannten Faden gilt. Dabei verdient hervorgehoben zu werden, dass der Widerstand der Fläche gegen den Faden gleichfalls entgegengesetzten Sinn mit der Zwangsbeschleunigung hat, welche den Punkt nöthigt, auf der Fläche zu bleiben. Es ist von selbst klar,

dass auch der zweite der obigen Sätze hinsichtlich des Uebergangs von der Bewegung eines Punktes auf der Fläche zu dem Gleichgewicht des Fadens auf derselben fortbesteht und in ähnlicher Weise bei umgekehrter Folge der Schlüsse bewiesen werden kann.

Beispiel:

Ein schwerer Punkt bewegt sich auf einer krummen Fläche; seine Geschwindigkeit ist dann proportional der Quadratwurzel aus seinem Abstande von einer bestimmten Horizontalebene, zu welcher er von der Anfangslage aus mit seiner Anfangsgeschwindigkeit vertical aufsteigen könnte. Seine Bahn ist zugleich die Gleichgewichtsfigur eines schweren Fadens, dessen Spannung dieser Quadratwurzel direct, für welchen aber das Gewicht jedes Fadenelementes derselben umgekehrt proportional ist.

§. 8. Wir haben in B. I, S. 430 u. ff. eine Reihe von Sätzen über die gezwungene Bewegung eines Punktes auf einer Fläche entwickelt. Der hier vorgetragenen Theorie zufolge lassen sich dieselben sämmtlich auf das Gleichgewicht eines über eine Fläche gespannten Fadens übertragen, wie wir in Bezug auf einige derselben zeigen wollen.

Im Punkte M des Fadens ziehen wir die Normale der Fläche und die Tangente der Fadencurve und legen durch beide den die letztere berührenden Normalschnitt der Fläche; wir construiren ferner die Normalebene der Fadencurve, welche die Tangentenebene der Fläche in einer zur Tangente senkrechten Geraden schneiden wird. Diese, die Tangente und die Flächennormale, bilden drei Axen, auf welche wir die Kräfte projiciren wollen. Es sei wie a. a. O. γ der Winkel, welchen die Kraft P mit der Flächennormale und α der Winkel, den ihre Projection auf die Tangentenebene mit der Tangente bildet, sowie ϑ der Winkel zwischen der Schmiegungsebene der Fadencurve und der Tangentenebene. Dann hat man, weil $\frac{dT}{ds}$, $\frac{T}{\varrho}$ die Componenten von P in der Richtung der Tangente und Hauptnormalen sind

$$\frac{dT}{ds} = P \sin\gamma \cos\alpha, \quad \frac{T}{\varrho}\cos\vartheta = P \sin\gamma \sin\alpha, \quad \frac{T}{\varrho}\sin\vartheta = P\cos\gamma + N.$$

Es ist aber der Radius der geodätischen Krümmung $\overset{*}{\varrho} = \varrho : \cos\vartheta$ und der Krümmungshalbmesser des berührenden Normalschnitts $R = \varrho : \sin\vartheta$ (S. B. I, S. 418). Hiemit werden diese Gleichungen

$$\frac{dT}{ds} = P \sin\gamma \cos\alpha, \quad \frac{T}{\overset{*}{\varrho}} = P\sin\gamma\sin\alpha, \quad \frac{T}{R} = P\cos\gamma + N.$$

Die beiden ersten von ihnen liefern:

$$\frac{dT}{T} = \frac{ds}{\overset{*}{\varrho}\,\mathrm{tg}\,\alpha}$$

oder, wenn $d\varkappa$ den geodätischen Contingenzwinkel $d\varkappa = ds : \overset{*}{\varrho}$ bezeichnet

$$\frac{dT}{T} = \frac{d\varkappa}{\mathrm{tg}\,\alpha},$$

woraus folgt

$$T = C e^{\int \frac{d\varkappa}{\mathrm{tg}\,\alpha}},$$

welche Formel der a. a. O. entwickelten Formel $v = C e^{\int \frac{d\varkappa}{\mathrm{tg}\,\alpha}}$ für die Geschwindig-

keit entspricht. Die beiden letzten der drei Gleichungen zusammen geben

$$P^2 = \left(\frac{T}{\overset{*}{\varrho}\sin\alpha}\right)^2 + \left(\frac{T}{R} - N\right)^2,$$

in Uebereinstimmung mit der dortigen Formel für die Beschleunigung ψ des beweglichen Punktes, nämlich

$$\psi^2 = \left(\frac{v^2}{\overset{*}{\varrho}\sin\alpha}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R} - N\right)^2.$$

Sie geht aus der Formel für P unmittelbar hervor, indem man §. 2. zufolge P, N, T proportional setzt $\frac{\psi}{v}$, $\frac{N}{v}$, v.

§. 9. Ist die Fläche abwickelbar und hat die Projection von P auf die Tangentenebene die Richtung der geraden Erzeugungslinie, so ergibt sich ähnlich wie B. I, S. 434 der Satz:

Die Fadencurve auf einer abwickelbaren Fläche für den Fall, dass die Projection der Kraft P auf die Tangentenebene die Richtung der Erzeugungslinie hat, bleibt auch dann noch Gleichgewichtsfigur, wenn die Fläche zu einer Ebene ausgebreitet wird und die Kraft P ohne Aenderung von Grösse den Sinn und die Richtung der Linie in der Ebene hat, in welche die Erzeugungslinie durch die Abwickelung übergeht. Umgekehrt bleibt eine ebene Fadencurve auch dann noch Gleichgewichtsfigur, wenn man die Ebene zu einer abwickelbaren Fläche aufrollt, deren Erzeugungslinie mit der Richtung der Kraft zusammenfällt.

So geht die Curve, welche ein über einen verticalen Cylinder hingespannter schwerer homogener Faden bildet, in eine Kettenlinie über, wenn die Cylinderfläche zu einer ihrer Tangentenebenen ausgebreitet wird. Dieser Satz entspricht dem folgenden: die Curve, welche ein schwerer Punkt auf einer verticalen Cylinderfläche beschreibt, geht in eine Parabel über, sobald der Cylinder zu einer seiner Tangentenebenen ausgebreitet wird.

§. 10. Für sphärische Fadencurven, für welche die Kraft P stets mit einem festen Durchmesser OO' in eine Ebene (Meridianebene) fällt, seien der Winkel φ, den die Meridianebene eines Punktes M der Curve mit der Meridianebene des Anfangspunktes bilde und der sphärische Radiusvector $OM = r$ (S. B. I, S. 435, Fig. 174, wenn r statt ϱ gesetzt wird) die sphärischen Coordinaten von M. Da die kürzesten Linien auf der Kugel grösste Kreise sind, so ist der geodätische Contingenzwinkel $d\varkappa$ der unendlich kleine Winkel, welchen zwei die Fadenlinie in den aufeinanderfolgenden Punkten M, M' berührende grösste Kreise mit einander bilden. Ist α der Winkel OMM', so hat man, wie dort $ds \cdot \cos\alpha = -dr$ und wenn p das sphärische Perpendikel OP bedeutet, welches vom Pole O auf die geodätische Berührende gefällt werden kann, erhält man $d\varkappa : \operatorname{tg}\alpha = -d \cdot l \sin p$, also nach den Formeln des §. 7.

$$T = \frac{C}{\sin p},$$

d. h. die Spannung ist dem Sinus des sphärischen Abstandes p des berührenden grössten Kreises vom Pol umgekehrt proportional.

Ferner ergibt sich der Radius der geodätischen Krümmung $\overset{*}{\varrho} = \frac{\sin r \cdot dr}{d \cdot \sin p}$.

Mit Hülfe dieses Ausdruckes und des eben gefundenen Werthes für T erhält man weiter nach §. 7.: $T : \overset{*}{\varrho} = P \sin \gamma \sin \alpha$, mithin

$$\frac{\sin r \cdot dr}{d \cdot \sin p} = \frac{C}{P \sin \gamma \sin p \sin \alpha},$$

welches die Differentialgleichung der Fadencurve in Bezug auf p und r als Coordinaten ist, sobald $P \sin \gamma$ durch p und r dargestellt wird. Da $\sin r \cdot \sin \alpha = \sin p$ ist, so kann man sie schreiben

$$dr = \frac{C}{P \sin \gamma} \frac{d \cdot \sin p}{\sin^2 p}.$$

Wenn z. B. der Faden schwer, also $P = g$ ist, so wird, falls O der tiefste Punkt der Kugel ist, $\gamma = r$, mithin ist

$$\sin r \, dr = \frac{C}{g} \cdot \frac{d \sin p}{\sin^2 p}$$

die Differentialgleichung der sphärischen Kettenlinie in r, p. Ihre Integration gibt

$$(A + \cos r) \sin p = \frac{C}{g}.$$

Da $\sin p = \sin r \sin \alpha$ und $ds \cdot \cos \alpha = -dr$, also $\cos \alpha = -\frac{dr}{ds}$ und mithin

$$\sin \alpha = \left(1 - \frac{dr^2}{ds^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sin r \cdot d\varphi}{ds}$$

ist, so geht diese Gleichung über in

$$(A + \cos r) \sin^2 r \frac{d\varphi}{ds} = \frac{C}{g},$$

worin

$$ds = (dr^2 + \sin^2 r \, d\varphi^2)^{\frac{1}{2}}$$

zu setzen ist. Dies ist die Differentialgleichung erster Ordnung der sphärischen Kettenlinie. Je nachdem $A = 0, < 0, > 0$ ist, kann sie als parabolische, elliptische und hyperbolische Kettenlinie bezeichnet werden.

Aus der obigen allgemeinen Formel für den Radius der geodätischen Krümmung ergibt sich für die sphärische Kettenlinie

$$\overset{*}{\varrho} = \frac{C}{g} \cdot \frac{1}{\sin^2 p},$$

d. h. der Radius der geodätischen Krümmung der sphärischen Kettenlinie ist umgekehrt proportional dem Quadrate des Sinus des sphärischen Abstandes der Tangente vom Pol.

Die sphärische Kettenlinie kann in einen horizontalen Kreis degeneriren. Für einen solchen ist r constant und reducirt sich die Differentialgleichung auf

$$(A + \cos r) \sin r = \frac{C}{g}.$$

Hierbei ist T constant, nämlich $T = C : \sin p = C : \sin r$; ferner ist $\overset{*}{\varrho} = \operatorname{tg} r = \operatorname{tg} p$. Eliminirt man zwischen $\overset{*}{\varrho} = \frac{C}{g \sin^2 p} = \operatorname{tg} r$ und $T = C : \sin p = C : \sin r$ die Constante C, so folgt

$$T = g \operatorname{tg} r.$$

Diese Gleichung entspricht der Formel für die constante Geschwindigkeit des spärischen Pendels, wenn die Bahn ein Kreis ist, nämlich

$$v^2 = g \frac{\sin^2 r}{\cos r}.$$

Die Kreisbahn des sphärischen Pendels liegt immer auf der unteren, die Curve des schweren Fadens, wenn sie ein Kreis ist auf der oberen Halbkugel.

§. 11. Um die Analogie zwischen der Bewegung eines Punktes und dem Gleichgewichte am biegsamen Faden auch in den Gleichungen beider Probleme deutlich zu erkennen, wollen wir die Bewegungsgleichungen des Punktes so umgestalten, dass sie die Form der Gleichgewichtsbedingungen des Fadens annehmen. Sie sind

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Es ist aber $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{dt}\right) \cdot \frac{ds}{dt} = v\,\frac{d}{ds}\left(v\,\frac{dx}{ds}\right)$ und ähnlich für die beiden andern Coordinaten; sie gehen daher über in

$$d\left(v\frac{dx}{ds}\right) - \frac{X}{v}\,ds = 0, \quad d\left(v\frac{dy}{ds}\right) - \frac{Y}{v}\,ds = 0, \quad d\left(v\frac{dz}{ds}\right) - \frac{Z}{v}\,ds = 0.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen des Fadens aber sind

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X'dm = 0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y'dm = 0, \quad d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z'dm = 0$$

und in dem speciellen Falle, dass die specifische Masse γ constant und $\gamma = 1$, also $dm = \gamma \cdot ds = ds$ ist,

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X'ds = 0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y'ds = 0, \quad d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z'ds = 0.$$

Man sieht, dass beiderlei Gleichungen identisch werden durch die Substitutionen

$$\frac{X}{v} = -\lambda X', \quad \frac{Y}{v} = -\lambda Y', \quad \frac{Z}{v} = -\lambda Z', \quad v = \lambda T.$$

Für den nicht homogenen Faden wäre zu setzen

$$\frac{X}{v}\,ds = -\lambda X'dm, \quad \frac{Y}{v}\,ds = -\lambda Y'dm, \quad \frac{Z}{v}\,ds = -\lambda Z'dm, \quad v = \lambda T$$

und diesen Bedingungen kann genügt werden durch

$$X = -\alpha X', \quad Y = -\alpha Y', \quad Z = -\alpha Z', \quad v = \lambda T,$$
$$dt = \beta \cdot dm.$$

W. z. b. w.

Wir haben in Cap. VI die Gleichgewichtsbedingungen des Fadens verschiedenen Transformationen unterworfen. Die analogen Umformungen der Bewegungsgleichungen eines Punktes sind folgende:

Da $\frac{dx}{dt} = v\,\frac{dx}{ds}$ und also $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\,\frac{dx}{ds} + v^2\,\frac{d^2x}{ds^2}$ ist, etc., so können die Bewegungsgleichungen in der Form geschrieben werden:

$$\frac{dv}{dt}\,\frac{dx}{dx} + v^2\,\frac{d^2x}{ds^2} = X, \quad \frac{dv}{dt}\,\frac{dy}{ds} + v^2\,\frac{d^2y}{ds^2} = Y, \quad \frac{dv}{dt}\,\frac{dz}{ds} + v^2\,\frac{d^2z}{ds^2} = Z.$$

Eliminirt man $\frac{dv}{dt}$ so kommt:

$$v^2 \begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ Y & Z \end{vmatrix}, \quad v^2 \begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2x}{ds^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ Z & X \end{vmatrix},$$

$$v^2 \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ X & Y \end{vmatrix}$$

und wenn auch v^2 eliminirt wird:

$$\begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ Y & Z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ Z & X \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2x}{ds^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ X & Y \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} \end{vmatrix} = v^2.$$

Würde man erst v^2 und dann $\frac{dv}{dt}$ eliminirt haben, so hätte man ähnlicherweise gefunden:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ Y & Z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2x}{ds^2} \\ Z & X \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2x}{ds^2} \\ \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} \\ X & Y \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix} = \frac{dv}{dt}.$$

Die Combination der beiderlei Resultate liefert daher als die Gleichungen der Bahn des Punktes:

$$\begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ Y & Z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ Y & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ Z & X \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{d^2z}{ds} & \frac{d^2x}{ds} \\ Z : & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} \cdot & \frac{dy}{ds} \\ X & Y \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} \\ X & Y \end{vmatrix} = -\frac{v^2}{\frac{dv}{dt}}$$

Diese Gleichungen gehen durch die oben genannten Substitutionen in die Gleichungen der Fadencurve über ohne ihre Form zu ändern. Es ändert sich blos der Werth der drei gemeinschaftlichen Verhältnisse v^2, $\frac{dv}{dt}$, $v^2 : \frac{dv}{dt}$, welcher übergeht in $-T$, $-\frac{dT}{ds}$, $-T : \frac{dT}{ds}$.

Für die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche und das Gleichgewicht eines über sie hingespannten Fadens sind die Gleichungen

$$d\left(v\,\frac{dx}{ds}\right) - \left(\frac{X}{v} + \frac{N_x}{v}\right) ds = 0, \quad d\left(v\,\frac{dy}{ds}\right) - \left(\frac{Y}{v} + \frac{N_y}{v}\right) ds = 0,$$

$$d\left(v\,\frac{dz}{ds}\right) - \left(\frac{Z}{v} + \frac{N_z}{v}\right) ds = 0,$$

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) - (X' + N'_x)\,ds = 0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) - (Y' + N'_y)\,ds = 0,$$

$$d\left(T\frac{dz}{ds}\right) - (Z' + N'_z)\,ds = 0,$$

welche durch dieselben Substitutionen in einander übergehen, wie bei der freien Bewegung und dem freien Faden. Ist $U = 0$ die Gleichung der Fläche, so bestehen zugleich noch die Gleichungen

$$\frac{N_x}{U'_x} = \frac{N_y}{U'_y} = \frac{N_z}{U'_z} = \frac{N}{(U'^2_x + U'^2_y + U'^2_z)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{N'_x}{U'_x} = \frac{N'_y}{U'_y} = \frac{N'_z}{U'_z} = \frac{N'}{(U'^2_x + U'^2_y + U'^2_z)^{\frac{1}{2}}}.$$

Sind $X = Y = Z = 0$, so wird v vermöge $d \cdot \frac{1}{2} v^2 = Xdx + Ydy + Zdz$ constant und ebenso T constant wegen $-dT = (X'dx + Y'dy + Z'dz)$ (S. Cap. VI, S. 91). Daher sind die Gleichungen des einen oder des andern Problems

$$v\frac{d^2x}{ds^2} - N_x = 0, \quad v\frac{d^2y}{ds^2} - N_y = 0, \quad v\frac{d^2z}{ds^2} - N_z = 0,$$

$$T\frac{d^2x}{ds^2} - N'_x = 0, \quad T\frac{d^2y}{ds^2} - N'_y = 0, \quad T\frac{d^2z}{ds^2} - N'_z = 0$$

und liefern beide als Gleichungen der Curve die der geodätischen Linie

$$\frac{d^2x}{ds^2} : U'_x = \frac{d^2y}{ds^2} : U'_y = \frac{d^2z}{ds^2} : U'_z.$$

§. 12. Es ist von Wichtigkeit, die Analogien der beiden Probleme bis zu den Principen zu verfolgen, welche Integrale ihrer Gleichungen liefern.

Combiniren wir die Gleichungen

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + Xds = 0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Yds = 0, \quad d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Zds = 0$$

nach der Manier der Determinantenbildung, so folgt

$$\begin{vmatrix} y & z \\ d\left(T\frac{dy}{ds}\right) & d\left(T\frac{dz}{ds}\right) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} ds = 0, \quad \begin{vmatrix} z & x \\ d\left(T\frac{dz}{ds}\right) & d\left(T\frac{dx}{ds}\right) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} ds = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x & y \\ d\left(T\frac{dx}{ds}\right) & d\left(T\frac{dy}{ds}\right) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} ds = 0.$$

Sind nun X, Y, Z so beschaffen, dass

$$\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} = 0, \text{ d. h. dass } \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}$$

ist, d. h. geht die Kraft P durch den Coordinatenursprung, so reduciren sich die Gleichungen, wie leicht ersichtlich ist, auf

$$d \cdot T \begin{vmatrix} y & z \\ \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix} = 0, \quad d \cdot T \begin{vmatrix} z & x \\ \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \end{vmatrix} = 0, \quad d \cdot T \begin{vmatrix} x & y \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix} = 0$$

und liefern die drei Integrale

$$T\begin{vmatrix} y & z \\ dy & dz \end{vmatrix} = d_1 \cdot ds, \quad T\begin{vmatrix} z & x \\ dz & dx \end{vmatrix} = d_2 \cdot ds, \quad T\begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} = d_3 \cdot ds.$$

Diese letztern genügen der Bedingung

$$d_1x + d_2y + d_3z = 0,$$

d. h. die Fadencurve ist in einer Ebene des Coordinatenursprungs enthalten. Die Bildung der Quadratsumme der drei Integralgleichungen gibt, weil die Quadratsumme der drei Determinanten das Quadrat der doppelten Fläche 2Δ des Dreiecks ist, dessen Basis das Bogenelement ds und dessen Spitze der Coordinatenursprung ist,

$$2\Delta \cdot T = ds\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}$$

und wenn p das vom Ursprung auf die Tangente gefällte Perpendikel, also $2\Delta = p\,ds$ ist

$$Tp = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2},$$

d. h. die Spannung ist umgekehrt proportional ihrem Abstande vom Ursprung.

Wir erhalten daher den Satz, welcher dem Flächenprincip bei der Bewegung eines Punktes entspricht:

Halten sich an einem biegsamen Faden Centralkräfte Pds das Gleichgewicht, so ist die Fadencurve in einer Ebene des Centrums enthalten und ist die Spannung des Fadens ihrem Abstande vom Centrum umgekehrt proportional.

Dass die Curve eben ist, folgt unmittelbar daraus, dass bei jedem Fadengleichgewicht die Kraft P in die Schmiegungsebene der Curve fällt und hier alle Schmiegungsebenen durch einen Punkt hindurchgehen, mithin zusammenfallen, weil jede zwei aufeinanderfolgende Tangenten enthält.

Ist ψ der Winkel, welchen der Radiusvector r vom Centrum O nach dem Curvenpunkte M mit der Tangente bildet, so wird $p = r \sin \varphi$ und daher $T = \frac{C}{r \sin \varphi}\cdot$ Für den Fall, dass das Centrum ins Unendliche rückt, erlangt P constante Richtung und wird T der Cosecante von ψ proportional, da $\frac{C}{r}$ sich einer Constanten nähert. Hiemit erhalten wir einen früher gefundenen Satz wieder Reduciren sich nicht alle drei, sondern nur eine der obigen Determinanten auf Null, ist z. B. $X : x = Y : y$, so gilt der vorstehende Satz nur für die Projection der Fadencurve auf die Ebene der x, y. Die Kraft P schneidet dann in allen Lagen die z-Axe.

§. 13. Das Analogon zum Princip der lebendigen Kraft ist bereits Cap. VI, §. 1, Nr. 4, S. 91 in der Formel

$$dT = -(Xdx + Ydy + Zdz)$$

aufgestellt worden, welche, wenn die rechte Seite das Differential einer Function U von x, y, z ist, sofort ohne Kenntnis der Fadencurve für die Spannung liefert:

$$dT = -dU, \quad T - T_0 = -(U - U_0) \quad \text{oder} \quad T = -U + h.$$

Wenn also eine Kräftefunction U existirt, so hängt die Spannung blos von den Coordinaten des Punktes ab und kann unabhängig von der Natur der Fadencurve gefunden werden. Die Spannung ist dieselbe in allen Punkten einer Niveaufläche $U = C$, also insbesondere in allen Punkten, welche die Fadencurve mit einer solchen Fläche gemein hat. Dieselben Sätze gelten für das Quadrat der Geschwindigkeit eines Punktes, wenn für dessen Beschleunigung eine Kräftefunction existirt (Bd. I, S. 359).

Wir fanden §. 11, dass wenn X, Y, Z die Componenten der Kraft P am homogenen Faden sind, die Componenten der Beschleunigung der Bewegung eines Punktes, dessen Bahn die Fadencurve ist, gleich $-\lambda v X$, $-\lambda v Y$, $-\lambda v Z$ oder, da $v = \lambda T$ ist, wenn wir $\lambda = 1$ setzen gleich $-TX$, $-TY$, $-TZ$ genommen werden können, so dass die Bewegungsgleichungen selbst sind

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -TX, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -TY, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -TZ.$$

Existirt nun eine Kräftefunction U für das Fadenproblem, so sind

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Hiemit werden die Gleichungen der Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (U - h)\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\tfrac{1}{2}U^2 - hU),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (U - h)\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\tfrac{1}{2}U^2 - hU),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = (U - h)\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\tfrac{1}{2}U^2 - hU),$$

d. h.: Gibt es für das Gleichgewichtsproblem des homogenen Fadens eine Kräftefunction U, so gibt es auch für das entsprechende Bewegungsproblem eines Punktes eine solche und ist dieselbe $\frac{1}{2}U^2 - hU$, wo h eine Constante bedeutet.

Besteht umgekehrt für das Bewegungsproblem eine Kräftefunction U, so dass, wenn X, Y, Z die Componenten der Beschleunigung sind $\frac{\partial U}{\partial x} = X$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Y$, $\frac{\partial U}{\partial z} = Z$ werden, so ist $\frac{1}{2}v^2 = U + h$, wo h eine Constante bedeutet. Die Kraftcomponenten des Gleichgewichtsproblems sind alsdann,

$-\frac{X}{v}, -\frac{Y}{v}, -\frac{Z}{v}$ oder also $-\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2U+h}}, -\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{1}{\sqrt{2U+h}}$, $-\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{1}{\sqrt{2U+h}}$, oder wenn wir wieder $\lambda = 1$ setzen,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\sqrt{2U+h}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(-\sqrt{2U+h}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(-\sqrt{2U+h}\right),$$

d. h. $\frac{\partial v}{\partial x}, -\frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{\partial v}{\partial z}\cdot$ Daher:

Gibt es für das Bewegungsproblem eines Punktes eine Kräftefunction U, so besteht auch für das entsprechende Gleichgewichtsproblem des homogenen Fadens eine solche; sie ist $-\sqrt{2U+h}$, nämlich die Geschwindigkeit des Bewegungsproblems mit umgekehrtem Zeichen.

Beispiele.

1. Der Faden bilde eine verticale Kettenlinie in der xy-Ebene; es ist also $X = 0$, $Y = -g$, $Z = 0$, $dT = g dy$, $T = gy + h$. Wählen wir die Directrix und die Axe der Kettenlinie zu Axen der x, y, so wird $h = 0$, $T = gy$. Die Gleichungen des entsprechenden Bewegungsproblems sind daher nach dem Obigen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g^2 y.$$

Ihre Integration liefert $x = \alpha t + \beta$, $y = Ce^{gt} + C'e^{-gt}$, indem der zweiten Gleichung als einer linearen mit constanten Coefficienten Exponentialfunctionen genügen. Es seien für $t = 0$ die Coordinaten $x = 0$, $y = \frac{T_0}{g}$ und $\frac{dy}{dt} = 0$, d. h. die Bewegung beginne im Scheitel; dann wird $\beta = 0$, $\frac{T_0}{g} = C + C'$, $0 = C - C'$, also $C = C' = \frac{1}{2}\frac{T_0}{g}$ und hiermit

$$x = \alpha t, \quad y = \tfrac{1}{2}\frac{T_0}{g}\left(e^{gt} + e^{-gt}\right),$$

folglich nach Elimination von t:

$$y = \tfrac{1}{2}\frac{T_0}{g}\left(e^{\frac{g}{T_0}x} + e^{-\frac{g}{T_0}x}\right) \text{ oder } y = \tfrac{1}{2}\alpha\left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}}\right), \text{ wenn } T_0 = g\alpha.$$

2. Es sei die Kraft P am Faden eine Centralkraft, proportional der n^{ten} Potenz des Abstandes r. Dann sind ihre Componenten $-ar^{n-1}x$, $-ar^{n-1}y$, mithin ist die Kräftefunction $U = -\frac{ar^{n+1}}{n+1}$. Die Beschleunigung des entsprechenden Bewegungsproblems ist dann $\left(\frac{ar^{n+1}}{n+1} + h\right)ar^n = Ar^{2n+1} + Br^n$. Ist die Centralkraft $\frac{a}{r^m}$, so wird die Beschleunigung von der Form $\frac{A}{r^{2m-1}} + \frac{B}{r^m}\cdot$

§. 14. Unter der Voraussetzung, dass eine Kräftefunction U für das Gleichgewichtsproblem existirt, vermöge welcher also $T - T_0 = -(U - U_0)$

und $X = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$, $Z = \frac{\partial U}{\partial z}$ sind, gilt noch ein anderes Princip, dessen Analogon bei der Bewegung eines Punktes das B. I, S. 351 erwähnte Princip der kleinsten Wirkung ist. Es seien A, B zwei feste Punkte der Fadencurve. In allen ihren Punkten ist die Spannung T durch die vorstehende Gleichung gegeben. Die Function T ist aber eine Function des Ortes (der Coordinaten x, y, z) und hat in jedem Punkte des Raumes einen bestimmten Werth, wenn sie auch nur für die Punkte der Fadencurve eine Spannung darstellen kann. Zieht man durch A und B irgend eine andere Curve, multiplicirt in jedem Punkte derselben den Werth, den die Function T daselbst hat, mit dem Bogenelemente ds dieser Curve und bildet das Integral $\int T ds$, ausgedehnt von A bis B über den ganzen Bogen derselben, so wird der Werth dieses Integrals, welcher mit der Wahl der Curve veränderlich ist, im Allgemeinen ein Maximum oder Minimum, wenn die Curve mit der Fadencurve, wofür T die Spannung darstellt, zusammenfällt.

Zum Beweise werden wir die willkührlich zwischen A und B gezogene Curve sich unendlich wenig ändern, d. h. in eine andere, gleichfalls durch A und B gehende Curve übergehen lassen und zeigen, dass die daraus entspringende unendlichkleine Aenderung $\delta \int T ds$ des Integrals Null ist, wenn die Curve mit der Fadencurve zusammenfällt. Denn, da die Grenzen des Integrals fest sind, so ist

$$\delta \int T ds = \int \delta \cdot T ds.$$

Ferner hat man

$$\delta \cdot T ds = \delta T \cdot ds + T \cdot \delta ds.$$

Aus der Gleichung

$$T - T_0 = -(U - U_0)$$

folgt aber

$$\delta T = -\delta U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z\right) = -(X \delta x + Y \delta y + Z \delta z).$$

Andrerseits ist $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, mithin

$$ds \cdot \delta ds = dx \cdot \delta dx + dy \cdot \delta dy + dz \cdot \delta dz,$$

also $\delta ds = \frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta dz$. Fügt man die Werthe für T, δT, δds in die Gleichung für $\delta T ds$ ein, so ergibt sich

$$\delta \cdot T ds = -(X ds \delta x + Y ds \delta y + Z ds \delta z)$$
$$+ \left(T \frac{dx}{ds} \delta dx + T \frac{dy}{ds} \delta dy + T \frac{dz}{ds} \delta dz\right).$$

Wählt man nun zu der zu variirenden Curve die Fadencurve selbst, so ist

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X ds = 0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y ds = 0, \quad d\left(T\frac{dz}{ds}\right) - Z ds = 0$$

und wird hiemit

$$\delta \cdot T ds = d\left(T\frac{dx}{ds}\right)\delta x + d\left(T\frac{dy}{ds}\right)\delta y + d\left(T\frac{dz}{ds}\right)\delta z$$
$$+ T\frac{dx}{ds}\delta dx + T\frac{dy}{ds}\delta dy + T\frac{dz}{ds}\delta dz,$$

oder indem man das erste und vierte, zweite und fünfte, dritte und sechste Glied zusammenfasst und berücksichtigt, dass $\delta dx = d\delta x$ etc. ist,

$$\delta \cdot T ds = d\left(T\frac{dx}{ds}\delta x\right) + d\left(T\frac{dy}{ds}\delta y\right) + d\left(T\frac{dz}{ds}\delta z\right)$$
$$= d\left[T\frac{dx}{ds}\delta x + T\frac{dy}{ds}\delta y + T\frac{dz}{ds}\delta z\right].\text{*)}$$

Integrirt man nun, so kommt allgemein

$$\int \delta T ds = T\frac{dx}{ds}\delta x + T\frac{dy}{ds}\delta y + T\frac{dz}{ds}\delta z + Const.$$

---

*) Der Satz

$$\delta \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d \cdot \delta y}{dx}$$

oder kürzer, weil dx keine Aenderung erleidet:

$$\delta dy = d\delta y,$$

von welchem wir bei dieser Entwickelung Gebrauch machten, erweist sich leicht in folgender Art. Es sei (Fig. 54) $AMM'B$ die Projection der wirklichen Bahn auf die xy-Ebene, $A\mu\mu'B$ die irgend einer Nachbarcurve derselben und $PM = y$, also $P\mu = y + \delta y$; für eine unendlichkleine Aenderung des x, nämlich $PP' = dx$ wird man dann einerseits haben:

$$P'\mu' = P'M' + M'\mu = (y + dy) + \delta(y + dy),$$

andererseits aber auch

$$P'\mu' = P\mu + d \cdot P\mu = (y + \delta y) + d(y + \delta y).$$

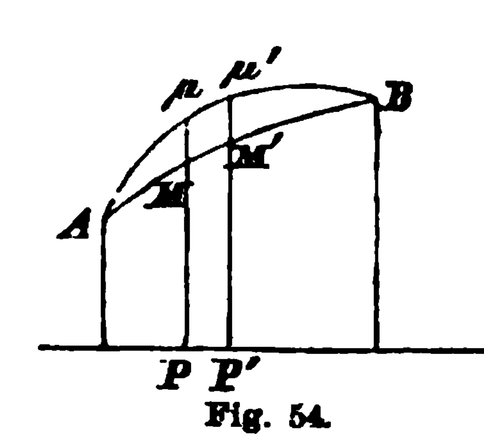


Fig. 54.

Da nun ganz allgemein die Aenderung einer Summe gleich der Summe der Aenderungen der einzelnen Summanden sein muss, so ergibt sich durch Vergleichung beider Ausdrücke

$$y + dy + \delta y + \delta dy = y + \delta y + dy + d\delta y,$$

d. h.

$$\delta dy = d\delta y.$$

Integrirt man diese Gleichung, so folgt weiter

$$\int \delta dy = \delta y$$

und da $y = \int dy$ ist:

$$\int \delta dy = \delta \int dy.$$

Da aber an den Grenzen, weil sie fest sind $\delta x = \delta y = \delta z = 0$ wird, so folgt für das über den Bogen AB ausgedehnte Integral

$$\int \delta T ds = \delta \int T ds = 0,$$

w. z. b. w. Es genügt daher das Integral $\int T ds$, ausgedehnt über irgend einen Bogen der Fadencurve mit festen Endpunkten, im Allgemeinen der Bedingung $\delta \int T ds = 0$ des Maximums oder Minimums, d. h. es ist kleiner oder grösser als der Werth, den es für jede unendlich wenig von der Fadencurve abweichende, durch dieselben Endpunkte gehende Curve annimmt.

Denkt man sich durch alle Punkte der Fadencurve die Niveauflächen $U = \text{Const.}$ gelegt, so zerschneiden sie die Fadencurve und die Nachbarcurve in Bogenelemente. Man kann die Nachbarcurve offenbar so ziehen, dass ihre Elemente nicht kleiner sind, als die zwischen denselben aufeinanderfolgenden Niveauflächen enthaltenen Elemente der Fadencurve. Da nun auf einer Niveaufläche T constanten Werth hat, so sieht man, dass die Elemente $T ds$ des Integrals für die Nachbarcurve nicht kleiner, als für die Fadencurve sind. Daher ist das Integral für die Fadencurve im Allgemeinen ein Minimum. Ob ein solches wirklich eintritt, kann nur durch die Bildung von $\delta^2 \int T ds$ und dessen Beschaffenheiten entschieden werden.

Dieser Satz gilt auch noch für die Fadencurve auf einer Fläche; die Nachbarcurven sind dann aber nur solche, welche ebenfalls auf der Fläche zwischen den festen Endpunkten A, B gezogen werden können. Ist nämlich $F = 0$ die Gleichung der Fläche und $R ds$ der Widerstand, so sind, wenn $(F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2)^{-\frac{1}{2}} = W$ gesetzt wird, dessen Componenten $RF_x' W ds$ $RF_y' W ds$, $RF_z' W ds$ und sie verbinden sich mit $X ds$, $Y ds$, $Z ds$ in den Gleichungen der Fadencurve. Aus der Gleichung

$$dT = -[(X + RWF_x') dx + \cdots]$$

verschwinden sie, da $F_x' dx + F_y' dy + F_z' dz = 0$ ist, weil dies die Differentialgleichung der Fläche ist; daher besteht die Gleichung

$$T - T_0 = -(U - U_0)$$

unverändert fort, wie für den freien Faden. Es ist daher auch für den über die Fläche gespannten Faden $\delta \int T ds = 0$.

Sind X, Y, Z Null, wird also der Faden blos von Endkräften gespannt, so ist T constant, also $\delta \int ds = 0$, d. h. die Fadencurve ist eine kürzeste Linie.

Der analoge Satz für die Bewegung eines Punktes wird erhalten, indem man der Theorie von §. 2 gemäss die Spannung T proportional der Ge-

schwindigkeit v setzt, während das Bogenelement ds unverändert bleibt, oder auch, was gleichbedeutend ist, durch vdt ersetzt wird.

Wenn daher für ein Bewegungsproblem eines Punktes eine Kräftefunction existirt, vermöge welcher die Geschwindigkeit v desselben eine Function des Ortes ist, und man nimmt auf der Bahn des Punktes zwei feste Punkte A, B an und bildet längs irgend einer durch diese hindurchgelegten Curve das von A bis B erstreckte Integral $\int v ds$, so wird dasselbe im Allgemeinen ein Minimum, wenn diese Curve mit der Bahn des Punktes zusammenfällt. Dieser Satz führt den Namen des Princips der kleinsten Wirkung und wurde zuerst von Euler aufgestellt (*Methodus inveniendi* etc. *Additamentum II*, *de motu projectorum in medio resistente*, 1744). Er gilt auch in allgemeiner Form für die Bewegung von Systemen und werden wir später auf denselben zurückkommen.

Aus der Gleichung $\delta \int T ds = 0$, wo $T = U + h$ ist, kann man nach den Grundsätzen der Variationsrechnung die Gleichungen des Gleichgewichts am Faden ebenso ableiten, wie aus der entsprechenden Gleichung $\delta \int v ds = 0$, wo $\frac{1}{2} v^2 = U + h$, die Gleichungen der Bewegung eines Punktes folgen.

§. 15. Aus dem Satze $\delta \int T ds = 0$ wollen wir einige Folgerungen für die Kettenlinie ziehen. Es sei die Fadencurve die verticale Kettenlinie; für sie ist die Spannung T der Ordinate y proportional; mithin wird $\int T ds$ proportional $\int y ds$. Es besteht aber für die Ordinate y_0 des Massenmittelpunktes eines Bogens AB die Gleichung $y_0 \cdot \int ds = \int y ds$. Sind daher über einer Horizontalebene zwei Punkte A, B gegeben, so hat unter allen durch diese Punkte begrenzten Curvenbogen für den Bogen AB der verticalen Kettenlinie, deren Directrix in diese Horizontalebene fällt, das Produkt aus der Länge des Bogens und dem Abstande seines Massenmittelpunktes von der Horizontalebene den kleinsten Werth. Hieraus folgt sofort, dass unter allen solchen Curven gleicher Länge für die Kettenlinie der Massenmittelpunkt des Bogens AB am tiefsten liegt.

§. 16. Der Nerv der in diesem Capitel entwickelten Analogien liegt darin, dass einerseits v und φdt, andererseits T und $-Pdm$ ein Parallelogramm bilden mit der Tangente als Seite, dessen Diagonalen $v + dv$ resp. $T + dT$ sind. Ist daher der Faden elastisch, so dass ausser T noch das Moment eines Kräftepaares, das Elasticitätsmoment, auftritt, so hört die Analogie des Gleichgewichtsproblems mit dem Bewegungsproblem des Punktes auf, da bei dem letzteren das Analogon zum Momente fehlt. Nichtsdestoweniger hat das Gleichgewicht eines elastischen Fadens und das Problem

des Pendels eine auffallende Analogie, die sich in der Uebereinstimmung der Gleichungen Cap. VII, §. 10, S. 120 u. S. 395 des ersten Bandes ausspricht. Dem Elasticitätsmomente entspricht die Winkelbeschleunigung, der Zeit die Bogenlänge, sodass wenn ein Punkt die elastische Linie gleichförmig durchläuft, die Tangente derselben eine Pendelbewegung macht, sodass ihre Lage am Ende des Bogens s dem Pendelfaden zur Zeit t parallel ist. Solche Analogien zu verfolgen, haben wir erst später Veranlassung. Sie gehören zu einer Gruppe, von welcher Kirchhoff einen Fall entwickelt hat, indem er die Parallele zog, welche zwischen der Gleichgewichtsform eines elastischen Stabes und der Rotation eines schweren Systems um einen festen Punkt geht. („Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes", Crelle's Journal, B. 56, S. 285 u. ff.).

An Literatur für das vorliegende Capitel ist ausser Möbius, Lehrbuch der Statik, B. II, S. 217—246 noch zu vergleichen: Padelletti, *Sulla teoria dei poligoni e delle curve funicolari* (*Battaglini*, *Giornale di matematiche*, Vol. XIV, pp. 14—47, (1876), wo selbst zu dem Hamiliton'schen Princip für die Bewegung eines Punktes das Analogon für das Gleichgewicht eines Fadens aufgestellt wird.

IX. Capitel.

Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 1. Wenn Kräfte an irgend einem Systeme zur Zeit t im Gleichgewicht sind, so tilgen sich die Beschleunigungen gegenseitig, welche sie hervorrufen und üben sie mithin keinen Einfluss auf den Geschwindigkeitszustand des Systems aus. Welches auch immer dieser Geschwindigkeitszustand sein mag, ist für das Gleichgewicht der Kräfte völlig gleichgültig; es ist das Gleichgewicht eine Eigenschaft des Kräftesystems, welche unabhängig hiervon besteht. Man wird daher die Bedingungen des Gleichgewichtes auch so darstellen können, dass in denselben diese Unabhängigkeit von dem Geschwindigkeitszustand ausgesprochen wird und eine oder mehrere Relationen sich ergeben, welche fortbestehen, welche Elementarbewegung man auch immer dem System beilegen möge. Der betreffende Satz, welcher diesen Gedanken ausdrückt, führt den Namen „Princip der virtuellen Geschwindigkeiten" und wurde bereits vor Galilei von Guido Ubaldo am Hebel, von Galilei selbst an der schiefen Ebene und einigen anderen einfachen Maschinen bemerkt (*Della scienza meccanica; Opere di Galileo Galilei*, T. I, p. 265, Bologna 1655), in seinem vollen Um-

fange aber erst von Joh. Bernoulli in einem Briefe an Varignon (Basel, 26. Jan. 1717) ausgesprochen und von Lagrange zum Fundamente seiner „*Mécanique analytique*" erhoben. Wir werden diesen Satz zuerst für das freie und das beschränkt bewegliche unveränderliche System beweisen und sodann den Beweis auf das beliebig veränderliche System mit beliebigen Bewegungsbeschränkungen ausdehnen.

§. 2. Die B. I, S. 57 und 58 allgemein für die Aequivalenz von Streckensystemen bewiesenen Sätze liefern für das Gleichgewicht und die Aequivalenz von Kräftesystemen am unveränderlichen Punktsystem unmittelbar die Sätze:

Ist ein Kräftesystem an einem unveränderlichen freien Punktsystem im Gleichgewicht, so ist die Summe der Pyramiden, welche eine beliebige Strecke des Raumes zur gemeinschaftlichen Kante und die Kräfte des Systems zu Gegenkanten haben, gleich Null.

Zwei äquivalente Kräftesysteme haben in Bezug auf jede beliebige Strecke des Raumes gleiche Pyramidensummen, gebildet aus dieser Strecke als gemeinschaftlicher Kante und den Strecken des einen, wie des andern Systems, als Gegenkanten.

Ist die Pyramidensumme, welche eine beliebige Strecke des Raumes mit den Kräften eines an einem unveränderlichen System angreifenden Kräftesystems als Gegenkanten bildet, für jede beliebige Wahl dieser Strecke gleich Null, so ist das Kräftesystem im Gleichgewicht.

Haben zwei Kräftesysteme für jede beliebige Strecke des Raumes gleiche Pyramidensummen, so sind sie einander äquivalent.

In Bezug auf das Gleichgewicht kann man daher zusammenfassend behaupten:

Zum Gleichgewicht eines Kräftesystems an einem freien Punktsystem ist erforderlich und hinreichend, dass die Summe der Pyramiden, welche eine beliebige Strecke des Raumes mit den Kräften des Systems bilden, für jede Wahl der Strecke hinsichtlich ihrer Grösse, Lage und ihrem Sinne verschwinde. Sinn und Zeichen der Pyramiden in der Summe bestimmen sich, wie B. I, S. 57 angegeben ist.

Nach B. I, S. 182 ist ferner die Elementarschraubenbewegung eines unveränderlichen Systems äquivalent den Elementarrotationen um zwei conjugirte Axen und also der Geschwindigkeitszustand äquivalent den Winkelgeschwindigkeiten um diese. Es seien nun a, a' irgend zwei conjugirte Axen für einen beliebigen Geschwindigkeitszustand des Systems, ω, ω' die

Winkelgeschwindigkeiten um sie und seien letztere als Längen auf den Axen aufgetragen. Wendet man den eben aufgestellten Satz auf ω und ω', als die beliebig wählbaren Strecken, an und bezeichnet allgemein das Volumen einer Pyramide, welche α und β zu Gegenkanten hat, durch $[\alpha\beta]$, so bestehen für das Gleichgewicht als nothwendig und hinreichend die Gleichungen $\Sigma[P\omega] = 0$, $\Sigma[P\omega'] = 0$, welche bei der Willkührlichkeit der Axen identisch dasselbe aussagen, sowie ihre Summe:

$$\Sigma[P\omega] + \Sigma[P\omega'] = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma([P\omega] + [P\omega']) = 0.$$

Der Inhalt der Pyramiden $[P\omega]$ und $[P\omega']$ wird nun mit Hülfe der kürzesten Abstände d, d' der Richtungslinie von P von den Axen a, a' und der Winkel α, α', welche P mit diesen Axen bildet, durch die Formeln

$$[P\omega] = \tfrac{1}{6} P\omega d \sin\alpha, \quad [P\omega'] = \tfrac{1}{6} P\omega' d' \sin\alpha'$$

gefunden; wir führen aber in diese Formeln lieber die Abstände r, r' des Angriffspunktes M der Kraft P von den Axen a, a' ein. Indem wir mit diesen Grössen multipliciren und dividiren und bedenken, dass ωr und $\omega' r'$ die Geschwindigkeiten u, u' bedeuten, welche der Punkt M vermöge der Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' besitzt, nehmen die beiden Pyramidenvolumina zunächst die Form an:

$$[P\omega] = \tfrac{1}{6} Pu \cdot \frac{d}{r} \sin\alpha, \quad [P\omega'] = \tfrac{1}{6} Pu' \cdot \frac{d'}{r'} \sin\alpha'.$$

Nun kann aber leicht gezeigt werden, dass $\frac{d}{r}\sin\alpha$ und $\frac{d'}{r'}\sin\alpha'$ nichts anderes sind, als die Cosinusse der Winkel ϑ, ϑ', welche die Geschwindigkeiten u, u' mit der Richtung der Kraft P bilden. Durch die Axe a und die Kraftrichtung P ist nämlich eine Parallelschicht von der Dicke d bestimmt und steht d senkrecht auf allen Geraden in den Ebenen der Schicht. Daher stellt $d:r$ den Cosinus des Winkels λ dar, welchen r mit d bildet (Fig. 55). Setzen wir daher $d:r = \cos\lambda$ und ebenso $d':r' = \cos\lambda'$, so werden

$$[P\omega] = \tfrac{1}{6} Pu \cos\lambda \sin\alpha,$$
$$[P\omega'] = \tfrac{1}{6} Pu' \cos\lambda' \sin\alpha'.$$

Legt man ferner durch den Angriffspunkt M der Kraft P gleichfalls eine Gerade MQ parallel zur Axe a, sowie die Gerade MU in der Richtung der Geschwindigkeit u, so bilden die Richtungen P, MQ und MU im Punkte M eine dreiflächige Ecke PUQ, in welcher die Seite $(UQ) = \frac{1}{2}\pi$, weil die Geschwindigkeit u zur Axenrichtung a senkrecht ist. Die beiden an-

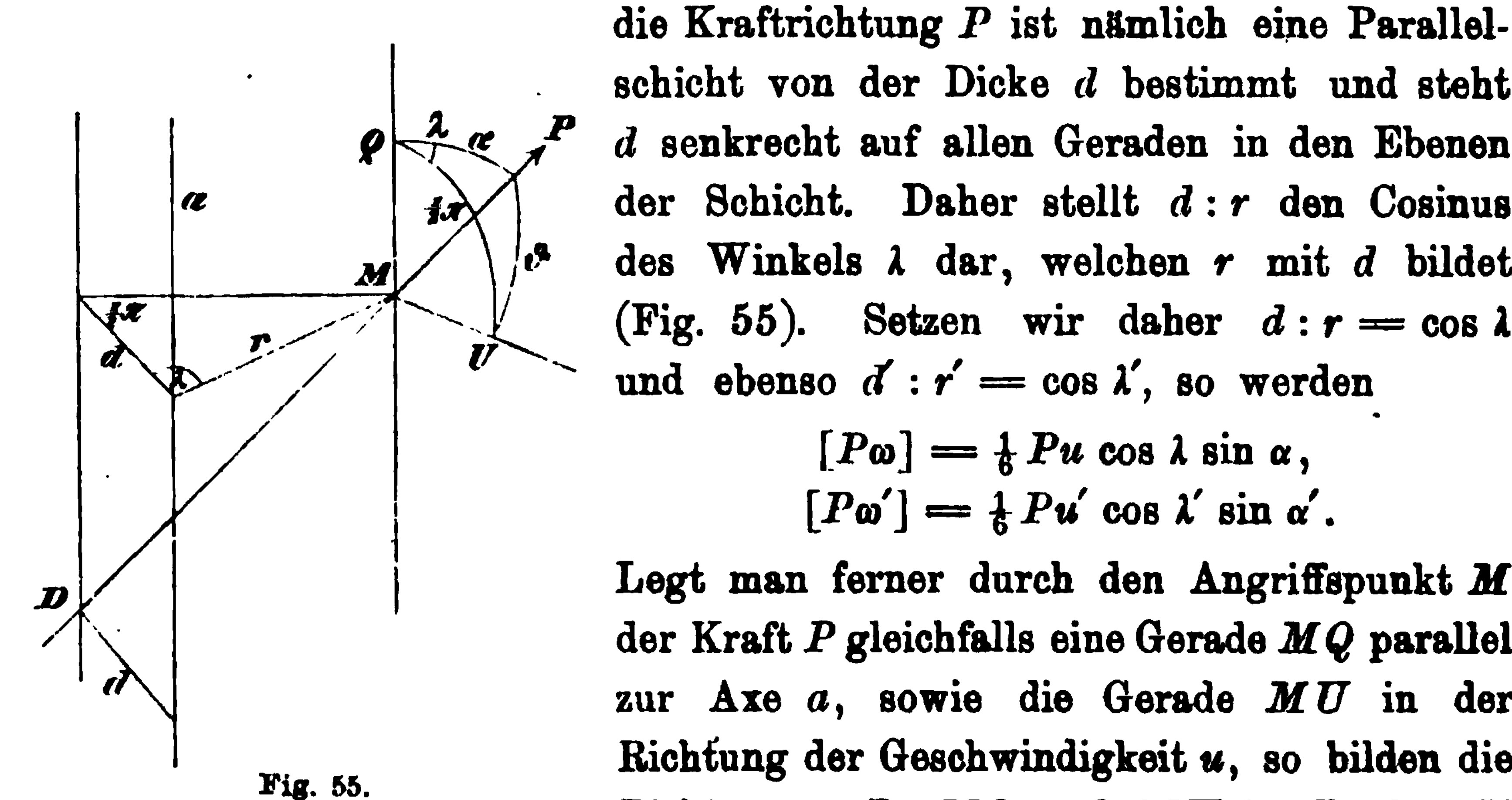


Fig. 55.

deren Seiten sind $(UP) = \vartheta$ und $(PQ) = \alpha$, während der Flächenwinkel $PQU = \lambda$ ist, weil die Ebene PQ auf d und die Ebene UQ auf r senkrecht steht. Aus dem dieser Ecke zugehörigen sphärischen Dreieck PQU ergibt sich daher

$$\cos\vartheta = \cos\lambda \sin\alpha = \frac{d}{r}\sin\alpha.$$

Hiermit erhalten wir jetzt, indem wir dieselbe Betrachtung in Bezug auf die Axe a' wiederholen:

$$[P\omega] + [P\omega'] = \tfrac{1}{6}P(u\cos\vartheta + u'\cos\vartheta'),$$

oder weil die Summe $u\cos\vartheta + u'\cos\vartheta'$ als Summe der Projectionen der Geschwindigkeiten u, u' auf die Richtung der Kraft P gleich der Projection $v\cos(Pv)$ der aus ihnen resultirenden Geschwindigkeit v des Punktes M auf die Richtung von P ist,

$$[P\omega] + [P\omega'] = \tfrac{1}{6}Pv\cos(Pv).$$

Daher geht die obige Gleichgewichtsbedingung über in

$$\Sigma Pv\cos(Pv) = 0$$

und liefert den Satz:

Zum Gleichgewicht von Kräften an einem unveränderlichen, frei beweglichen System ist erforderlich und hinreichend, dass für jeden beliebigen Geschwindigkeitszustand des Systems die Summe aller Kräfte, jede multiplicirt mit der Projection der Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes auf die Richtung der Kraft, oder was hiermit gleichbedeutend ist, dass die Summe der Geschwindigkeiten aller Punkte, jede multiplicirt mit der Projection der an ihnen angreifenden Kräfte auf die Richtung der Geschwindigkeit, verschwinde.

Der Satz führt den Namen des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, weil die in ihm auftretenden Geschwindigkeiten nicht die dem wirklich vorhandenen Bewegungszustande des Systems, sondern nur einem beliebig angenommenen oder als möglich gedachten anzugehören brauchen. Bereits B. I, S. 327 wurde das Wort „virtuell" in diesem Sinne als Gegensatz zu „actuell" erläutert.

Man gibt dem Satze in der Regel eine etwas andere Fassung, als hier geschehen. Ist nämlich ds der Elementarweg, welchen der Angriffspunkt M der Kraft P in Folge des willkürlich angenommenen Geschwindigkeitszustandes im folgenden Zeitelemente dt beschreiben würde, so ist $v = \frac{ds}{dt}$ und wenn weiter in dem Produkte $v\cos(Pv) = \frac{ds\cdot\cos(Pv)}{dt}$ die Projecjection $ds\cos(Pv)$ des Elementarwegs auf die Richtung der Kraft mit

dp bezeichnet wird, so nimmt die Gleichung des Princips die Gestalt $\Sigma P \frac{dp}{dt} = 0$ oder nach Multiplication mit dt die Form $\Sigma P dp = 0$ an, in welcher man noch an die Stelle des Differentialzeichens d, um etwaigen Verwechselungen der beliebig gedachten dp mit den dem wirklichen Bewegungszustande des Systems entsprechenden dp vorzubeugen, das Variationszeichen δ setzt und also die Gleichung so schreibt:

$$\Sigma P \delta p = 0.$$

Einem etwas abnormen Sprachgebrauche zufolge nennt man die Elementarwege der Punkte, welche ihren virtuellen Geschwindigkeiten proportional sind, die virtuellen Geschwindigkeiten selbst (besser „virtuelle Verschiebungen"). Die Grössen $P\delta p$ sind gemäss B. I, S. 326 die virtuellen Elementararbeiten der Kräfte werden aber auch die virtuellen Momente derselben genannt. Alles, was dort über die positive und negative Beschaffenheit dieser Grössen gesagt ist, kommt hier in Betracht. Ein virtuelles Moment $P\delta p$ ist Null, wenn $P = 0$ oder $\delta p = 0$; im letzteren Falle ist entweder die virtuelle Verschiebung Null oder senkrecht zur Richtung von P. Unter Anwendung dieser Nomenclatur heisst der Satz:

Zum Gleichgewichte eines Kräftesystems an einem unveränderlichen frei beweglichen Punktsystem ist erforderlich und hinreichend, dass für jeden beliebigen virtuellen Bewegungszustand des Systems die Summe der virtuellen Arbeiten (Momente) aller Kräfte verschwinde.

Ist das Kräftesystem nicht im Gleichgewicht, so ist es äquivalent einer Einzelresultanten, einem Paare oder zwei sich kreuzenden Kräften. Aus den Sätzen §. 1 über die Pyramidensumme ergibt sich ganz ebenso, dass die Summe der virtuellen Arbeiten eines Kräftesystems, welches an einem unveränderlichen freien Punktsystem angreift, überhaupt gleich der virtuellen Arbeit seiner Resultanten, seines resultirenden Paares oder der beiden ihm äquivalenten Kräfte oder jedes anderen ihm äquivalenten Systems für jeden beliebigen Geschwindigkeitszustand ist.

§. 3. Man kann diese Sätze auch leicht aus dem allgemeinen Satze über zwei Streckensysteme (S. 27 und 45) ableiten. Es seien diese $P_1, P_2, \ldots$ und $Q_1, Q_2, \ldots$ und für irgend einen Punkt O die Reduction des zweiten (R', G'). Uebertragen wir dieselbe auf einen beliebigen Punkt A der Strecke P_u, so geht sie über in eine Reduction (R', G_1') und sind in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem mit dem Ursprung O, wenn x, y, z die Coordinaten von A und L', M', N' die Componenten von G' sind, die Componenten des neuen Momentes G_1':

$$L' - (yZ' - zY'), \quad M' - (zX' - xZ'), \quad N' - (xY' - yX')$$

(S. B. I, S. 51). Sind also $P_u^{(x)}$, $P_u^{(y)}$, $P_u^{(z)}$ die Componenten von P_u, so ist der Cosinus des Winkels zwischen P_u und G_1'

$$\frac{[L'-(yZ'-zY')]\,P_u^{(x)}+[M'-(zX'-xZ')]\,P_u^{(y)}+[N'-(xY'-yX')]\,P_u^{(z)}}{P_u G_1'},$$

mithin ist

$$\begin{aligned}P_u G_1' \cos(P_u G_1') = P_u^{(x)} L' + P_u^{(y)} M' + P_u^{(z)} N' + (yP_u^{(z)} - zP_u^{(y)})\,X' \\ + (zP_u^{(x)} - xP_u^{(z)})\,Y' + (xP_u^{(y)} - yP_u^{(x)})\,Z'.\end{aligned}$$

Führen wir dieselbe Operation der Uebertragung für alle Strecken P_u aus und summiren die Resultate, so kommt, wenn die Reductionselemente des Systems $P_1, P_2 \ldots$ für den Punkt O mit $X = \Sigma P_u^{(x)}$, $Y = \Sigma P_u^{(y)}$, $Z = \Sigma P_u^{(z)}$, $L = \Sigma(yP_u^{(z)} - zP_u^{(y)})$, $M = \Sigma(zP_u^{(x)} - xP_u^{(z)})$, $N = \Sigma(xP_u^{(y)} - yP_u^{(x)})$ bezeichnet werden,

$$\begin{aligned}\Sigma P_u G_1' \cos(P_u G_1') &= XL' + YM' + ZN' + LX' + MY' + NZ' \\ &= 6\,\Sigma\Sigma\, Pyr.\,(P_u,\, Q_u).\end{aligned}$$

Nun sei R' eine Winkelgeschwindigkeit, aufgetragen auf ihrer Axe, G' eine Translationsgeschwindigkeit, während die Strecken P_u Kräfte bedeuten. Dann stellt (B. I, S. 268) G_1' die Geschwindigkeit dar, welche der Punkt $A(xyz)$ durch den Geschwindigkeitszustand (R', G') erlangt, und also $G_1' \cos(P_u G_1')$ die Projection der Geschwindigkeit des Punktes A auf die Richtung der an ihm angreifenden Kraft P_u und ist die linke Seite der Gleichung die Summe der dem Geschwindigkeitszustand entsprechenden Elementararbeiten, dividirt durch das Zeitelement. Da die Pyramidensumme rechts für den Fall des Gleichgewichts verschwinden muss, so folgt $\Sigma P\delta p = 0$, wie oben. Die Grössen L', M', N' stellen die Componenten einer Translationsgeschwindigkeit, X', Y', Z' die einer Winkelgeschwindigkeit dar und wird also mit dem Zeitelemente multiplicirt und stellt man die unendlich kleinen Wegelemente, welche diesen beiden Bewegungen entsprechen, durch δx, δy, δz, $\delta\vartheta$, $\delta\vartheta'$, $\delta\vartheta''$ dar, so geht die Gleichgewichtsbedingung über in

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + L\delta\vartheta + M\delta\vartheta' + N\delta\vartheta'' = 0,$$

auf welche Darstellung des Princips wir §. 8 zurückkommen werden.

§. 4. Ist das unveränderliche System nicht frei, sondern an gewisse Bedingungen gebunden, welche seine Beweglichkeit beschränken, so sind zwei Fälle zu unterscheiden; entweder sind diese Bedingungen der Art, dass sie durch gewisse Kräfte vertreten werden können, welche das System nöthigen, dieselben zu erfüllen, oder es ist dies nicht möglich. Im ersten Falle kommt das Gleichgewicht des Kräftesystems nur durch Mitwirkung der Kräfte, welche die Bedingungen ersetzen, zu Stande. Da diese Kräfte die Bedingungen vollkommen vertreten, so fallen letztere durch ihre Ein-

führung als erfüllt hinweg und besteht das Gleichgewicht an dem Gesammtkräftesystem, wie an einem freien System. Es gilt daher auch hier das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, d. h. es besteht der Satz:

Zum Gleichgewicht eines Kräftesystems $P, P', P'', \ldots$ welches an einem unveränderlichen Punktsystem wirkt, dessen Bedingungen der Beweglichkeit durch Kräfte darstellbar sind, ist erforderlich und hinreichend, dass für jeden beliebigen Geschwindigkeitszustand die Summe der virtuellen Arbeiten aller Kräfte des gegebenen Kräftesystems, sowie der Bedingungskräfte verschwinde. Sind also N, N', $N''\ldots$ die Bedingungskräfte und δn, $\delta n'$, $\delta n'', \ldots$ die Projectionen der virtuellen Verschiebungen ihrer Angriffspunkte auf die Richtungen der N, so besteht für jede virtuelle Lagenänderung des Systems die Gleichung:

$$\Sigma P\delta p + \Sigma N\delta n = 0.$$

Fälle der zweiten Art erfordern eine aparte Behandlung und lassen wir dieselben ausser unserer Betrachtung. Zu der ersten Art gehören die Bewegungsbeschränkungen, welche bereits Cap. IV, §. 6, S. 56 aufgeführt wurden, nämlich: 1. das System besitzt einen festen Punkt, 2. es besitzt eine feste Axe, 3. es hat eine feste Axenrichtung, 4. gewisse Punkte sind genöthigt, auf bestimmten Curven oder Flächen zu bleiben, 5. eine Fläche des Systems soll fortwährend eine oder mehrere gegebene Flächen berühren u. dgl. m. Die Festigkeit eines Punktes ist immer ersetzbar durch einen Widerstand, welcher die dem Punkte ertheilte Beschleunigung tilgt, die Festigkeit der Axe kann durch Widerstände in zweien beliebigen ihrer Punkte vertreten werden; ein Punkt kann durch einen Normalwiderstand auf eine Curve oder Fläche gezwungen werden, die Berührung von Flächen des Systems mit gegebenen Flächen wird gleichfalls durch Kräfte ausgedrückt, welche längs den gemeinschaftlichen Normalen der sich berührenden Flächen wirken.

Unter den unendlich vielen virtuellen Elementarbewegungen des Systems gibt es gewisse, für welche die Summe $\Sigma N\delta n$ der virtuellen Arbeiten der Bedingungskräfte für sich verschwindet. Man nennt dieselben die mit den Bedingungen des Systems verträglichen Elementarbewegungen. Bei den eben angeführten Fällen sind sie nämlich diejenigen, wodurch die Bedingungen nicht alterirt werden. Denn wird das System um den festen Punkt gedreht, so ist für diesen $\delta n = 0$, also auch die virtuelle Arbeit $N\delta n$ des Widerstandes Null, der seiner Festigkeit äquivalent ist. Rotirt das System um die feste Axe, so sind die virtuellen Verschiebungen der Angriffspunkte ihrer Widerstände gleichfalls Null, hat es eine Schraubenbewegung um die Axe von fester Richtung, so

sind die virtuellen Verschiebungen der Geraden, welche in der Axe gleitet, normal zu den Axenwiderständen, also werden ihre Projectionen δn gleich Null und dasselbe ereignet sich, wenn das System so verschoben wird, dass bestimmte Punkte in vorgeschriebenen Bahnen oder auf vorgeschriebenen Flächen sich bewegen; denn die Elementarwege fallen in die Tangenten oder Tangentenebenen und die Bedingungskräfte sind Normalkräfte.

Handelt es sich nun blos um die Aufstellung der von dem gegebenen Kräftesystem zu erfüllenden Gleichgewichtsbedingungen, ohne dass man über die Natur der Bedingungskräfte Auskunft erhalten will, so genügt es, die mit den Bedingungen des Systems verträglichen Elementarbewegungen mit Hintansetzung aller übrigen zu betrachten. Wir müssen hierfür aber unseren Satz in zwei Theile spalten. Zunächst kann man nämlich in Folge der eben gemachten Bemerkungen nur behaupten:

Wenn ein Kräftesystem an einem unveränderlichen, gewissen Bedingungen, welche Kräften äquivalent sind, unterworfenen System im Gleichgewicht sich befindet, so ist für alle mit den Bedingungen verträglichen Elementarbewegungen des Systems die Summe der virtuellen Arbeiten aller Kräfte der Null gleich.

Der zweite Theil des Satzes, die Umkehrung des eben ausgesprochenen, muss besonders erwiesen werden. Nämlich:

Wenn die Summe der virtuellen Arbeiten eines Kräftesystems, welches an einem unveränderlichen, gewissen Bedingungen, welche Kräften äquivalent sind, unterworfenen System angreift, für alle mit den Bedingungen verträglichen Elementarbewegungen verschwindet, so ist das Kräftesystem im Gleichgewicht.

Denn fände nicht Gleichgewicht statt, so würden die Kräfte das System in einer mit den Bedingungen verträglichen Weise beschleunigen. Dies könnte man dadurch hindern, dass man an den einzelnen Punkten des Systems Kräfte Q wirken liesse, welche die Beschleunigungen derselben tilgten. Diese Kräfte würden in die Richtungen jener Beschleunigungen fallen und würden ihnen dem Sinne nach entgegengesetzt sein. Wählen wir nun die durch die gegebenen Kräfte erfolgende Elementarbewegung zu der virtuellen Bewegung und bezeichnen die unendlich kleinen Wege, welche die Punkte hierbei beschreiben würden, mit δy, $\delta y'$, $\delta y''$, ... und ihre Projectionen auf die Richtungen der Kräfte P wieder mit δp, $\delta p'$, $\delta p''$ ..., so wäre $\Sigma P\delta p$ die virtuelle Arbeit des gegebenen Kräftesystems, $-\Sigma Q\delta q$ aber die virtuelle Arbeit der hinzugefügten Kräfte und diese letztere ist negativ, weil die Kräfte Q mit den Wegen δq Winkel π bilden. Wegen des sodann eintretenden Gleichgewichtes würde die Gleichung $\Sigma P\delta p - \Sigma Q\delta q = 0$

bestehen, welche sich auf $-\Sigma Q\delta q = 0$ reducirt, da nach der Voraussetzung $\Sigma P\delta p = 0$ ist. Diese Gleichung kann aber nicht bestehen.

§. 5. Hinsichtlich der die Beweglichkeit des Systems beschränkenden Bedingungen ist noch eine speciellere Untersuchung erforderlich. Wenn ein Punkt gezwungen ist, sich auf einer gegebenen Fläche zu bewegen, so kann er in der Richtung der Normalen weder nach der einen, noch nach der anderen Seite ausweichen. Die Fläche leistet sowol, wenn die Kräfte den Punkt an die Fläche pressen, als auch, wenn sie denselben von der Fläche wegziehen, einen Widerstand, der das eine, wie das andere hindert. Man kann sich dies materiell dadurch dargestellt denken, dass man die Fläche als aus zwei unendlich nahen Schalen bestehend annimmt, zwischen denen sich der Punkt befindet. In einem Falle wird er gegen die eine Schale gedrückt und leistet diese im entgegengesetzten Sinne Widerstand, im anderen Falle findet dies bei der anderen Schale statt. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass die Kräfte den Punkt an die Fläche anpressen und der Widerstand derselben blos das Eindringen hindert, während der Beweglichkeit im entgegengesetzten Sinn kein Hinderniss im Wege steht; so z. B. wenn der Punkt sich auf der Oberfläche eines festen Körpers befindet, in welchen er nicht eindringen, von welchem er aber wohl hinweggeführt werden kann. Die Fläche ist dann nur als eine einzige Schale zu denken und leistet nur einseitigen Widerstand. Ebenso kann die Beweglichkeit des Punktes in der Tangentenebene der Fläche nach der einen oder der anderen Richtung beschränkt sein, während sie in entgegengesetztem Sinne kein Hinderniss findet. Aehnliches kann bei der Bewegung des Punktes auf einer gegebenen Curve eintreten, indem dieselbe in dem einen Sinne gehindert ist, im entgegengesetzten nicht; desgleichen bei der Rotation um eine gegebene Axe u. s. w.

Bei der Entwickelung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten unter der Form, in welcher die Bedingungskräfte nicht in den Ausdruck derselben eintreten, wurde nun angenommen, dass die Bedingungskräfte die Beschränkungen der Beweglichkeit absolut erfüllen, sodass also die Flächen doppelseitigen Widerstand leisten, dass aber in der Tangentenebene nach jeder Richtung in beiderlei Sinn und in der Tangente einer Curve gleichfalls in beiderlei Sinn Beweglichkeit stattfinde. Finden die Bewegungshindernisse aber nur einseitig statt, so braucht die Gleichung $\Sigma P\delta p = 0$ nicht mehr für alle verträglichen Verschiebungen erfüllt zu sein. Denn führt man die Bewegungshindernisse als Kräfte $N, N', N'', \ldots$ ein, so ist überhaupt nach §. 3. wegen des Gleichgewichtes

$$\Sigma P\delta p + \Sigma N\delta n = 0.$$

Nun gibt es zweierlei Verschiebungen, welche mit den Bedingungen des

Systems verträglich sind, solche für welche $\Sigma N\delta n = 0$ ist und solche, für welche diese Summe positiv ist. Für alle Verschiebungsarten, bei welchen nun die betreffenden Punkte auf die Hindernisse stossen, sind die Grössen δn Null, also auch $\Sigma N\delta n = 0$ und folglich ist für diese $\Sigma P\delta p = 0$. Für die entgegengesetzten und alle übrigen verträglichen Verschiebungen sind aber alle $N\delta n$ oder wenigstens einige von ihnen positiv, weil N und δn gleichen Sinn besitzen; daher kann für sie $\Sigma P\delta p$ nicht mehr Null, sondern muss negativ sein. Wir erhalten daher das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten jetzt in folgender allgemeinerer Fassung:

Zum Gleichgewicht eines Kräftesystems, welches an einem unveränderlichen, gewissen, durch Kräfte darstellbaren Bedingungen unterworfenen Punktsystem angreift, ist, wenn die Beweglichkeit des Systems durch diese Bedingungen nicht absolut, sondern nur einseitig oder nach gewissen Richtungen beschränkt wird, erforderlich und hinreichend, dass für alle verträglichen Verschiebungsarten die Summe $\Sigma P\delta p$ der virtuellen Arbeiten des Kräftesystems nicht positiv, dass vielmehr $\Sigma P\delta p \leqq 0$ sei.

In dieser Fassung wurde das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten zuerst von Gauss ausgesprochen. Vgl. Gauss, Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik, Crelle, Journ .B. IV, S. 234, Anm.

§. 6. Beispiele.

1. Ein homogener schwerer Cylinder (Fig. 56) von dem Gewichte G, der Länge $2l$ und dem Radius r seines Querschnitts ruht bei A auf einer horizontalen und lehnt sich bei B an eine vertikale Ebene, sodass die Erzeugungslinie AB senkrecht zur Schnittlinie O beider Ebenen ist; bei A und B findet Reibung (Reibungscoefficienten μ, μ') statt. Welches sind die äussersten Lagen, für welche zwischen dem Gewichte und den beiden Reibungen noch Gleichgewicht herrscht? Die beschränkenden Bedingungen des Systems, dass nämlich die Punkte A, B in den beiden Ebenen bleiben sollen, sind durch die Normalwiderstände N, N' dieser Ebenen ersetzbar. Dieselben wirken einseitig. Sie und der Winkel ψ, welchen die Axe des Cylinders mit der Horizontalebene im Zustande des Gleichgewichtes bildet, sind die Unbekannten des Problems, zu deren Auffindung wir drei verschiedene, bequem zu wählende virtuelle Bewegungen anwenden werden. Das Kräftesystem besteht aus G am Schwerpunkte S des Cylinders vertikal abwärts, N in A vertikal aufwärts, N' in B horizontal wirkend, sowie den Reibungen μN, $\mu' N'$, welche den Beschleunigungen entgegenwirken, welche die Punkte A, B in den Ebenen in Folge des Gewichtes G annehmen würden, wenn die Reibung nicht vorhanden wäre. Ertheilt man nun zunächst dem System eine unendlich kleine Rotation um die zur

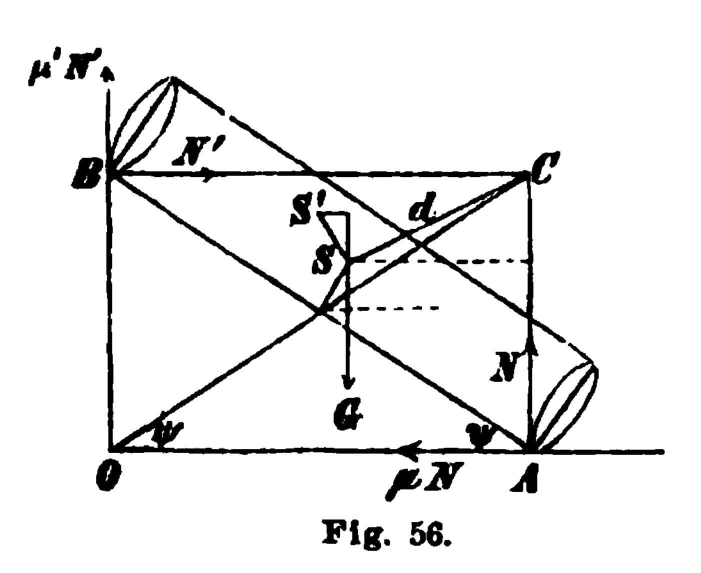


Fig. 56.

Ebene des Kräftesystems senkrechte, durch das Momentancentrum C des in dieser Ebene beweglichen Punktsystems (den Schnittpunkt der Normalen in A und B) gehende Axe im Sinne der Uhrzeigerbewegung, so beschreibt S einen unendlich kleinen Kreisbogen SS' senkrecht zu $CS = d$ und dieser bildet mit der Vertikalen denselben Winkel, welchen CS und die Horizontale OA bilden; der Cosinus dieses Winkels ist $(l \cos\psi - r \sin\psi) : d$ und da die Elementaramplitude der Rotation $d\psi$, mithin der Elementarweg von S gleich $d \cdot d\psi$ ist, so stellt $-G(l \cos\psi - r \sin\psi)\, d\psi$ die virtuelle Arbeit des Gewichtes G dar. Die Arbeiten von N, N' sind Null, die von μN, $\mu' N'$ aber $-2\mu N l \sin\psi\, d\psi$ und $-2\mu' N' l \cos\psi\, d\psi$. Daher ist

$$-[G(l\cos\psi - r\sin\psi) + 2\mu N l \sin\psi + 2\mu' N' l \cos\psi]\, d\psi$$

die gesammte virtuelle Arbeit aller Kräfte bei der mit den Bedingungen verträglichen Verschiebung, welche in der unendlichkleinen Rotation um C besteht. Für sie ist daher

$$-[G(l\cos\psi - r\sin\psi) + 2\mu N l \sin\psi + 2\mu' N' l \cos\psi]\, d\psi = 0.$$

Um die Widerstände zu finden, ertheilen wir dem System zwei virtuelle Translationen senkrecht zu den beiden Ebenen. Die horizontale Translation dx liefert $(N' - N\mu)\, dx = 0$, die vertikale dy aber $(N + N'\mu' - G)\, dy = 0$ und aus beiden folgen:

$$N = \frac{G}{1 + \mu\mu'}, \quad N' = \frac{\mu G}{1 + \mu\mu'}.$$

Führen wir diese Werthe in die vorstehende Gleichung ein, so ergibt sich der Werth von ψ, welcher dem äussersten Gleichgewicht entspricht, nämlich:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{(1 - \mu\mu')}{(1 + \mu\mu')\frac{r}{l} + 2\mu}.$$

(Vgl. S. 62).

2. Ein Winkelhebel AOB (Fig. 57), dessen Schenkel den Winkel ϑ bilden, ist um seinen Scheitel O in einer Vertikalebene drehbar; der eine Schenkel $OB = b$ ist verhältnissmässig schwer und sein Gewicht gleich Q; das Ende A des anderen Schenkels $OA = a$ trägt eine Schale oder einen Haken vom Gewichte ϖ und eine Last vom Gewichte P. In welcher Lage dieses Systems findet Gleichgewicht der Kräfte statt? (Zeigerwaage.)

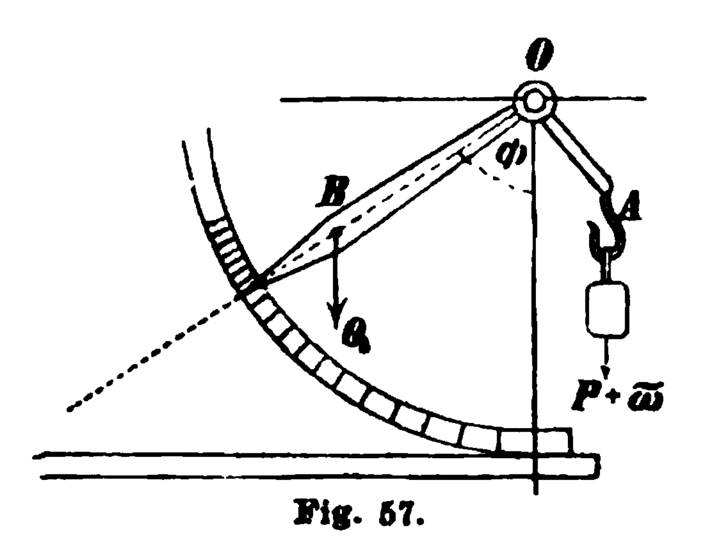


Fig. 57.

Es bilde in der Gleichgewichtslage OB mit der Vertikalen den Winkel φ, also OA mit derselben den Winkel $\vartheta - \varphi$. Ertheilt man dem System eine virtuelle Rotation um O, sodass φ um $d\varphi$ zunimmt, so nimmt $\vartheta - \varphi$ um $d\varphi$ ab und haben die Arbeiten der Kräfte $P + \varpi$ und Q die Werthe

$$(P + \varpi)\, a \sin(\vartheta - \varphi)\, d\varphi \text{ und } - Qb \sin\varphi\, d\varphi.$$

Daher ist die Bedingung des Gleichgewichts

$$(P + \varpi)\, b \sin(\vartheta - \varphi) - Qa \sin\varphi = 0,$$

woraus sich ergibt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(P + \varpi)\, a \sin \vartheta}{(P + \varpi)\, a \cos \varphi + Qb}.$$

Für $P = 0$ findet man die Stellung, welche dem Nullpunkt einer Kreisscala entspricht, für welche der Schenkel OB den Zeiger trägt, nämlich

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\varpi\, a \sin \vartheta}{\varpi\, a \cos \vartheta + Qb};$$

indem man $P = 1, 2, 3, \ldots$ Kilogramm annimmt, erhält man die den Scalatheilpunkten $1, 2, 3, \ldots$ entsprechenden Winkel φ. Soll OA horizontal sein für die Stellung des Zeigers auf Null, so muss $\vartheta - \varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$, also $\vartheta = \frac{1}{2}\pi + \varphi_0$, also $\operatorname{tg} \varphi_0 = -\operatorname{cotg} \vartheta$ werden, für welchen Werth aus der vorigen Gleichung $\cos \vartheta = -\frac{\varpi a}{Qb}$ folgt, welche Gleichung eine der Grössen a, b, Q, ϖ, ϑ liefert, wenn die übrigen willkürlich angenommen sind. Mit wachsendem P nähert sich der Schenkel OA der vertikalen Lage und wächst der Winkel φ, indem er sich ϑ als seiner Grenze nähert. — Für $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ wird $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{Qb}(P + \varpi)$, also wenn ϖ sehr klein ist, wachsen die Tangenten von φ nahezu den Gewichten P proportional. Für grössere Lasten P muss Q sehr gross gewählt werden, damit der Ausschlag des Zeigers nicht zu rasch wachse, da mit wachsendem φ die Theilstriche immer enger aneinander rücken. — Den Widerstand N des Punktes O und seine Richtung findet man, indem man dem System eine vertikale und eine horizontale virtuelle Translation ertheilt. Bildet es mit der Vertikalen aufwärts gerechnet den Winkel λ, so wird $N \cos \lambda - (P + \varpi) - Q = 0$ und $N \sin \lambda = 0$, also $N = (P + \varpi) + Q$ und $\lambda = 0$.

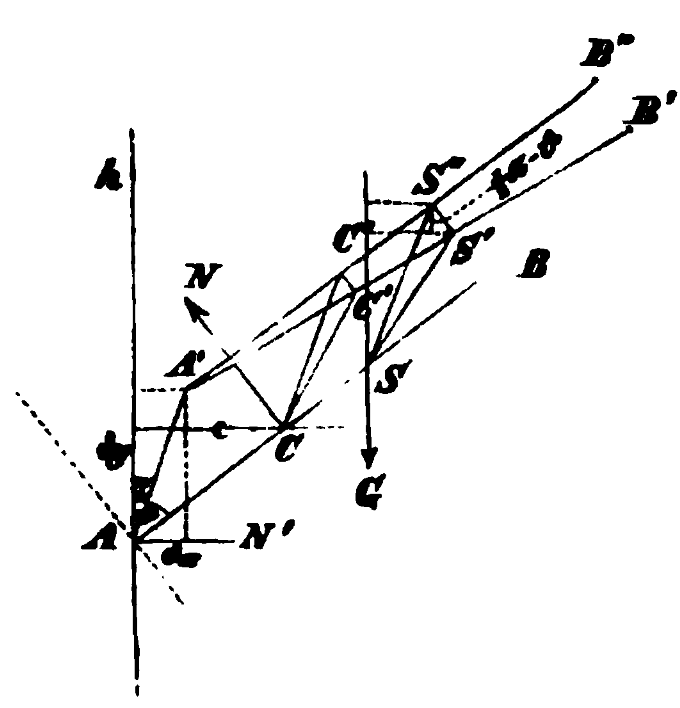


Fig. 58.

3. Eine schwere Linie AB (Fig. 58) vom Gewichte G, deren Schwerpunkt S den Abstand $AS = a$ vom Ende A hat, liegt auf einem festen Punkte C auf und berührt mit A eine Vertikale h, von welcher C um die Strecke c absteht. Unter welchem Winkel ϑ ist AB in der Gleichgewichtslage gegen die Verticale h geneigt, und welche Widerstände N, N' leisten der Punkt C und die Verticale?

Es sei $A'B'$ eine neue Lage der Geraden AB, in welche sie durch eine unendlichkleine Rotation $\delta\vartheta$ um irgend einen Punkt O der Ebene (h, C) übergeführt werden kann (der Punkt O ist der Schnittpunkt der beiden in A und B auf AA', BB' zu errichtenden Normalen), sodass AA', CC', SS' die virtuellen Verschiebungen der Punkte A, C, S des Systems sind. Man kann diese Rotation in die Translation AA' und die Rotation $d\vartheta$ um den Punkt A' auflösen, sodass $[CC'] = [CC''] + [C''C']$ und $[SS'] = [SS''] + [S''S']$ wird und sodann weiter die Translation in zwei Componenten δx, δy senkrecht und parallel zur Verticalen zerlegen. Die drei unendlichkleinen Grössen δx, δy, $\delta\vartheta$ sind willkührlich und von einander unabhängig. Um die virtuelle Arbeit von G zu bilden, hat man $[SS'']$ und $[S''S']$ auf die Verticale zu projiciren. Da die Projectionen δy und $a\delta\vartheta \cos(\frac{1}{2}\pi - \vartheta) = a\delta\vartheta \sin \vartheta$ sind, so wird die virtuelle Arbeit von G

gleich $-G(\delta y - a \sin\vartheta . \delta\vartheta)$. Für die virtuelle Arbeit von N sind $[CC'']$ und $[C''C']$ auf N zu projiciren. Bildet δs mit der Verticalen den Winkel α, so ist die Projection von CC'' gleich

$$\delta s \cos(\alpha + \tfrac{1}{2}\pi - \vartheta) = \delta s . \sin(\alpha - \vartheta) = \delta x . \cos\vartheta - \delta y \sin\vartheta$$

und die von $C''C'$ gleich $C''C'$ selbst, d. i. $AC \cdot \delta\vartheta = \frac{c}{\sin\vartheta}\delta\vartheta$. Hiermit wird die Arbeit von N dargestellt durch $N\left[-\delta x . \cos\vartheta + \delta y . \sin\vartheta - \frac{c}{\sin\vartheta}\delta\vartheta\right]$. Endlich die Arbeit von N' ist $N'\delta s \sin\alpha = N'\delta x$. Die Gleichung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten ist daher

$$-G(\delta y - a \sin\vartheta . \delta\vartheta) - N\left(\delta x . \cos\vartheta - \delta y . \sin\vartheta + \frac{c}{\sin\vartheta}\delta\vartheta\right) + N' . \delta x = 0$$

oder, wenn man sie nach δx, δy, $\delta\vartheta$ ordnet:

$$-(N\cos\vartheta - N')\delta x - (G - N\sin\vartheta)\delta y + \left(Ga\sin\vartheta - \frac{Nc}{\sin\vartheta}\right)\delta\vartheta = 0.$$

Sie spaltet sich in die drei folgenden:

$$Ga\sin^2\vartheta - Nc = 0,$$
$$N\cos\vartheta - N' = 0,$$
$$G - N\sin\vartheta = 0,$$

aus denen folgt

$$\sin\vartheta = \sqrt[3]{\frac{c}{a}}, \quad N = G\sqrt[3]{\frac{a}{c}}, \quad N' = G\sqrt[3]{\frac{a}{c}}\sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

Für eine mit den Bedingungen verträgliche Verschiebung, wobei die Gerade AB mit C und h in Berührung bleibt, ist $\delta x = 0$, also ist hiefür die Arbeit der Widerstände gleich Null und ist die der Schwere allein gleich Null zu setzen, nämlich

$$G(\delta y - a\sin\vartheta . \delta\vartheta) = 0.$$

Da sich jetzt A auf der Geraden h verschiebt, so ist $AA' : A'C = \delta\vartheta : \sin\vartheta$, d. h. $\delta y = A'C \cdot \frac{\delta\vartheta}{\sin\vartheta}$ und da $A'C = AC = \frac{c}{\sin\vartheta}$, also $\delta y = \frac{c\,\delta\vartheta}{\sin^2\vartheta}$ wird, so bleibt

$$G\left(\frac{c}{\sin^2\vartheta} - a\sin\vartheta\right)\delta\vartheta = 0,$$

woraus $\sin^3\vartheta = \frac{c}{a}$ folgt, wie vorher.

Es ist $AC = c : \sin\vartheta$, also da $c = a\sin^3\vartheta$ ist, $AC = a\sin^2\vartheta$; daher $AC : AS = \sin^2\vartheta = (c : a)^{\frac{2}{3}}$, d. h. $AC^3 : AS^3 = c^2 : a^2$. Um den Punkt C der Geraden AS zu finden, mit welchem dieselbe auf die Stütze C aufgelegt werden muss, damit sie mit h den Winkel ϑ bilde, sei $AC = x$ und $\left(\frac{c}{a}\right)^2 = \mu$; man hat dann $x = a\sqrt[3]{\mu}$. Diese, im Alterthum berühmte, von Plato zuerst gelöste Aufgabe (für $\mu = 2$ das Delische Problem genannt) löst man geometrisch mit Hülfe zweier mittlerer Proportionalen. Man sucht nämlich x und y so zu bestimmen, dass $a : x = x : y = y : \mu a$ sei; dann wird $x^2 = ay$, $x^4 = a^2y^2$, $y^2 = \mu a x$, also $x^4 = \mu a^3 x$ oder $x^3 = \mu a^3$, $x = a\sqrt[3]{\mu}$. Die Gleichungen $x^2 = ay$, $y^2 = \mu a x$ stellen zwei Parabeln von den Parametern a und μa dar;

construirt man sie, sodass ihre Hauptaxen zu einander senkrecht stehen, so ist x die Abscisse ihres Schnittpunktes.

Da für alle verträglichen Verschiebungen die Arbeit der Schwere allein verschwinden muss, die Arbeit der Schwere aber gefunden wird, indem man G mit der unendlich kleinen Grösse $\pm\,\delta y_1$ multiplicirt, um welche der Schwerpunkt S als Angriffspunkt von G fällt oder steigt, so ist die Bedingung der verträglichen Verschiebungen $\pm\,G\delta y_1 = 0$ oder $\delta y_1 = 0$, d. h. bei verträglichen Verschiebungen steigt der Schwerpunkt weder, noch fällt er. Bei allen Systemen, welche ausser den Bedingungen, welche die Beweglichkeit beschränken, blos der Schwere unterworfen sind, findet dies statt.

Jedem Abstande c von der Verticalen h entspricht ein durch die Gleichung $c = a \sin^3 \vartheta$ bestimmter Winkel ϑ, unter welchem die Gerade AB in der Gleichgewichtslage sich befindet und umgekehrt. Lässt man daher ϑ variiren, so erhält man für denselben Werth a eine continuirliche Folge von Punkten C, d. h. eine Curve (C), in welchen AB aufliegen kann. Die äusserste Lage würde die sein, wofür $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, also $c = a$ wäre und die Gerade AB horizontal mit ihrem Schwerpunkte S in dem betreffenden Punkte C aufliegen würde. Es kann daher gefragt werden, welches die Curve (C) sei, auf welcher AB in allen Lagen C im Gleichgewicht sich befinde. Da jede folgende Lage auf ihr eine Gleichgewichtslage ist, so ist jede Verschiebung von AB auf der Curve eine verträgliche und sieht man ein, dass AB die Curve in den Punkten C berühren muss. Da ferner der Schwerpunkt weder steigen noch fallen kann bei einer solchen Verschiebung, er vielmehr in derselben horizontalen Geraden bleiben muss, so folgt weiter, dass er immer in der dem Winkel $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ entsprechenden Horizontalen sich befindet. Da zugleich der Punkt A auf der Verticalen läuft, so ist die Aufgabe keine andere als die: die Enveloppe einer Geraden AS von der Länge a zu finden, deren Endpunkte A und S auf zwei zu einander senkrechten Geraden sich bewegen. Es seien diese beiden Geraden, hier also h und die genannte Horizontale, die Coordinatenaxen (Fig. 59), ihr Schnittpunkt O der Ursprung und werde das, einer beliebigen Lage des Berührungspunktes C auf der Curve entsprechende $c = OP$ mit x bezeichnet. Dann hat man also $x = a \sin^3 \vartheta$ und wenn $PC = y$ gesetzt wird, so ist

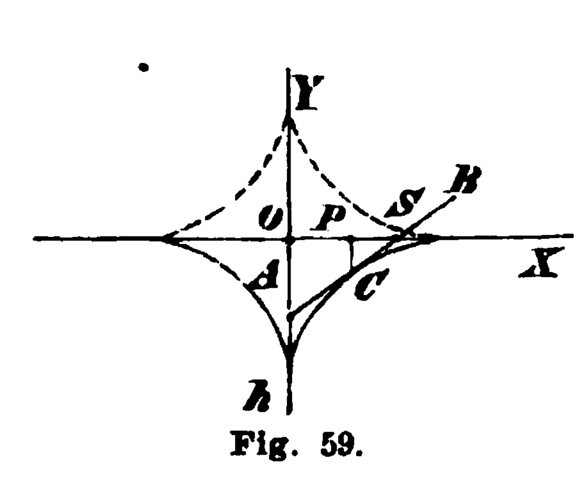


Fig. 59.

$$y = CS \,.\, \cos\vartheta = (AS - AC)\cos\vartheta = (a - a\sin^2\vartheta)\cos\vartheta = a\cos^3\vartheta.$$

Die Gleichungen

$$x = a \sin^3 \vartheta, \quad y = a \cos^3 \vartheta \quad \text{oder} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

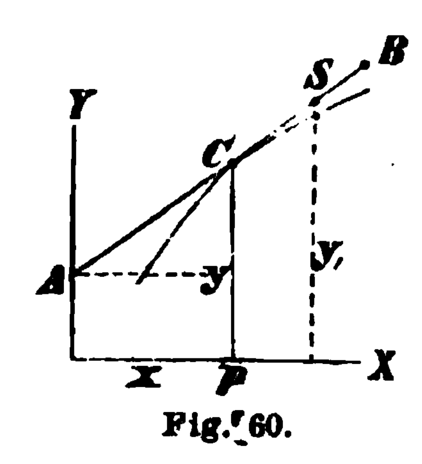


Fig. 60.

stellen eine Astroïs dar, welche die gesuchte Curve ist. Von den in den vier Quadranten liegenden Bogen der Curve genügen nur zwei der Bedingung der Aufgabe, wenn dieselbe nicht absolut zwingend, sondern nur beschränkend ist (einseitiger Widerstand N).

Für die analytische Behandlung der Frage hat man, wie leicht zu sehen (Fig. 60), $y_1 - y = \left(a - x\frac{ds}{dx}\right)\frac{dy}{ds}$, woraus durch Differentiation nach x man δy_1 und mit Hülfe von $\delta y_1 = 0$ die Differen-

tialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left[\frac{a}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}-x\right]=0$$

erhält. Vgl. Jullien, *Problèmes de mécanique rationnelle*, 2me édit. (1866), p. 187.

4. **Ein homogener, schwerer Körper vom Gewichte G (Fig. 61) berühre bei A eine gegen den Horizont unter dem Winkel α geneigte Ebene mit Reibung vom Coefficienten μ; die Verbindungslinie AS des Berührungspunktes mit dem Schwerpunkte S ist gegen die schiefe Ebene unter dem Winkel ε geneigt und fällt in die zur Schnittlinie der schiefen Ebene und des Horizontes senkrechte Ebene. Man sucht eine unter dem Winkel λ gegen die schiefe Ebene gerichtete, durch den Schwerpunkt gehende und in dieselbe Verticalebene fallende Kraft P, welche mit G, dem Widerstande N der Ebene und der Reibung μN Gleichgewicht zu halten vermag.**

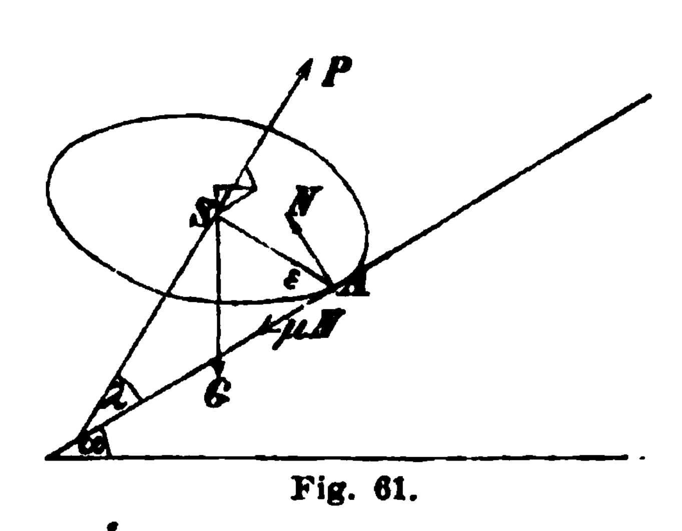


Fig. 61.

Um die drei Gleichgewichtsbedingungen dieses ebenen Kräftesystems zu finden, wenden wir drei virtuelle Bewegungen des Körpers an. Verschieben wir denselben zunächst parallel der schiefen Ebene und zwar aufwärts um die unendlich kleine Strecke δs, so sind die virtuellen Arbeiten der Kräfte P, G, N, μN für die obere Grenze des Gleichgewichts, wo die Reibung abwärts wirkt, der Reihe nach $P\delta s\cos\lambda$, $-G\delta s\sin\alpha$, 0, $-\mu N\delta s$ und besteht die Bedingung:

$$(P\cos\lambda - G\sin\alpha - \mu N)\,\delta s = 0.$$

Eine Verschiebung senkrecht zur schiefen Ebene veranlasst die virtuellen Arbeiten $P\delta s\sin\lambda$, $-G\delta s\cos\alpha$, $N\delta s$; eine virtuelle Rotation um A um den unendlich kleinen Winkel $\delta\omega$ endlich gibt die Arbeiten $P\,.\,AS\,.\,\sin(\varepsilon+\lambda)\,\delta\omega$, $-G\,.\,AS\,.\,\cos(\varepsilon-\alpha)\,\delta\omega$, 0, 0. Hierdurch erhalten wir die zwei weiteren Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes:

$$P\sin\lambda - G\cos\alpha + N = 0,$$
$$P\sin(\varepsilon+\lambda) - G\cos(\varepsilon-\alpha) = 0.$$

Aus der ersten von ihnen entnehmen wir N und erhalten, indem wir seinen Werth in die zuerst aufgestellte Gleichgewichtsbedingung einführen:

$$P=\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\lambda+\mu\sin\lambda}\cdot G,$$

oder für $\operatorname{tg}\varrho=\mu$

$$P=\frac{\sin(\alpha+\varrho)}{\cos(\lambda-\varrho)}\cdot G.$$

Für die untere Grenze des Gleichgewichts wechseln μ und ϱ das Zeichen und wird

$$P=\frac{\sin(\alpha-\varrho)}{\cos(\lambda+\varrho)}\cdot G.$$

Die zweite der Gleichungen liefert den Winkel ε mit Hülfe der Formel

$$\operatorname{tg}\varepsilon=\frac{-P\sin\lambda+G\cos\alpha}{P\cos\lambda-G\sin\alpha}.$$

5. Eine vertical stehende Schraubenspindel von rechteckigem Querschnitt kann in der zugehörigen festen Schraubenmutter mit Reibung vom Coefficienten μ gleiten. Am Kopfe der Spindel wirkt in einer Horizontalebene ein Kräftepaar vom Momente M, am unteren Ende ein Gewicht, welches mit dem Gewichte der Spindel zusammen Q beträgt. Man soll für den Fall des Gleichgewichtes die Grenzwerthe von M und den Druck auf die Schraubenmutter bestimmen.

Der Cylinder, auf welchem das Schraubengewinde aufsitzt, habe den Radius R, die Dicke des Gewindes sei δ, der Druck an einer beliebigen Stelle der Schraubenmutter auf die Flächeneinheit reducirt, d. h. die Resultante der Drucke auf alle Punkte eines Quadratmeters, wenn derselbe überall gleich dem Drucke an jener Stelle ist, sei N.

Zunächst ertheilen wir dem System eine virtuelle Schraubenbewegung um seine Axe, wie sie mit seiner Natur verträglich ist und zwar so, dass die Spindel um die unendlich kleine Höhe δh (Fig. 62) steigt und um den Winkel $\delta\vartheta$ rotirt. Die Angriffspunkte der Seitenkräfte P des Paares, dessen Arm p sei, beschreiben Schraubenelemente um die Schraubenaxe a, deren Projectionen auf die Richtung der Kräfte $r\delta\vartheta \sin\alpha$, $r'\delta\vartheta \sin\alpha'$ sind, wenn r, r' die Abstände jener Angriffspunkte von der Axe und α, α' die Winkel sind, welche dieselben mit der Richtung der Kräfte bilden. Die virtuelle Arbeit beider Seitenkräfte ist also

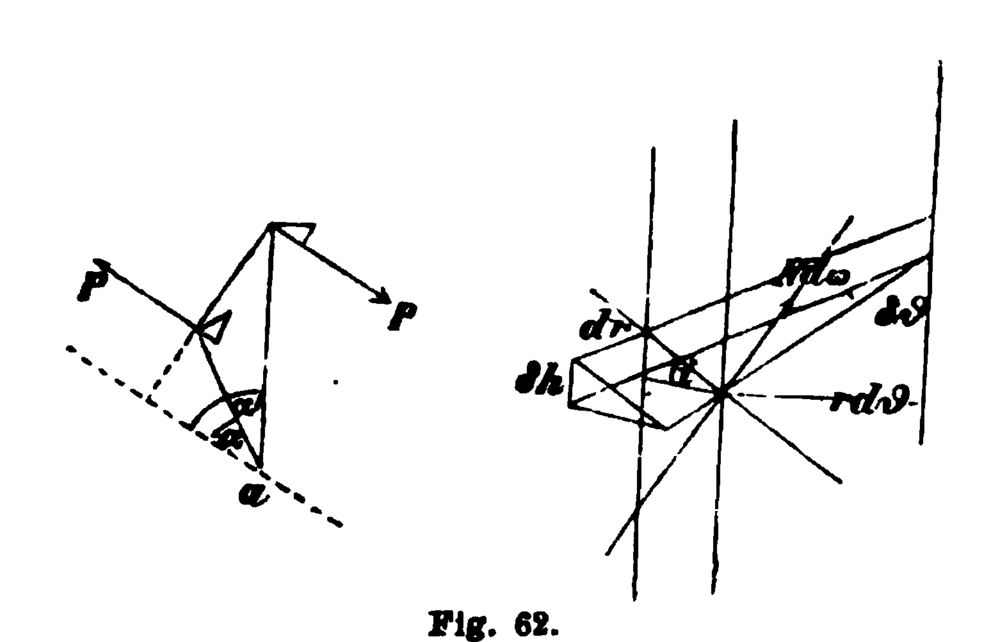


Fig. 62.

$$Pr' \sin\alpha' \delta\vartheta - Pr \sin\alpha\delta\vartheta = Pp\delta\vartheta = M\delta\vartheta,$$

da $r' \sin\alpha' - r \sin\alpha = p$ ist. Die virtuelle Arbeit von Q ist $-Q\delta h$, die Widerstände $Nd\omega$, welche die Schraubenmutter in ihren einzelnen Flächenelementen $d\omega$ leistet, liefern keine Arbeiten, da sie senkrecht zu den Schraubenelementen δs sind, welche ihre Angriffspunkte beschreiben, die Reibungen $\mu N d\omega$ leisten Arbeiten $-\mu N d\omega\delta s$ und ihre Summe ist $-\mu\int N d\omega \delta s$ über die ganze Fläche der Schraubenmutter ausgedehnt, auf welcher die Spindel ruht. Man erhält demnach an der einen Grenze des Gleichgewichts, wo die Reibung abwärts wirkt, die Gleichung:

$$M\delta\vartheta - Q\delta h - \mu\int N d\omega\delta s = 0.$$

Die Umkehrung des Zeichens von μ gibt die der anderen Grenze entsprechende Gleichung.

Das Verhältniss $\frac{\delta h}{\delta\vartheta}$ ist constant und gleich $\frac{h}{2\pi}$, wenn h die Höhe des Schraubenganges bedeutet. Ist r der Abstand des Schraubenelementes δs von der Axe, so stellt $\frac{\delta s}{r\delta\vartheta}$ die Sekante der Neigung i von δs gegen seine Horizontalprojection dar, mithin ist $\frac{\delta s}{\delta\vartheta} = \frac{r}{\cos i}$. Das Flächenelement $d\omega$ ist, wenn φ den

Polarwinkel bezeichnet, $\frac{r d\varphi \cdot dr}{\cos i}$, nämlich gleich seiner Projection $r d\varphi \cdot dr$ auf die Cylinderbasis, dividirt durch den Cosinus seiner Neigung gegen seine Projection. Diese Neigung ist aber gleich der Neigung der Normalen gegen die Cylinderaxe. Da die Schraubenfläche durch die Bewegung einer zur Cylinderaxe senkrechten Geraden erzeugt wird, so steht diese Normale auf ihr senkrecht und fällt mithin in die Tangentenebene des Cylinders und in dieser Ebene ist sie senkrecht zum Bogenelemente δs. Sie bildet daher mit der Cylinderaxe den Winkel i. Hiermit wird das den Einfluss der Reibung darstellende Integral

$$-\mu \int N d\omega \delta s = -2\mu \varkappa \pi \delta \vartheta \int_R^{R+\delta} \frac{N r^2 dr}{\cos^2 i},$$

wo $\varkappa$ die Anzahl der Schraubenwindungen angibt und der Factor $2\varkappa\pi$ von der Integration nach φ herrührt. N und i sind Functionen von r, aber N ist unbekannt, während i mit Hülfe von $\operatorname{tg} i = \frac{h}{2\pi r}$ eliminirt werden kann. Hierdurch wird die Gleichgewichtsbedingung

$$M - \frac{Qh}{2\pi} - 2\pi\mu\varkappa \int_R^{R+\delta} N \left[r^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \right] dr = 0.$$

Ertheilen wir dem System blos eine virtuelle Rotation $\delta\vartheta$ um die Axe der Schraube, so werden die Arbeiten der Kräfte P und $-P$, des Widerstands $N d\omega$ und der Reibung $\mu N d\omega$ die Werthe annehmen

$$M\delta\vartheta, \quad -N d\omega r \delta\vartheta \sin i, \quad -\mu N d\omega r \delta\vartheta \cos i$$

und erhalten wir wegen

$$d\omega (\sin i + \mu \cos i) = d\omega . \cos i (\operatorname{tg} i + \mu) = r dr d\varphi \left(\mu + \frac{h}{2\pi r}\right) = \frac{d\varphi}{2\pi} (2\pi\mu r + h)\, dr$$

$$M - \varkappa \int_R^{R+\delta} N r (2\pi\mu r + h)\, dr = 0.$$

Ertheilen wir dem System blos eine virtuelle Translation δh parallel der Schraubenaxe, so ergibt sich, da die Arbeiten von Q, $N d\omega$, $\mu N d\omega$ gleich $-Q\delta h$, $N d\omega \delta h \cos i$, $-\mu N d\omega \delta h \sin i$ sind, in ähnlicher Weise die Gleichung

$$-Q + \varkappa \int_R^{R+\delta} N (2\pi r - \mu h)\, dr = 0.$$

In den beiden zuletzt entwickelten Relationen sind $\delta\vartheta$ und δh von einander unabhängig und sind die virtuellen Lagenänderungen des Systems unverträgliche; setzt man zwischen ihnen wieder die Relation fest $\delta h : \delta\vartheta = h : 2\pi$, multiplicirt die erste Relation mit $\delta\vartheta$, die zweite mit δh und addirt sie, so liefern sie die oben aufgestellte erste Gleichgewichtsbedingung wieder, indem die von μ unabhängigen Elemente der Integrale sich tilgen, während die mit dem Factor μ behafteten in $-\mu N d\omega \delta s$ zusammengehen.

Um den einem mittleren Abstande r_0 entsprechenden mittleren Werth N_0 des Widerstands zu finden, hat man nach einem bekannten Satze der Integralrechnung

$$\int_R^{R+\delta} N(2\pi r - \mu h)\, dr = \delta N_0 (2\pi r_0 - \mu h)$$

und folglich

$$-Q + \varkappa \delta N_0 (2\pi r_0 - \mu h) = 0,$$

woraus N_0 für eine bestimmte Annahme von r_0 zwischen R und $R+\delta$ näherungsweise folgt.

Ist die Reibung $\mu = 0$, so wird $M = \frac{Qh}{2\pi}$.

6. Ein homogener Cylinder von der Länge l, dem Radius r und dem Gewichte G liegt mit einem Punkte seines Basiskreises auf einer horizontalen Ebene auf, zugleich aber ruht er auf einem anderen Cylinder vom Radius a, welcher auf derselben Horizontalebene liegt. An den Auflagerpunkten findet Reibung (μ, μ') statt; welches sind die äussersten Gleichgewichtslagen, wenn die Axen beider Cylinder sich rechtwinklig kreuzen?

7. Zwei glatte Ebenen, welche sich rechtwinklig in einer horizontalen Geraden schneiden und von denen die eine mit dem Horizonte einen Winkel α bildet, bilden eine Rinne, in welcher ein schwerer, homogener, gerader Cylinder mit elliptischem Querschnitt von den Halbaxen a, b so ruht, dass die Längenaxe desselben der horizontalen Schnittlinie parallel läuft. Es sind die Gleichgewichtslagen des Cylinders und die Widerstände der Ebenen zu finden.

8. Ein Punkt wird von zwei Centris nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung angezogen. Auf welcher Fläche muss derselbe sich befinden, wenn er in allen Lagen auf ihr im Gleichgewichte sein soll?

§. 7. Um den analytischen Ausdruck des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten zunächst für das freie unveränderliche System zu gewinnen, seien X, Y, Z die Componenten der Kraft P, parallel dreien rechtwinkligen Coordinatenaxen, δs der virtuelle Elementarweg ihres Angriffspunktes (x, y, z), δp aber die Projection von δs auf die Richtung von P und folglich $P\delta p$ die virtuelle Arbeit der Kraft P. Nun seien δx, δy, δz die Projectionen von δs auf die Axenrichtungen und bilde P mit den Axen die Winkel α, β, γ. Man hat dann

$$\delta p = \delta x \cos\alpha + \delta y \cos\beta + \delta z \cos\gamma$$

und folglich

$$P\delta p = P\cos\alpha \cdot \delta x + P\cos\beta \cdot \delta y + P\cos\gamma \,.\, \delta z.$$

Es ist aber $P\cos\alpha = X$, $P\cos\beta = Y$, $P\cos\gamma = Z$ und mithin

$$P\delta p = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

Hierin stellen $X\delta x$, $Y\delta y$, $Z\delta z$ die virtuellen Arbeiten der Componenten X, Y, Z von P dar, sodass die virtuelle Arbeit von P durch die Summe der virtuellen Arbeiten seiner Componenten gebildet wird. (Vgl. B. I, S. 328.) Hierdurch geht die Gleichung $\Sigma P\delta p = 0$ über in

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0.$$

Das Variationszeichen δ ist hierbei nichts Wesentliches, es deutet nur an, dass die Verschiebungen virtuell sind und nicht mit den Elementarwegen der wirklich stattfindenden Bewegung zusammenzufallen brauchen, wenngleich dies nicht ausgeschlossen ist.

Aus der eben entwickelten Gleichung erhalten wir mit Leichtigkeit die sechs Gleichgewichtsbedingungen des freien unveränderlichen Systems wieder. Legen wir nämlich dem System zunächst eine virtuelle Translation δx parallel der x-Axe bei, so sind alle $\delta y = \delta z = 0$, δx fällt als ein gemeinschaftlicher Factor aller Glieder aus der Gleichung heraus und wir erhalten die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma X = 0$. Indem wir dem System zwei andere Translationen δy, δz in den Richtungen der y- und z-Axen ertheilen, ergeben sich die beiden analogen Bedingungen $\Sigma Y = 0$ und $\Sigma Z = 0$. Ertheilen wir ferner dem System eine unendlich kleine Rotation $\delta\vartheta$ um die x-Axe, so beschreibt der Angriffspunkt x, y, z der Kraft P eine unendlich kleine Linie δs, deren Projectionen auf die Axen $\delta x = 0$, $\delta y = \delta s \cdot \cos(\delta s, Y)$, $\delta z = \delta s \cdot \cos(\delta s, Z)$ sind. Da die Richtung von δs aber auf dem Abstande r des Punktes von der x-Axe senkrecht steht, so bildet sie mit den Axen der y und z Winkel, deren Cosinusse $-\frac{z}{r}$ und $\frac{y}{r}$ sind, sodass $\delta y = -\frac{z}{r}\delta s$, $\delta z = \frac{y}{r}\delta s$ werden, welche Ausdrücke vermöge $\delta s = r\delta\vartheta$ in $\delta y = -z\delta\vartheta$ und $\delta z = y\delta\vartheta$ übergehen. Hiermit reducirt sich $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$ auf $\Sigma(-Yz + yZ)\delta\vartheta$ und da $\delta\vartheta$ als gemeinsamer Factor heraustritt, so ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma(yZ - zY) = 0$. Indem man dem System in ähnlicher Weise unendlich kleine Rotationen $d\vartheta'$, $d\vartheta''$ um die y- und z-Axe ertheilt, erhält man die weiteren analog gebildeten Gleichungen

$$\Sigma(zX - xZ) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Man erhält die sechs Gleichgewichtsbedingungen des unveränderlichen Systems auf einmal aus der Gleichung $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$, indem man dem System irgend eine unendlich kleine Schraubenbewegung ertheilt. Hierbei beschreibt der Systempunkt (x, y, z) das Element δs einer Schraubenlinie, um dessen Projectionen δx, δy, δz auf die Richtungen der Axen es sich handelt. Zerlegt man nun die Schraubenbewegung in eine Rotation um die Schraubenaxe und eine Translation parallel derselben und weiter die Rotation in drei Rotationen $\delta\vartheta$, $\delta\vartheta'$, $\delta\vartheta''$ um drei Axen, parallel denen der x, y, z, und die Translation in drei Translationen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ gleichfalls parallel denselben, so erscheint δs als die Schlusslinie des aus $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, $r\delta\vartheta$, $r'\delta\vartheta'$, $r''\delta\vartheta''$ gebildeten Polygons, wobei r, r', r'' die Ab-

stände des Systempunktes von den Rotationsaxen bedeuten und ist mithin die Projection von δs auf jede dieser Axen gleich der betreffenden Projection dieses Polygons auf dieselbe. Auf dem hier angedeuteten Wege findet man daher:

$$\begin{aligned}
\delta x &= \delta\xi + z\delta\vartheta' - y\delta\vartheta'' \\
\delta y &= \delta\eta + x\delta\vartheta'' - z\delta\vartheta \\
\delta z &= \delta\zeta + y\delta\vartheta - x\delta\vartheta'
\end{aligned}$$

und hiermit die Gleichung

$$\begin{aligned}
\Sigma \{ & X(\delta\xi + z\delta\vartheta' - y\delta\vartheta'') \\
&+ Y(\delta\eta + x\delta\vartheta'' - z\delta\vartheta) \\
&+ Z(\delta\zeta + y\delta\vartheta - x\delta\vartheta')\} = 0,
\end{aligned}$$

oder besser geordnet und mit Rücksicht darauf, dass $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, $\delta\vartheta$, $\delta\vartheta'$, $\delta\vartheta''$ sich als gemeinsame Factoren absondern lassen:

$$\begin{aligned}
&\Sigma X\cdot\delta\xi + \Sigma Y\cdot\delta\eta + \Sigma Z\cdot\delta\zeta \\
&+ \Sigma(yZ - zY)\cdot\delta\vartheta + \Sigma(zX - xZ)\cdot\delta\vartheta' + \Sigma(xY - yX)\cdot\delta\vartheta'' = 0.
\end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit der Wahl der sechs Verschiebungscomponenten zerfällt diese Gleichung in die früheren sechs Gleichungen.

Aus diesen Entwickelungen geht zugleich hervor, dass es ausser den angeführten sechs Gleichgewichtsbedingungen für das unveränderliche System keine weiteren gibt; denn ein solches System kann nur Elementarschraubenbewegungen und deren Abarten besitzen und jede solche Schraubenbewegung führt auf keine andere Gleichung, als die genannten. Für das unveränderliche System sind sie folglich zum Gleichgewichte nothwendig, aber auch hinreichend; für ein beliebiges System sind sie zwar nothwendig, aber nicht hinreichend, vielmehr müssen zur vollständigen Bestimmung des Gleichgewichts noch weitere Bedingungen hinzutreten, die man finden kann, indem man dem System andere Verschiebungen, als die bisherigen ertheilt. Wie viele und welche derartige Bedingungen noch aufzustellen sind, hängt von der speciellen Natur des betreffenden Systems ab.

§. 8. Ist das unveränderliche System Bedingungen unterworfen, welche seine Beweglichkeit beschränken, so können dieselben in vielen Fällen durch Gleichungen zwischen den Coordinaten derjenigen Punkte dargestellt werden, deren Beweglichkeit beschränkt wird. Soll z. B. der Punkt x_i, y_i, z_i auf einer Fläche unbedingt zu bleiben genöthigt sein, so müssen seine Coordinaten der Gleichung dieser Fläche genügen, soll er auf einer Curve bleiben, so haben sie die beiden Gleichungen dieser Curve zu erfüllen. Auch können in solchen Bedingungsgleichungen die Coordinaten mehrerer Punkte vorkommen, wie z. B. wenn die Verbindungslinie zweier oder die Ebene dreier Systempunkte bestimmte Eigenschaften ihrer Lage gegen feste Punkte behalten soll. Sind die in ihrer Bewegung beschränkten

Punkte nicht unbedingt beschränkt, sondern wirken die beschränkenden Hindernisse nur einseitig, so können an die Stelle von Bedingungsgleichungen Ungleichungen treten. Soll z. B. ein Punkt (x_i, y_i, z_i) nicht ins Innere der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ eindringen, wohl aber von der Fläche hinweggenommen werden können, so muss $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - a^2 \geq 0$ sein. Nach dem früher Entwickelten ist in solchen Fällen $\Sigma P\delta p \leqq 0$. Wir schliessen dieselben aus unsrer Betrachtung aus.

Wenn das System aus n Punkten (xyz), $(x_1 y_1 z_1) \cdots (x_i y_i z_i) \cdots (x_n y_n z_n)$ besteht, so muss die Anzahl $\varkappa$ der beschränkenden Bedingungen kleiner als $3\,n$ sein, wenn überhaupt noch Beweglichkeit des Systems möglich sein soll. Denn im Falle $\varkappa = 3n$ würden aus den $\varkappa$ Bedingungsgleichungen für die $3n$ Coordinaten der Punkte feste Werthe folgen, was die Beweglichkeit des Systems aufheben würde. Für $\varkappa = 3n - 1$ ist jeder Punkt auf einer bestimmten Curve zu bleiben genöthigt, denn indem man aus den $3n - 1$ Gleichungen die $3n - 3$ Coordinaten von $n - 1$ beliebigen Systempunkten eliminirt, verbleiben noch zwei Gleichungen, denen die Coordinaten des noch übrigen Punktes genügen müssen; diese zwei Gleichungen sind aber die Gleichungen einer bestimmten Curve, auf welcher er allein beweglich ist. Dasselbe gilt für alle Punkte. Uebrigens kann in diesem Falle jeder Punkt eine virtuelle Verschiebung im einen und im anderen Sinne der Tangente erleiden. In den Fällen $\varkappa = 3n - 2$, $3n - 3, \ldots$ ist weit grösserer Spielraum für die virtuellen Verschiebungen vorhanden.

Es seien nun $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$ die $\varkappa$ Bedingungsgleichungen, welche die Beweglichkeit des Systems beschränken. Ertheilen wir demselben eine mit ihnen verträgliche virtuelle Bewegung, so besteht zunächst die Hauptgleichung:

$$\Sigma\,(X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0,$$

worin der besseren Ordnung der weiter hinzutretenden Gleichungen wegen der allgemeine Index i angefügt ist. Vermöge der Verträglichkeit dieser Bewegung müssen aber sowohl die Punkte in der Lage (x_i, y_i, z_i), als auch in der Lage $(x_i + \delta x_i,\; y_i + \delta y_i,\; z_i + \delta z_i)$ den Bedingungsgleichungen genügen; daher bestehen zugleich auch noch die $\varkappa$ linearen Differentialgleichungen:

$$\Sigma\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial L}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial L}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0,$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial M}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial M}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial M}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0,$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial N}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial N}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial N}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Alle $\varkappa + 1$ Gleichungen zusammen enthalten $3n$ Aenderungen δx_i, δy_i, δz_i der Coordinaten und wenn man mit Hülfe der $\varkappa$ Differentialgleichungen aus der Hauptgleichung $\varkappa$ dieser Grössen eliminirt, so verbleiben noch $3n - \varkappa$ Aenderungen in ihr, welche vollkommen unabhängig von einander sind. Soll diese Gleichung mithin für jedes System dieser Variationen bestehen können, so müssen die Coefficienten derselben einzeln verschwinden und es zerfällt hierdurch die Gleichung in $3n - \varkappa$ Gleichungen, welche die Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte des Systems sind. Diese Elimination wird sehr leicht mit Hülfe der Euler-Lagrange'schen Methode der Multiplicatoren ausgeführt. Multiplicirt man nämlich die Differentialgleichungen der Reihe nach mit den unbestimmten Factoren λ, μ, $\nu, \ldots$, addirt sie alle zu der Hauptgleichung, wodurch man erhält:

$$\begin{aligned}\Sigma\Big\{&\left(X_i + \lambda\frac{\partial L}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial M}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial N}{\partial x_i} + \cdots\right)\delta x_i \\ &+ \left(Y_i + \lambda\frac{\partial L}{\partial y_i} + \mu\frac{\partial M}{\partial y_i} + \nu\frac{\partial N}{\partial y_i} + \cdots\right)\delta y_i \\ &+ \left(Z_i + \lambda\frac{\partial L}{\partial z_i} + \mu\frac{\partial M}{\partial z_i} + \nu\frac{\partial N}{\partial z_i} + \cdots\right)\delta z_i\Big\} = 0,\end{aligned}$$

so werden hieraus $\varkappa$ Variationen eliminirt, indem man die $\varkappa$ Grössen λ, μ, $\nu, \ldots$ so bestimmt, dass die Coefficienten dieser Variationen Null werden. Da hierauf die Coefficienten der noch übrigen von einander unabhängigen $3n - \varkappa$ Variationen gleichfalls verschwinden müssen, so hat man überhaupt alle Coefficienten gleich Null zu setzen und erhält im Ganzen das System der $3n$ Gleichungen

$$\begin{aligned}&X_i + \lambda\frac{\partial L}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial M}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial N}{\partial x_i} + \cdots = 0, \\ &Y_i + \lambda\frac{\partial L}{\partial y_i} + \mu\frac{\partial M}{\partial y_i} + \nu\frac{\partial N}{\partial y_i} + \cdots = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots n, \\ &Z_i + \lambda\frac{\partial L}{\partial z_i} + \mu\frac{\partial M}{\partial z_i} + \nu\frac{\partial N}{\partial z_i} + \cdots = 0,\end{aligned}$$

von denen $\varkappa$ zur Bestimmung der Multiplicatoren dienen, während die $3n - \varkappa$ übrigen die Gleichgewichtsbedingungen aussprechen.

Umgekehrt folgt aus diesen Gleichungen das Gleichgewicht des Systems; denn sind δx_i, δy_i, δz_i Variationen, welche den Differentialgleichungen der Nebenbedingungen genügen und multiplicirt man mit ihnen die vorstehenden Gleichungen der Ordnung nach, addirt und summirt sie für alle Indices i, so ergibt sich mit Rücksicht auf jene Differentialgleichungen

$$\Sigma\left(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i\right) = 0,$$

welche Gleichung das Gleichgewicht ausdrückt.

Es ist leicht, die Bedeutung der Multiplicatoren λ, μ, ν, ... zu erkennen. Die Gleichungen $X_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial x_i} + \cdots = 0$ u. s. w. würden nämlich ebenso erhalten, wenn die Bedingungen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, ... gar nicht vorhanden wären, statt ihrer aber zu der Kraft $(X_i Y_i Z_i)$ im Punkte $(x_i y_i z_i)$ noch hinzutreten würden: 1. eine Kraft, deren Componenten $\lambda \frac{\partial L}{\partial x_i}$, $\lambda \frac{\partial L}{\partial y_i}$, $\lambda \frac{\partial L}{\partial z_i}$ wären, deren Intensität also den Werth

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z_i}\right)^2}$$

besässe und deren Richtungscosinusse folglich den Grössen $\frac{\partial L}{\partial x_i}$, $\frac{\partial L}{\partial y_i}$, $\frac{\partial L}{\partial z_i}$ proportional wären. Denkt man in der Bedingung $L = 0$ blos die Coordinaten x_i, y_i, z_i veränderlich, so stellt diese Gleichung eine Fläche dar, auf welcher der Punkt $(x_i y_i z_i)$ bleiben muss, weil seine Coordinaten ihrer Gleichung genügen sollen; zu dieser Fläche normal ist die fragliche Kraft. Ebenso 2. eine Kraft, deren Componenten $\mu \frac{\partial M}{\partial x_i}$, $\mu \frac{\partial M}{\partial y_i}$, $\mu \frac{\partial M}{\partial z_i}$, welche also selbst $\mu \sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial z_i}\right)^2}$ und normal zu der Fläche wäre, deren Gleichung $M = 0$ ist für x_i, y_i, z_i als laufende allein veränderliche Coordinaten; 3. eine Kraft $\nu \sqrt{\left(\frac{\partial N}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial y_i}\right)^2}$ u. s. w. In ähnlicher Weise in allen Punkten, welche den Bedingungen unterworfen sind. Die Grössen, welche also in den obigen Gleichungen zu X_i, Y_i, Z_i addirt sind, stellen die Componenten einer Gesammtkraft dar, welche den Einfluss der sämmtlichen Bedingungen auf den Punkt x_i, y_i, z_i zu vertreten im Stande ist. Zugleich erkennt man hieraus die Uebereinstimmung der §. 4 eingeführten Forderung, dass die Bedingungen durch Kräfte darstellbar seien, mit dem Ausdruck derselben durch Gleichungen zwischen Coordinaten.

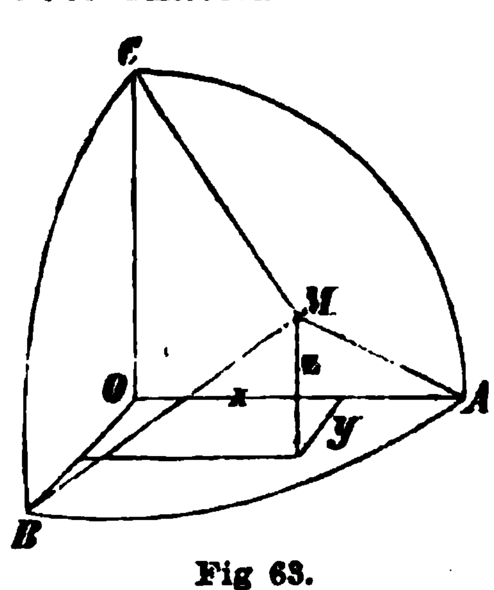


Fig 63.

§. 9. Beispiele.

1. Auf einer Kugelfläche (Fig. 63) vom Radius a befindet sich ein Punkt M, wecher von den drei Ecken A, B, C eines Kugeloctanten proportional der ersten Potenz der Entfernung angezogen wird und zwar sind ε, ε', ε'' die Intensitäten der Anziehungskräfte in der Einheit der Entfernung; welches sind die Gleichgewichtslagen derselben?

Für den Mittelpunkt O der Kugel als Ursprung und

OA, OB, OC als Axen des Coordinatensystems sind die Richtungscosinusse der drei Kräfte $\varepsilon \cdot AM$, $\varepsilon' \cdot BM$, $\varepsilon'' \cdot CM$:

$$-\frac{x-a}{AM}, \quad -\frac{y}{AM}, \quad -\frac{z}{AM};$$

$$-\frac{x}{BM}, \quad -\frac{y-a}{BM}, \quad -\frac{z}{BM};$$

$$-\frac{x}{CM}, \quad -\frac{y}{CM}, \quad -\frac{z-a}{CM}.$$

Hiermit werden die Componenten X, Y, Z der auf den Punkt M wirkenden Gesammtkraft

$$X = -\varepsilon(x-a) - \varepsilon' x - \varepsilon'' x = \varepsilon a - x\Sigma\varepsilon,$$
$$Y = -\varepsilon y - \varepsilon'(y-a) - \varepsilon'' y = \varepsilon' a - y\Sigma\varepsilon,$$
$$Z = -\varepsilon z - \varepsilon' z - \varepsilon''(z-a) = \varepsilon'' a - z\Sigma\varepsilon$$

und folglich die Hauptgleichung $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$:

$$(\varepsilon a - x\Sigma\varepsilon)\,\delta x + (\varepsilon' a - y\Sigma\varepsilon)\,\delta y + (\varepsilon'' a - z\Sigma\varepsilon)\,\delta z = 0.$$

Hierzu tritt vermöge der einzigen Nebenbedingung $L = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$

$$x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0.$$

Diese Gleichung, mit λ multiplicirt und zur Hauptgleichung addirt, liefert:

$$(\varepsilon a + [\lambda - \Sigma\varepsilon]\,x)\,\delta x + (\varepsilon' a + [\lambda - \Sigma\varepsilon]\,y)\,\delta y + (\varepsilon'' a + [\lambda - \Sigma\varepsilon]\,z)\,\delta z = 0,$$

welche Gleichung in

$$\varepsilon a + (\lambda - \Sigma\varepsilon)\,x = 0, \quad \varepsilon' a + (\lambda - \Sigma\varepsilon)\,y = 0, \quad \varepsilon'' a + (\lambda - \Sigma\varepsilon) = 0$$

zerfällt. Hieraus folgt:

$$x = -\frac{\varepsilon a}{\lambda - \Sigma\varepsilon}, \quad y = -\frac{\varepsilon' a}{\lambda - \Sigma\varepsilon}, \quad z = -\frac{\varepsilon'' a}{\lambda - \Sigma\varepsilon},$$

wodurch man in Verbindung mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ der Kugelfläche findet

$$\lambda = \Sigma\varepsilon \pm \sqrt{\Sigma(\varepsilon^2)}, \quad x = \pm\frac{\varepsilon a}{\sqrt{\Sigma(\varepsilon^2)}}, \quad y = \pm\frac{\varepsilon' a}{\sqrt{\Sigma(\varepsilon^2)}}, \quad z = \pm\frac{\varepsilon'' a}{\sqrt{\Sigma(\varepsilon^2)}}.$$

Der Punkt M hat demnach zwei Gleichgewichtslagen, welche die Schnittpunkte der Kugel mit der Geraden $\frac{x}{\varepsilon} = \frac{y}{\varepsilon'} = \frac{z}{\varepsilon''}$, d. h. mit der Diagonale des Parallelepipeds sind, welches von O aus mit Kanten, proportional ε, ε', ε'' längs den positiven Coordinatenaxen construirt werden kann. Die Grössen λx, λy, λz sind die Componenten des Widerstandes der Kugelfläche. Er selbst ist folglich

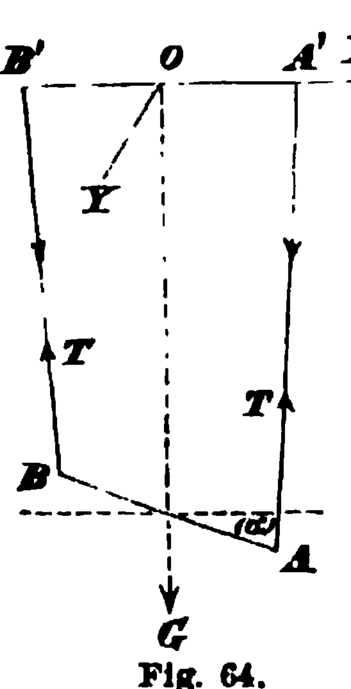


Fig. 64.

$$\lambda a = [\Sigma\varepsilon \pm \sqrt{\Sigma(\varepsilon^2)}]\,a$$

und nach dem Aussenraume gerichtet.

2. Eine homogene schwere starre Gerade (Fig. 64) vom Gewichte G und der Länge $2a$ ist an beiden Enden A, B mittelst zweier gleichlanger Fäden l an zwei gleich hohen, festen Punkten A', B' aufgehangen, deren Abstand $A'B'$ gleichfalls $2a$ ist. An A, B wirken horizontal zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte P; man soll die Bedingungen des Gleichgewichts der Kräfte an diesem System aufstellen und discutiren.

Für die Mitte O von $A'B'$ als Ursprung, OA' und die Verticale von O als Axen der x und z (positiv abwärts) seien x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 die Coordinaten von A und B, also $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ die der Mitte von AB. Ferner seien X, Y, 0; $-X$, $-Y$, 0 die Componenten der Kräfte P an A und B. Da A und B auf Kugelflächen vom Radius l um A' und B' beweglich sind und ihr Abstand constant gleich $2a$ ist, so bestehen die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&(x_1 - a)^2 + y_1^2 + z_1^2 - l^2 = 0,\\
&(x_2 + a)^2 + y_2^2 + z_2^2 - l^2 = 0,\\
&(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - 4a^2 = 0,\\
&X\delta x_1 + Y\delta y_1 - X\delta x_2 - Y\delta y_2 + \tfrac{1}{2}G(\delta z_1 + \delta z_2) = 0,\\
&(x_1 - a)\,\delta x_1 + y_1\delta y_1 + z_1\delta z_1 = 0,\\
&(x_2 + a)\,\delta x_2 + y_2\delta y_2 + z_2\delta z_2 = 0,\\
&(x_1 - x_2)(\delta x_1 - \delta x_2) + (y_1 - y_2)(\delta y_1 - \delta y_2) + (z_1 - z_2)(\delta z_1 - \delta z_2) = 0.
\end{aligned}
$$

Mit Hülfe der Multiplicatoren λ, μ, ν ergeben sich hieraus die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
X + \lambda(x_1 - a) + \nu(x_1 - x_2) &= 0,\\
Y + \lambda y_1 + \nu(y_1 - y_2) &= 0,\\
\tfrac{1}{2}G + \lambda z_1 + \nu(z_1 - z_2) &= 0,\\
-X + \mu(x_2 + a) - \nu(x_1 - x_2) &= 0,\\
-Y + \mu y_2 - \nu(y_1 - y_2) &= 0,\\
\tfrac{1}{2}G + \mu z_2 - \nu(z_1 - z_2) &= 0.
\end{aligned}
$$

Indem wir die Richtungscosinusse $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; α, β, γ der Fäden $A'A$, $B'B$ und der Strecke BA mit Hülfe der Relationen

$$
\begin{aligned}
x_1 - a &= l\alpha_1, & x_2 + a &= l\alpha_2, & x_1 - x_2 &= 2a\alpha = l(\alpha_1 - \alpha_2) + 2a,\\
y_1 &= l\beta_1, & y_2 &= l\beta_2, & y_1 = y_2 &= 2a\beta = l(\beta_1 - \beta_2),\\
z_1 &= l\gamma_1, & z_2 &= l\gamma_2, & z_1 = z_2 &= 2a\gamma = l(\gamma_1 - \gamma_2)
\end{aligned}
$$

einführen und die Bedingung der Rechtwinkligkeit von AB und P, nämlich $X\alpha + Y\beta = 0$ hinzufügen, welche sich mit Hülfe eines weiteren Multiplicators σ in $X:\beta = -Y:\alpha = \sigma$ oder $X = \beta\sigma$, $Y = -\alpha\sigma$ spaltet, wofür $(\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2 = P^2$ aus $X^2 + Y^2 = P^2$ folgt, nehmen sie die Gestalt an:

$$
\begin{aligned}
\beta\sigma + \lambda l\alpha_1 + 2\nu a\alpha &= 0,\\
-\alpha\sigma + \lambda l\beta_1 + 2\nu a\beta &= 0,\\
\tfrac{1}{2}G + \lambda l\gamma_1 + 2\nu a\gamma &= 0,\\
-\beta\sigma + \mu l\alpha_2 - 2\nu a\alpha &= 0,\\
\alpha\sigma + \mu l\beta_2 - 2\nu a\beta &= 0,\\
\tfrac{1}{2}G + \mu l\gamma_2 - 2\nu a\gamma &= 0,\\
\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1,\\
\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1,\\
\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1,\\
l(\alpha_1 - \alpha_2) &= 2a(\alpha - 1),\\
l(\beta_1 - \beta_2) &= 2a\beta,\\
l(\gamma_1 - \gamma_2) &= 2a\gamma,\\
(\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2 &= P^2.
\end{aligned}
$$

Aus diesen 13 Gleichungen sind $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; α, β, γ; λ, μ, ν; σ zu finden.

Unter den Gleichgewichtslagen des Systems sind auch solche, für welche AB horizontal liegt. Für sie wird $\gamma = 0$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\sigma = P$, $\gamma_1 = \gamma_2$, $\alpha_1 = -\alpha_2$, $\beta_1 = -\beta_2$ und reducirt sich daher das Gleichungssystem auf

$$\begin{aligned}
&\beta P + \lambda l \alpha_1 + 2\nu a \alpha = 0,\\
-&\alpha P + \lambda l \beta_1 + 2\nu a \alpha = 0,\\
&\tfrac{1}{2} G + \lambda l \gamma_1 = 0,\\
&\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1,\\
&\alpha^2 + \beta^2 = 1,\\
&l\alpha_1 = a(\alpha - 1),\\
&l\beta_1 = a\beta,
\end{aligned}$$

aus welchem $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; α, β; λ, ν zu finden sind.

Die Grössen λl und $2\nu a$ drücken die Spannung der Fäden und der Stange AB aus.

§. 10. Wir gehen jetzt zum Beweise des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten für ein beliebiges Punktsystem über, dessen Punkte frei und unabhängig von einander beweglich sind. Soll ein Kräftesystem, welches an einem solchen Punktsystem angreift, sich im Gleichgewicht befinden, so darf dasselbe auf den Geschwindigkeitszustand keines Systempunktes einen Einfluss üben. Diesen Geschwindigkeitszustand können aber nur Kräfte beeinflussen, deren Richtungen durch diesen Punkt hindurchgehen und entweder an ihm selbst oder wenigstens an einem mit ihm unveränderlich verbundenen Punkte ihrer Richtung angreifen. Demnach muss an jedem Systempunkte einzeln Gleichgewicht herrschen. Daher ist die Summe der virtuellen Arbeiten aller auf denselben Systempunkt wirkender Kräfte für jede beliebige virtuelle Verschiebung dieses Punktes Null. Da dies für alle Punkte gilt, so folgt, dass *wenn Kräfte an einem beliebig veränderlichen freien Punktsystem im Gleichgewicht sind, die Gesammtsumme aller ihrer virtuellen Arbeiten für jede beliebige virtuelle Bewegung des Systems verschwindet.* Umgekehrt wollen wir annehmen, es sei für ein solches System die Summe der virtuellen Arbeiten aller Kräfte für jede beliebige virtuelle Bewegung gleich Null. Ertheilen wir dem System eine virtuelle Bewegung, bei welcher nur ein einziger Punkt eine Verschiebung erleidet, alle anderen nicht, so erhalten wir auch nur von den auf diesen Punkt wirkenden Kräften virtuelle Arbeiten, während die virtuellen Arbeiten aller anderen Kräfte Null sind. Da nun die Gesammtsumme aller virtuellen Arbeiten Null ist, so folgt, dass die Summe der virtuellen Arbeiten aller an jenem Punkte angreifenden Kräfte für sich Null betragen muss. Diese Bedingung ist aber die Bedingung des Gleichgewichtes für diesen Punkt. Das näm-

liche lässt sich für alle Systempunkte behaupten; daher der Satz: Ist die Summe der virtuellen Arbeiten aller an einem freien veränderlichen Punktsystem wirkenden Kräfte Null, so sind die Kräfte im Gleichgewicht. Beide Sätze zusammengefasst liefern den einen:

Zum Gleichgewichte eines Kräftesystems, welches an einem freien, beliebig veränderlichen Punktsystem angreift, ist erforderlich und hinreichend, dass die Summe der virtuellen Arbeiten aller Kräfte für jede beliebige virtuelle Bewegung des Systems verschwinde.

Der Satz ist anwendbar auf das ganze Punktsystem, wie auf einen beliebigen abgetrennten Theil desselben, nur müssen in allen Fällen alle Kräfte in Rechnung gezogen werden, welche an einem solchen Theile angreifen.

Unter den virtuellen Bewegungen eines freien veränderlichen Systems sind auch solche, für welche die Punkte des Systems ihre gegenseitige Lage nicht ändern, für welche das System also ein unveränderliches bleibt. Hieraus folgt, dass für jedes freie veränderliche Punktsystem oder einen Theil desselben die Gleichgewichtsbedingungen eines freien unveränderlichen Systems nothwendig erfüllt sind, oder anders ausgedrückt, dass das Gleichgewicht der Kräfte an einem solchen System nicht aufhört, wenn man das System ganz oder zum Theil unveränderlich werden (z. B. erstarren) lässt.

§. 11. Hinsichtlich der Kräfte am veränderlichen Punktsystem unterscheidet man innere und äussere Kräfte. Innere Kräfte sind solche, deren Richtungen von den Systempunkten, an welchen sie angreifen, nach anderen Systempunkten oder von diesen nach jenen hin gerichtet sind und ihrer Grösse nach von der Entfernung der Angriffspunkte von diesen Systempunkten abhängen; äussere Kräfte solche, deren Grösse und Richtung nicht von der Lage der Systempunkte untereinander, wohl aber von ihrer Lage gegen äussere, dem System nicht angehörige Punkte abhängig ist. Zur ersten Art gehören Anziehungs- und Abstossungskräfte zwischen den Massenpunkten des Systems, zu den letzteren Anziehungen nach festen Centren. Dieser Unterschied betrifft übrigens nicht die innere Natur der Kräfte, sondern nur die Beschaffenheit des Systems. Es kann dieselbe Kraft unter Umständen die Rolle einer äusseren, unter anderen die einer inneren spielen. Für die Erde als bewegliches System z. B. sind die Anziehungen der Sonne und der Planeten äussere Kräfte, so gut, wie die Anziehungen der Fixsterne; für das Sonnensystem als Ganzes sind sie innere und jene nach wie vor äussere Kräfte. Innere Kräfte sind meist paarweise gleich und entgegengesetzt, in der Verbindungslinie der Punkte wirkend, welche sie afficiren. Wenn nämlich von zwei Punkten jeder den

anderen in der Richtung nach sich hin oder auch im entgegengesetzten Sinne beschleunigt und beide die Masseneinheit enthalten, so sind beide Kräfte gleich. Wird aber die Masse des einen das $m$fache der Masseneinheit, so wird sie auch die $m$fache Beschleunigung von dem anderen erfahren und wenn dessen Masse auf das m'fache steigt, so wird diese $m$fache Beschleunigung nochmals m'fach werden. Daher wird an jedem Punkte eine Kraft angreifen, welche das mm'fache der Kraft ist, mit welcher zwei Masseneinheiten einander beschleunigen. Ist diese Beschleunigung von der Entfernung r derselben abhängig und durch $f(r)$ ausgedrückt, so stellt $mm'f(r)$ die gemeinsame Intensität der beiden Kräfte dar, mit welchen die Punkte von den Massen m, m' in entgegengesetztem Sinne längs ihrer Verbindungslinie afficirt werden. Für Attractionen von festen Centren und für innere Kräfte der eben angeführten Art ist es leicht, die virtuelle Arbeit zu bilden. Für beide besteht nämlich eine Kräftefunction, deren partielle Differentialquotienten nach den Coordinaten des afficirten Punktes genommen, die Componenten der Kraft angeben. Ist nämlich R die Kraft, mit welcher das Centrum (a, b, c) den Punkt (x, y, z) beschleunigt, r die Entfernung beider und sind (α, β, γ) die Richtungswinkel der Kraft, so wird

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r} = \cos\alpha, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-b}{r} = \cos\beta, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-c}{r} = \cos\gamma,$$

folglich $\quad X = -R\frac{\partial r}{\partial x}, \quad Y = -R\frac{\partial r}{\partial y}, \quad Z = -R\frac{\partial r}{\partial z}$

und

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = -R\left(\frac{\partial r}{\partial x}\delta x + \frac{\partial r}{\partial y}\delta y + \frac{\partial r}{\partial z}\delta z\right) = -R\delta r.$$

Setzt man $\int R dr = U$, wodurch $R = \frac{dU}{dr}$ und $R\delta r = \frac{dU}{dr}\delta r = \delta U$ wird, so folgt $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = -\delta U$. Ebenso sind, wenn R die Anziehung zweier Punkte (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) bedeutet, $-R\frac{\partial r}{\partial x}$, $-R\frac{\partial r}{\partial y}$, $-R\frac{\partial r}{\partial z}$ die Componenten derselben am einen, $-R\frac{\partial r}{\partial x_1}$, $-R\frac{\partial r}{\partial y_1}$, $-R\frac{\partial r}{\partial z_1}$ am anderen Punkte. Der Bestandtheil der virtuellen Arbeit beider ist daher

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = -R\frac{\partial r}{\partial x}\delta x - R\frac{\partial r}{\partial y}\delta y - R\frac{\partial r}{\partial z}\delta z$$
$$+ R\frac{\partial r}{\partial x_1}\delta x_1 + R\frac{\partial r}{\partial y_1}\delta y_1 + R\frac{\partial r}{\partial z_1}\delta z_1,$$

oder, da aus $r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$ folgt:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x - x_1}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\partial r}{\partial y_1} = \frac{y - y_1}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial z_1} = \frac{z - z_1}{r},$$

wodurch

$$-R\frac{\partial r}{\partial x}\delta x + R\frac{\partial r}{\partial x_1}\delta x_1 = -R\frac{x - x_1}{r}\delta(x - x_1),$$

$$-R\frac{\partial r}{\partial y}\delta y + R\frac{\partial r}{\partial y_1}\delta y_1 = -R\frac{y - y_1}{r}\delta(y - y_1),$$

$$-R\frac{\partial r}{\partial z}\delta z + R\frac{\partial r}{\partial z_1}\delta z_1 = -R\frac{z - z_1}{r}\delta(z - z_1)$$

wird, mit Zuhülfenahme von $(x - x_1)\delta(x - x_1) + (y - y_1)\delta(y - y_1) + (z - z_1)\delta(z - z_1) = r\delta r$:

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = -R\delta r.$$

Setzt man also wieder $\int R dr = U$, so wird dieser Ausdruck $-\delta U$.

Bestehen zwischen je zwei Punkten des Systems ähnliche Anziehungen, so tritt an die Stelle von $R\delta r$ nur $\Sigma R\delta r$ und wird

$$-\Sigma R\delta r = -\delta U$$

die virtuelle Arbeit dieser inneren Kräfte, wo $U = \Sigma\int R dr$ ist. Im Falle der Abstossung ändert R und damit U Sinn und Zeichen. Auch kann man auf geometrischem Wege leicht zu dem Ausdruck der virtullen Arbeit der inneren Kräfte gelangen. Sind nämlich (Fig. 65) AA', BB' die virtuellen Verschiebungen der Angriffspunkte A, B der inneren gleichen Kräfte P, welche längs AB in entgegengesetztem Sinne wirken und sind Aa', Bb' die Projectionen von AA', BB' auf AB, so stellt

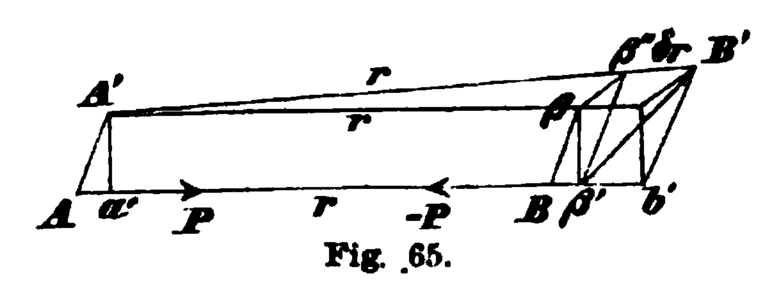


Fig. 65.

$$P \cdot Aa' - P \cdot Bb' = P(Aa' - Bb')$$

die Summe der virtuellen Arbeiten dieser beiden Kräfte dar. Zieht man nun durch A' die Linie $A'\beta$ parallel und gleich mit AB und nennt β' die Projection von β auf AB, so wird $Bb' = B\beta' + \beta'b'$. Vermöge des Parallelogramms $AA'\beta B$ ist aber $B\beta' = Aa'$ und da $A'\beta$ und $A'B'$ einen unendlich kleinen Winkel mit einander bilden und die zu $A'\beta$ in β senkrechte projicirende Ebene auf $A'B'$ einen Punkt β'' bestimmt, sodass $\beta''B' = \beta'b' = A'B' - AB = r' - r = \delta r$ wird, wenn $AB = r$ gesetzt

wird, so ergibt sich $-P\delta r$ für die Summe der virtuellen Arbeiten der Kräfte P. Die Aenderung δr der Entfernung r ist dabei positiv oder negativ, je nachdem AB bei der virtuellen Verschiebung des Systems wächst oder abnimmt und die virtuelle Arbeit ändert das Zeichen, wenn die Kräfte ihren Sinn wechseln.

§. 12. Nicht gerade sehr einfach ist es, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten auf den Fall eines beliebig veränderlichen Systems auszudehnen, welches Beschränkungen seiner Beweglichkeit ausgesetzt ist. Was zunächst den ersten der beiden Sätze betrifft, welche zusammen das Princip bilden, nämlich dass im Falle des Gleichgewichts die Summe der virtuellen Arbeiten für jede mit der Natur des Systems verträgliche Verschiebungsart Null ist, so müssen wir die Voraussetzung machen, dass die beschränkenden Bedingungen durch entgegengesetzt gleiche Kräfte ersetzbar sind, wie dies bei der Berührung zweier Systemtheile mit zwei Flächen Cap. IV, S. 56 gezeigt wurde. Da man schliesslich jeden Punkt als ein unveränderliches System ansehen kann, so kann ein veränderliches System mit Bedingungen immer als ein Aggregat von unveränderlichen Systemen angesehen werden, sodass nach Einführung der Bedingungskräfte an jedem unveränderlichen Partialsystem für sich Gleichgewicht besteht. Es gilt daher für jedes solche der erste Theil des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, wie in §. 4. Stellt man für sämmtliche Partialsysteme des Gesammtsystems die Gleichungen auf, welche dies Princip für sie aussprechen und addirt sie sämmtlich, so erhält man dasselbe für das veränderliche System gleichfalls. In dem Ausdrucke dafür kommen zunächst die virtuellen Arbeiten aller Bedingungskräfte vor. Man kann aber leicht zeigen, dass die Summe der virtuellen Arbeiten je zweier der Normalkräfte, welche an den Berührungsstellen eingeführt werden, Null beträgt. In dem Berührungspunkte C zweier Flächen α, β treten nämlich zwei Punkte A, B derselben zusammen. Bei einer virtuellen Verschiebung entfernen sich dieselben im Allgemeinen unendlich wenig von einander und befinden sich etwa in A', B', während in dem neuen Berührungspunkte C' zwei andere Punkte beider Flächen zusammenfallen. Der Punkt A' liegt aber in der Tangentenebene von α und der Punkt B' in der Tangentenebene von β im Punkte C' und daher steht die Verbindungslinie $A'B'$ senkrecht auf der gemeinsamen Normale beider Flächen in C'. Diese Normale bildet aber mit der Normalen des anfänglichen Berührungspunktes C einen unendlich kleinen Winkel und daher weicht auch der Winkel, den $A'B'$ mit dieser Normalen bildet, nur um ein Unendlichkleines von $\frac{1}{2}\pi$ ab. Projiciren wir daher das Dreieck $AA'B'$ auf die Normale in C, so verschwindet die Projection von $A'B'$ und folgt, dass die Projectionen δn, $\delta n'$ der virtuellen Verschiebungen AA', BB' der Punkte A, B, in welchen die ent-

gegengesetzt gleichen Normalbedingungskräfte N, N' angreifen, einander gleich sind. Daher ist $N\delta n + N'\delta n' = 0$..

In gleicher Weise ergibt sich, dass die virtuelle Arbeitssumme je zweier entgegengesetzt gleicher Spannungskräfte, welche den Abstand zweier Punkte A, B des Systems unveränderlich erhalten, Null ist. Nach §. 11 ist dieselbe nämlich $\mp N\delta r$, wenn N die gemeinschaftliche Intensität beider Kräfte, δr aber die virtuelle Aenderung der Länge AB bezeichnet. Da letztere Linie unveränderlich sein soll, so ist δr, also auch $\mp N\delta r = 0$.

Für die Widerstände von festen Flächen und Curven ist die virtuelle Arbeit für die mit den Bedingungen des Systems verträglichen Verschiebungen, nämlich für Verschiebungen in der Tangente oder Tangentenebene Null.

Sind also P, P', ... die Kräfte, welche an dem einen, Q, Q', ... die, welche an dem andern von zwei in einem Punkte berührend mit einander verbundenen Systemtheilen wirken, N, N' die entgegengesetzten Normalkräfte im Berührungspunkte; sind ebenso R, R' die Kräfte, welche an einem dritten, mit dem zweiten berührend verbundenen Systemtheil angreifen, N_1, N', die im Berührungspunkte zuzufügenden Normalkräfte u. s. f., so besteht ein System von Gleichungen wie:

$$\begin{array}{ll}
\Sigma P\delta p + N\delta n = 0, & N\delta n + N'\delta n' = 0, \\
\Sigma Q\delta q + N'\delta n' + N_1\delta n_1 = 0, & N_1\delta n_1 + N_1'\delta n_1' = 0, \\
\Sigma R\delta r + N_1'\delta n_1' + N_2\delta n_2 = 0, & N_2\delta n_2 + N_2'\delta n_2' = 0, \\
\Sigma S\delta s + N_2'\delta n_2' + \cdots = 0, & \vdots \\
\vdots &
\end{array}$$

durch deren Addition

$$\Sigma P\delta p + \Sigma Q\delta q + \Sigma R\delta r + \Sigma S\delta s + \cdots = 0$$

folgt, welche Gleichung unseren Satz ausspricht. Ist ein Systemtheil fest, so ist die sich auf ihn beziehende Gleichung von selbst erfüllt und fällt eine Arbeit wie $N\delta n$ hinweg, weil δn Null ist. Aehnliche Gleichungen gelten, wenn Punkte unveränderlichen Abstand haben.

Man sieht, diese Betrachtung gilt für beliebig viele Berührungsstellen von Flächen mit Flächen, Flächen mit Curven und Curven mit Curven. Sie setzt jedoch die Existenz einer gemeinschaftlichen bestimmten Normale an der Berührungsstelle oder was dasselbe ist, Bestimmtheit der Richtung der Normalkräfte voraus. In allen Fällen, in welchen diese Voraussetzung nicht zutrifft, ist eine Specialuntersuchung über die Giltigkeit unseres Princips nothwendig. Man kann daher jetzt den Satz aufstellen:

Zum Gleichgewicht der Kräfte an einem beliebigen veränderlichen System, welches Bedingungen unterworfen ist, dass gewisse Punkte feste oder bewegliche Flächen oder Curven

nicht verlassen, dass gewisse Systemparthieen unveränderlich bleiben, dass unveränderliche Systemtheile unter bestimmten gemeinschaftlichen Normalen einander berühren sollen, ist erforderlich, dass die Summe der virtuellen Arbeiten der Kräfte für alle mit den Bedingungen verträglichen Verschiebungsarten Null oder negativ sei.

Das Princip ist nicht blos auf das Gesammtsystem, sondern auch auf jeden abgetrennten Theil desselben anwendbar, wenn nur die Verbindung, durch welche derselbe mit den übrigen Systemtheilen zusammenhängt, durch Kräfte, resp. durch Gleichungen ausgesprochen wird.

Der zweite Theil des Princips, nämlich der Satz, dass, wenn die Summe der virtuellen Arbeiten aller Kräfte für alle verträglichen Verschiebungen verschwindet, Gleichgewicht stattfindet, kann in derselben Weise bewiesen werden, wie §. 4 für das unveränderliche System geschehen ist. Einen andern Beweis s. Möbius, Lehrbuch der Statik B. II, S. 55. Es kann demnach das Princip jetzt allgemeiner folgendermassen ausgesprochen werden, wobei der Unterschied zwischen einseitig und doppelt wirkenden Widerständen mit berücksichtigt wird:

Zum Gleichgewicht der Kräfte an einem beliebigen veränderlichen System, welches Bedingungen unterworfen ist, dass gewisse Punkte feste oder bewegliche Flächen oder Curven nicht verlassen, dass gewisse Systemparthieen unveränderlich bleiben oder dass unveränderliche Systemtheile einander berühren sollen, ist erforderlich und hinreichend, dass die Summe der virtuellen Arbeiten aller Kräfte für alle mit den Bedingungen verträglichen Verschiebungen Null oder negativ sei.

§. 13. Beispiele und Anwendungen.

1. Es sollen die Gleichgewichtsbedingungen von Kräften am freien unveränderlichen System aus dem allgemeinen Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für das veränderliche System abgeleitet werden.

Das System bestehe aus n Punkten; seine Unveränderlichkeit besteht in dem constanten Abstande seiner Punkte von einander. Es fragt sich zunächst, welche und wie viele Bedingungen diese Unveränderlichkeit fordert. Damit zwei Punkte $(x_i y_i z_i)$ und $(x_k y_k z_k)$ constanten Abstand von einander haben, ist eine Bedingung von der Form

$$L \equiv (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 - Const. = 0$$

zu erfüllen. Für drei Punkte gibt es drei solcher Bedingungen; jeder der $n-3$ übrigen erfordert für seine unveränderliche Verbindung mit diesen dreien drei weitere derartige Gleichungen, welche aussagen, dass er constanten Abstand von diesen drei Systempunkten besitze. Dies gibt im Ganzen $3(n-3)+3=3n-6$ Bedingungen und ebenso viele unbekannte Multiplicatoren λ, μ, ν, ... sind einzuführen, wenn wir die analytische Form des Princips von §. 8 anwenden

wollen. Da

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 2(x_i - x_k), \quad \frac{\partial L}{\partial y_i} = 2(y_i - y_k), \quad \frac{\partial L}{\partial z_i} = 2(z_i - z_k), \ldots$$

ist, so werden die Gleichungen des Gleichgewichts zunächst

$$\begin{aligned} 0 &= X_i + \lambda(x_i - x_k) + \mu(x_i - x_l) + \cdots, \\ 0 &= Y_i + \lambda(y_i - y_k) + \mu(y_i - y_k) + \cdots, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots n. \\ 0 &= Z_i + \lambda(z_i - z_k) + \mu(z_i - z_k) + \cdots. \end{aligned}$$

Aus diesen $3n$ Gleichungen sind die $3n - 6$ Grössen $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ zu eliminiren, um die restirenden 6 Gleichgewichtsbedingungen des unveränderlichen Systems zu finden. Diese Elimination kann durch folgende beiden Operationen vollzogen werden, deren jede dreimal Anwendung findet. Addirt man alle den verschiedenen Werthen des Index i entsprechenden Gleichungen, welche sich auf die x-Axe beziehen, so liefern je zwei Glieder $\lambda(x_i - x_k)$ und $\lambda(x_k - x_i)$; $\mu(x_i - x_l)$ und $\mu(x_l - x_i)$, ... welche am i^{ten} und k^{ten}, am i^{ten} und l^{ten} u. s. w. Punkte vorkommen, zur Summe Null. Es bleibt daher als Resultat die von $\lambda, \mu, \ldots$ unabhängige Gleichung $\Sigma X_i = 0$. Hierzu kommen die beiden analogen Gleichungen $\Sigma Y_i = 0$, $\Sigma Z_i = 0$, welche sich durch Addition der auf die y-, resp. z-Axe bezüglichen Gleichungen ergeben. Multiplicirt man ferner die der z-Axe entsprechende der vorstehenden Gleichungen mit y, die der y-Axe entsprechende mit z, subtrahirt die Resultate und summirt hierauf nach dem Index i durch das ganze System hindurch, so erhält man als Anfangsglied $\Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i)$, sodann findet sich aber auch zu jeder Verbindung wie $\lambda[y_i(z_i - z_k) - z_i(y_i - y_k)]$ oder $-\lambda(y_i z_k - y_k z_i)$ auch die entgegengesetzte $\lambda[y_k(z_k - z_i) - z_k(y_k - y_i)]$ oder $-\lambda(y_k z_i - y_i z_k)$ vor und tilgen sich dieselben paarweise, so dass blos die Gleichung $\Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i) = 0$ resultirt. Hierzu erlangt man in ähnlicher Weise die beiden andern noch fehlenden Gleichungen $\Sigma(z_i X_i - x_i Z_i) = 0$ und $\Sigma(x_i Y_i - y_i X_i) = 0$, sodass alle 6 Gleichgewichtsbedingungen des unveränderlichen Systems gefunden sind.

2. Es soll die Differentialgleichung der Curven für das Laufgewicht Q der Sauveur- und de l'Hospital'schen Zugbrücke (s. S. 67) gefunden werden.

Ertheilt man dem System eine verträgliche Verschiebung, bei welcher der Winkel BAC, den wir mit ψ bezeichnen wollen, um $\delta\psi$ abnimmt, so beschreibt der Punkt S einen kleinen Kreisbogen $\beta d\psi$, wo $SA = \beta$ gesetzt ist, senkrecht zu SA und folglich einen Winkel $\frac{1}{2}\pi + \psi$ mit der Richtung von G bildend. Die virtuelle Arbeit von G ist daher $-G\beta \sin\psi\delta\psi$. Die virtuelle Arbeit von Q findet man, wenn man bedenkt, dass der Angriffspunkt M von Q um die Verticalprojection des Bogenelementes MM' sinkt. Diese Projection ist $\delta(\varrho\cos\vartheta)$ und folglich $Q\delta(\varrho\cos\vartheta)$ die Arbeit von Q. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten gibt daher die Hauptgleichung

$$-G\beta \sin\psi\delta\psi + Q\delta(\varrho\cos\vartheta) = 0,$$

oder

$$-G\beta \sin\psi\delta\psi + Q\cos\vartheta\delta\varrho - Q\varrho\sin\vartheta \,.\, \delta\vartheta = 0.$$

Mit dieser sind die Differentialgleichungen der Bedingungen

$$\varrho - f(\vartheta) = 0,$$
$$(a - \varrho)^2 - (4\beta^2 + h^2 - 4\beta h \cos\psi) = 0$$

zu verbinden, von denen die erste ausdrückt, dass der Punkt $M(\varrho, \vartheta)$ auf der noch unbekannten Curve $\varrho = f(\vartheta)$ liegen und die zweite, dass $BC + CM$ constant gleich a sein soll.

Diese Differentialgleichungen sind

$$\delta\varrho - f'(\vartheta)\,\delta\vartheta = 0, \quad (a - \varrho)\,\delta\varrho + 2\beta h \sin\psi\,\delta\psi = 0.$$

Indem man sie, die erste mit λ, die zweite mit μ multiplicirt, zur Hauptgleichung addirt, zerfällt diese in die drei Gleichungen

$$-G + 2h\mu = 0, \quad Q\cos\vartheta + \lambda + \mu(a - \varrho) = 0, \quad Q\varrho\sin\vartheta + \lambda f'(\vartheta) = 0.$$

Sie liefern nach Elimination von λ und μ, wenn man für $f'(\vartheta)$ das gleichbedeutende $\frac{d\varrho}{d\vartheta}$ schreibt und $\frac{Q}{G}h = b$ setzt

$$\tfrac{1}{2}\, d.(a - \varrho)^2 + b\,d(\varrho\cos\vartheta) = 0,$$

wie S. 67.

3. Die vorige Aufgabe werde dahin abgeändert, dass vom Punkte B aus eine starre, um B drehbare Linie von der Länge l zum Punkte M führe, in welchem das Gewicht Q wirkt. Welches ist die Curve des Gleichgewichtes, auf welcher M laufen muss?

Für x, y als rechtwinklige, horizontale und verticale Coordinaten von M für A als Ursprung ist alsdann $-P\beta\cos\psi\,d\psi + Q\,dy = 0$ und besteht die Bedingung: $l^2 = 4\beta^2 + x^2 + y^2 + 4\beta\sin\psi\sqrt{x^2 + y^2}$. Die Integration der ersten Gleichung gibt $Qy = P\beta\sin\psi + C$, wobei C so bestimmt werden kann, dass die Curve durch den Punkt $C\,(0, h)$ geht.

4. Wirken an dem System keine anderen Kräfte, als die Schwere, so nimmt die Hauptgleichung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, wenn die Richtung der Schwere als z-Axe angenommen wird, die Gestalt $\Sigma P\delta z = 0$, oder $\delta\Sigma Pz = 0$ an und da $\Sigma Pz = z_1\Sigma P$ ist, auch die Form $\delta z_1 = 0$, wo z_1 die Ordinate des Schwerpunktes bedeutet. Für alle virtuellen verträglichen Verschiebungen darf also der Schwerpunkt des ganzen Systems dieselbe Horizontalebene nicht verlassen. Bei Aufgaben, wie Nr. 2 und 3, bei welchen unendlich viele Gleichgewichtslagen möglich sind, erhält man durch diese Bemerkung eine Construction für die Curve, welche ein bestimmter Systempunkt beschreibt, wenn das System alle Gleichgewichtslagen durchläuft.

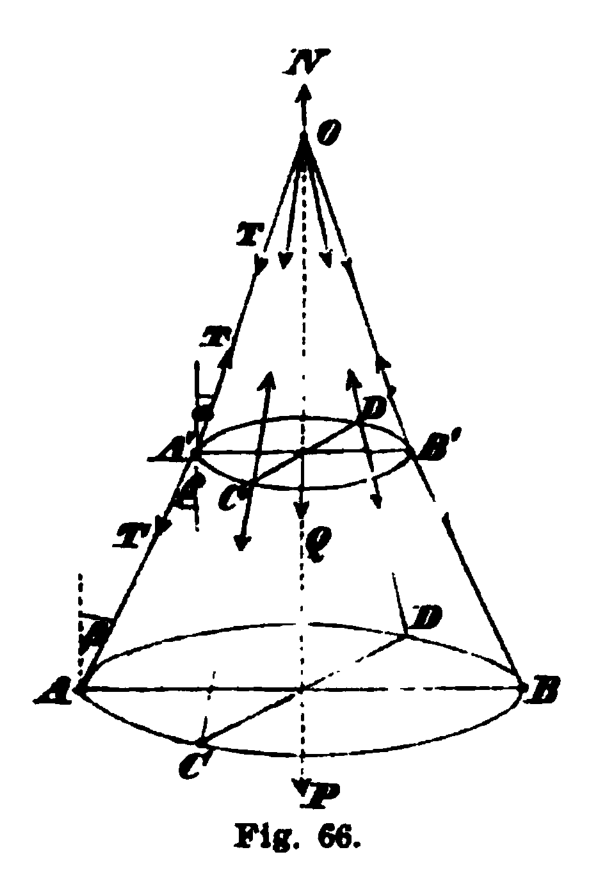


Fig. 66.

5. Ein homogener schwerer Kreis (Ring) (Fig. 66) vom Gewichte P und dem Radius R wird an den Endpunkten A, B, C, D zweier zu einander senkrechter Durchmesser von vier gleichlangen, vollkommen biegsamen Fäden getragen, deren Enden in einem festen Punkte O sich vereinigen. Ueber die vier Fäden wird ein anderer gleichfalls homogener Kreis von kleinerem Radius r und dem Gewichte Q hingestreift. Man soll die Gleichgewichtslagen des Systems ermitteln und die Spannung der Fäden finden.

Durch eine Verschiebung des ganzen Systems parallel der Vertikalen folgt zunächst für den Widerstand N des Punktes O die Gleichung $N = P + Q$. Schneidet man die Fäden zwischen O und dem kleineren Kreise, sowie zwischen beiden Kreisen durch und bezeichnet ihre Spannung mit T, die Neigung der oberen Theile der Fäden gegen die Verticale mit α, die der unteren mit β, so gibt die Verschiebung des Partialsystems des festen Punktes parallel der Verticalen: $N = 4T\cos\alpha$, also $4T\cos\alpha = P + Q$. Aehnliche Verschiebungen der beiden Kreise geben

$$4S\cos\beta = P, \quad 4S(\cos\beta - \cos\alpha) + Q = 0.$$

Bedeutet l die Länge der Fäden, so besteht die rein geometrische Gleichung

$$\frac{r}{\sin\alpha} + \frac{R - r}{\sin\beta} = l.$$

Die drei Gleichungen

$$4S\cos\beta = P,\ 4S\cos\alpha = P + Q,\ r\sin\beta + (R - r)\sin\alpha = l\sin\alpha\sin\beta$$

liefern α, β, S. Aus den beiden ersten folgt $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = 1 + \frac{Q}{P}$, also $\alpha < \beta$. Entnimmt man hieraus $\cos\beta$ und $\sin\beta$, so liefert die letzte Gleichung

$$(r - l\sin\alpha)^2 \left[1 - \frac{P^2}{(P+Q)^2}\cos^2\alpha\right] = (R - r)^2\sin^2\alpha.$$

Sie hat zwei reelle Wurzeln, von denen die eine einer Lage des kleineren Ringes jenseits O entspricht. Für S hat man eine ähnliche Gleichung 4. Grades.

Sind h, k die Abstände der Ringe von O, so ist $h = r\operatorname{cotg}\alpha + (R - r)\operatorname{cotg}\beta$, $k = r\operatorname{cotg}\alpha$. Wann ist $k = \frac{1}{2}h$?

Auch für $r > R$ ist ein Gleichgewicht möglich, die 4 Fäden umspannen dann den Ring (r).

Auch kann die Gleichung $Q\delta k - P\delta h = 0$ in Verbindung mit der obigen geometrischen Bedingung benutzt werden.

Wie gross ist der Druck auf den zwischenliegenden Ring?

6. Gleichgewicht von Kräften am ebenen Gelenkpolygon von constanten Seiten.

a) Es sei $A_0 A_1 A_2 \ldots A_m$ ein ebenes Polygon, dessen Zeiten $A_0 A_1$, $A_1 A_2, \ldots$ $A_{m-1} A_m$ durch Gelenke drehbar mit einander verbunden sind. Dasselbe erleide eine virtuelle Verschiebung in seiner Ebene, sodass seine Scheitel $A_0, A_1, \ldots A_m$ unendlich kleine Bogen beschreiben und das Polygon in $A_0' A_1' A_2' \ldots A_m'$ übergeht. In Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem OX, OY seien x_r, y_r die Coordinaten des Scheitels A_r vor der Verschiebung, $x_r + \delta x_r$, $y_r + \delta y_r$ die des Scheitels A_r' nach der Verschiebung. Wir wollen zunächst die aus der Verschiebung entspringenden Aenderungen δx_r, δy_r suchen.

Um das Polygon aus der Lage $A_0 A_1 A_2 \ldots A_m$ in die Lage $A_0' A_1' A_2' \ldots A_m'$ überzuführen, ertheilen wir ihm zunächst die Translation $A_0 A_0'$ (δx, δy), wodurch es in die Lage $A_0' a_1 a_2 \ldots a_m$ gelangt. Dadurch gehen x_r, y_r über in $x_r + \delta x$, $y_r + \delta y$. Hierauf lassen wir $A_0' a_1 a_2 \ldots a_m$ um A_0' rotiren, bis der Scheitel a_1 mit A_1' zusammenfällt. Hierbei erleiden die Coordinaten $x_r + \delta x$, $y_r + \delta y$ eine weitere Aenderung um $-(y_r - y_0)\delta\alpha_1$, $+(x_r - x_0)\delta\alpha_1$, wenn $\delta\alpha_1$ den unendlich kleinen Rotationswinkel $a_1 A_0' A_1'$ bezeichnet. Denn es ändern sich überhaupt die Coordinaten eines Punktes im Abstande r vom Centrum um $-r_y\delta\alpha_1$, $+r_x\delta\alpha_1$, wenn r_x, r_y die Projectionen von r auf die Axen sind. Demnach sind jetzt die Coordinaten von A_r übergegangen in

$$x_r + \delta x - (y_r - y_0)\,\delta\alpha_1, \quad y_r + \delta y + (x_r - x_0)\,\delta\alpha_1,$$

und hat das Polygon die Gestalt und Lage $A'_0 A'_1 a'_2 a'_3 \ldots a'_m$ erlangt. Ertheilen wir dem Polygon $A'_1 a'_2 a'_3 \ldots a'_m$ eine neue Rotation $\delta\alpha_2$ um A'_1, wodurch a'_2 nach A'_2 gelangt und das Gesammtpolygon in $A'_0 A'_1 A'_2 a''_3 a''_4 \ldots a''_m$ übergeht, so werden die Coordinaten von a''_r sein

$$x_r + \delta x - (y_r - y_0)\,\delta\alpha_1 - (y_r - y_1)\,\delta\alpha_2,$$
$$y_r + \delta y + (x_r - x_0)\,\delta\alpha_1 + (x_r - x_1)\,\delta\alpha_2.$$

Indem wir ebenso dem Polygon $A'_2 a''_3 a''_4 \ldots a''_m$ um A'_2 die Rotation $\delta\alpha_3$ ertheilen, so dass a''_3 nach A'_3 gelangt und so fortfahren, bis A_r schliesslich mit A'_r zusammenfällt, erhalten wir als Coordinaten von A'_r:

$$x_r + \delta x - (y_r - y_0)\,\delta\alpha_1 - (y_r - y_1)\,\delta\alpha_2 \ldots - (y_r - y_{r-1})\,\delta\alpha_r,$$
$$y_r + \delta y + (x_r - x_0)\,\delta\alpha_1 + (x_r - x_1)\,\delta\alpha_2 \ldots + (x_r - x_{r-1})\,\delta\alpha_r$$

und hiermit die Aenderungen δx_r, δy_r der Coordinaten x_r, y_r:

$$\delta x_r = \delta x - \sum_{s=1}^{s=r} (y_r - y_{s-1})\,\delta\alpha_s, \quad \delta y_r = \delta y + \sum_{s=1}^{s=r} (x_r - x_{s-1})\,\delta\alpha_s,$$

nämlich

$$\begin{aligned}
\delta x_0 &= \delta x,\\
\delta x_1 &= \delta x - (y_1 - y_0)\,\delta\alpha_1,\\
\delta x_2 &= \delta x - (y_2 - y_0)\,\delta\alpha_1 - (y_2 - y_1)\,\delta\alpha_2,\\
&\vdots\\
\delta x_m &= \delta x - (y_m - y_0)\,\delta\alpha_1 - (y_m - y_1)\,\delta\alpha_2 - \ldots - (y_m - y_{m-1})\,\delta\alpha_m,\\
\delta y_0 &= \delta y,\\
\delta y_1 &= \delta y + (x_1 - x_0)\,\delta\alpha_1,\\
\delta y_2 &= \delta y + (x_2 - x_0)\,\delta\alpha_1 + (x_2 - x_1)\,\delta\alpha_2,\\
&\vdots\\
\delta y_m &= \delta y + (x_m - x_0)\,\delta\alpha_1 + (x_m - x_1)\,\delta\alpha_2 + \ldots + (x_m - x_{m-1})\,\delta\alpha_m.
\end{aligned}$$

Ist das Polygon geschlossen, so hat man

$$x_0 = x_m, \quad y_0 = y_m, \quad \delta x_0 = \delta x_m = \delta x, \quad \delta y_0 = \delta y_m = \delta y$$

und daher

$$(y_m - y_1)\,\delta\alpha_2 + (y_m - y_2)\,\delta\alpha_3 + \ldots + (y_m - y_{m-1})\,\delta\alpha_m = 0,$$
$$(x_m - x_1)\,\delta\alpha_2 + (x_m - x_2)\,\delta\alpha_3 + \ldots + (x_m - x_{m-1})\,\delta\alpha_m = 0$$

und

$$\delta x_r = \delta x - (y_r - y_m)\,\delta\alpha_1 - (y_r - y_1)\,\delta\alpha_2 - \ldots - (y_r - y_{r-1})\,\delta\alpha_r,$$
$$\delta y_r = \delta y + (x_r - x_m)\,\delta\alpha_1 + (x_r - x_1)\,\delta\alpha_2 + \ldots + (x_r - x_{r-1})\,\delta\alpha_r,$$

oder einzeln:

$$\begin{aligned}
\delta x_1 &= \delta x - (y_1 - y_m)\,\delta\alpha_1,\\
\delta x_2 &= \delta x - (y_2 - y_m)\,\delta\alpha_1 - (y_2 - y_1)\,\delta\alpha_2,\\
&\vdots\\
\delta x_{m-1} &= \delta x - (y_{m-1} - y_m)\,\delta\alpha_1 - (y_{m-1} - y_1)\,\delta\alpha_2 - \ldots - (y_{m-1} - y_{m-2})\,\delta\alpha_{m-1},\\
\delta x_m &= \delta x,\\
\delta y_1 &= \delta y + (x_1 - x_m)\,\delta\alpha_1,\\
\delta y_2 &= \delta y + (x_2 - x_m)\,\delta\alpha_1 + (x_2 - x_1)\,\delta\alpha_2,\\
&\vdots\\
\delta y_{m-1} &= \delta y + (x_{m-1} - x_m)\,\delta\alpha_1 + (x_{m-1} - x_1)\,\delta\alpha_2 + \ldots + (x_{m-1} - x_{m-2})\,\delta\alpha_{m-1},\\
\delta y_m &= \delta y.
\end{aligned}$$

b) In dem Punkte ξ_r, η_r der Seite $A_{r-1}A_r$ eines geschlossenen Polygons, welcher diese Seite im Verhältniss $p_r : q_r$ theilt, so dass also

$$(p_r + q_r)\,\xi_r = p_r x_{r-1} + q_r x_r, \quad (p_r + q_r)\,\eta_r = p_r y_{r-1} + q_r y_r$$

ist, greife nun eine Kraft $[F] = [X_r] + [Y_r]$ an und ähnliche an allen Seiten. Die Bedingung des Gleichgewichts ist hierfür

$$\sum_{r=1}^{r=m} (X_r \delta \xi_r + Y_r \delta \eta_r) = 0.$$

Es ist aber

$$(p_r + q_r)\,\delta\xi_r = p_r \delta x_{r-1} + q_r \delta x_r, \quad (p_r + q_r)\,\delta\eta_r = p_r \delta y_{r-1} + q_r \delta y_r$$

und wenn man hieraus mit Hülfe der Formeln am Schlusse von a) die Aenderungen δx_{r-1} und δx_r, δy_{r-1}, δy_r eliminirt, so kommt

$$\delta\xi_r = \delta x - (\eta_r - y_m)\,\delta\alpha_1 - (\eta_r - y_1)\,\delta\alpha_2 - \ldots - (\eta_r - y_{r-1})\,\delta\alpha_r,$$
$$\delta\eta_r = \delta y + (\xi_r - x_m)\,\delta\alpha_1 + (\xi_r - x_1)\,\delta\alpha_2 + \ldots + (\xi_r - x_{r-1})\,\delta\alpha_r$$

und speciell:

$$\begin{aligned}
\delta\xi_1 &= \delta x - (\eta_1 - y_m)\,\delta\alpha_1,\\
\delta\xi_2 &= \delta x - (\eta_2 - y_m)\,\delta\alpha_1 - (\eta_2 - y_1)\,\delta\alpha_2,\\
&\vdots\\
\delta\xi_m &= \delta x - (\eta_m - y_m)\,\delta\alpha_1 - (\eta_m - y_1)\,\delta\alpha_2 - \ldots - (\eta_m - y_{m-1})\,\delta\alpha_m,\\
\delta\eta_1 &= \delta y + (\xi_1 - x_m)\,\delta\alpha_1,\\
\delta\eta_2 &= \delta y + (\xi_2 - x_m)\,\delta\alpha_1 - (\xi_2 - x_1)\,\delta\alpha_2,\\
&\vdots\\
\delta\eta_m &= \delta y + (\xi_m - x_m)\,\delta\alpha_1 + (\xi_m - x_1)\,\delta\alpha_2 + \ldots + (\xi_m - x_{m-1})\,\delta\alpha_m.
\end{aligned}$$

Hierdurch geht die Gleichgewichtsbedingung über in

$$\delta x \sum_{r=1}^{r=m} X_r + \delta y \sum_{r=1}^{r=m} Y_r + \delta\alpha_1 \sum_{r=1}^{r=m} \begin{vmatrix} \xi_r - x_m, & \eta_r - y_m \\ X_r & Y_r \end{vmatrix} + \delta\alpha_2 \sum_{r=2}^{r=m} \begin{vmatrix} \xi_r - x_1, & \eta_r - y_1 \\ X_r & Y_r \end{vmatrix} + \cdots$$
$$+ \delta\alpha_s \sum_{r=s}^{r=m} \begin{vmatrix} \xi_r - x_{s-1}, & \eta_r - y_{s-1} \\ X_r & Y_r \end{vmatrix} + \cdots + \delta\alpha_m \begin{vmatrix} \xi_m - x_{m-1}, & \eta_m - y_{m-1} \\ X_m & Y_m \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit den oben für das geschlossene Polygon angegebenen Gleichungen

$$(y_m - y_1)\,\delta\alpha_2 + (y_m - y_2)\,\delta\alpha_3 + \ldots + (y_m - y_{m-1})\,\delta\alpha_m = 0,$$
$$(x_m - x_1)\,\delta\alpha_2 + (x_m - x_2)\,\delta\alpha_3 + \ldots + (x_m - x_{m-1})\,\delta\alpha_m = 0$$

stellt das Gleichgewicht des Polygons dar. Die letzten beiden Gleichungen enthalten δx, δy, $\delta\alpha$ nicht; diese Aenderungen bleiben daher vollständig willkührlich.

Die Hauptgleichung zerfällt daher in 4 Gleichungen, sodass, wenn wir abkürzend

$$\sum_{r=s}^{r=m} \begin{vmatrix} \xi_r - x_{s-1}, & \eta_r - y_{s-1} \\ X_r & Y_r \end{vmatrix} = P_s$$

setzen, das Gleichgewicht durch folgende 6 Gleichungen dargestellt wird:

$$\sum_{r=1}^{r=m} X_r = 0, \quad \sum_{r=1}^{r=m} Y_r = 0, \quad \sum_{r=1}^{r=m} \begin{vmatrix} \xi_r - x_m, & \eta_r - y_m \\ X_r & Y_r \end{vmatrix} = 0, \quad \sum_{s=2}^{s=m} P_s \delta\alpha_s = 0,$$

$$\sum_{s=2}^{s=m} (y_m - y_{s-1})\,\delta\alpha_s = 0, \quad \sum_{s=2}^{s=m} (x_m - x_{s-1})\,\delta\alpha_s = 0.$$

Die drei ersten von ihnen sind die Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte am unveränderlichen ebenen System. Es sind nun noch aus den drei letzten Gleichungen zwei Aenderungen zu eliminiren und dann die Coefficienten aller übrigen gleich Null zu setzen, um sämmtliche Gleichungen von den Aenderungen frei zu machen. Diese Elimination führen wir folgendermassen aus. Wir schreiben die 4., 5. und 6. Gleichung so:

$$\sum_{s=2}^{s=m} P_s \delta\alpha_s = \sum_{s=2}^{s=m-1} P_s \delta\alpha_s + P_m \delta\alpha_m = 0,$$

$$\sum_{s=2}^{s=m} (y_m - y_{s-1})\,\delta\alpha_s = \sum_{s=2}^{s=m-1} (y_m - y_{s-1})\,\delta\alpha_s + (y_m - y_{m-1})\,\delta\alpha_m = 0,$$

$$\sum_{s=2}^{s=m} (x_m - x_{s-1})\,\delta\alpha_s = \sum_{s=2}^{s=m-1} (x_m - x_{s-1})\,\delta\alpha_s + (x_m - x_{m-1})\,\delta\alpha_m = 0$$

und eliminiren aus der 4. und 5., sowie aus der 4. und 6. die Grösse $\delta\alpha_m$, indem wir die eine mit $y_m - y_{m-1}$, resp. $x_m - x_{m-1}$, die andere mit P_m multipliciren und sie abziehen. Dies liefert:

$$\sum_{s=2}^{s=m-1} \begin{vmatrix} y_m - y_{m-1}, & y_m - y_{s-1} \\ P_m & P_s \end{vmatrix} \delta\alpha_s = 0, \quad \sum_{s=2}^{s=m-1} \begin{vmatrix} x_m - x_{m-1}, & x_m - x_{s-1} \\ P_m & P_s \end{vmatrix} \delta\alpha_s = 0.$$

Auf dieselbe Weise entfernen wir aus diesen beiden Gleichungen $\delta\alpha_{m-1}$. Indem wir sie nämlich spalten, erhalten wir

$$\sum_{s=2}^{s=m-2} \begin{vmatrix} y_m - y_{m-1}, & y_m - y_{s-1} \\ P_m & P_s \end{vmatrix} \delta\alpha_s + \begin{vmatrix} y_m - y_{m-1}, & y_m - y_{m-1} \\ P_m & P_{m-1} \end{vmatrix} \delta\alpha_{m-1} = 0.$$

$$\sum_{s=2}^{s=m-2} \begin{vmatrix} x_m - x_{m-1}, & x_m - x_{s-1} \\ P_m & P_s \end{vmatrix} \delta\alpha_s + \begin{vmatrix} x_m - x_{m-1}, & x_m - x_{m-2} \\ P_m & P_{m-1} \end{vmatrix} \delta\alpha_{m-1} = 0.$$

Die Elimination von $\delta\alpha_{m-1}$ gibt daher:

$$\sum_{s=2}^{s=m-2} \begin{vmatrix} y_m - y_{m-1}, & y_m - y_{s-1} \\ P_m & P_s \end{vmatrix} \delta\alpha_s : \sum_{s=2}^{s=m-2} \begin{vmatrix} x_m - x_{m-1}, & x_m - x_{s-1} \\ P_m & P_s \end{vmatrix} \delta\alpha_s$$

$$= \begin{vmatrix} y_m - y_{m-1}, & y_m - y_{m-2} \\ P_m & P_{m-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_m - x_{m-1}, & x_m - x_{m-2} \\ P_m & P_{m-1} \end{vmatrix}.$$

In dieser Gleichung sind noch $m - 3$ Aenderungen $\delta\alpha_2, \delta\alpha_3, \ldots \delta\alpha_{m-2}$ enthalten, welche vollständig willkürlich bleiben. Indem wir ihre Coefficienten gleich Null setzen, erhalten wir in Verbindung mit den drei ersten Gleichungen, welche das Gleichgewicht am unveränderlichen System aussprechen, schliesslich die m Gleich-

gewichtsbedingungen des geschlossenen Polygons:

$$\sum_{r=1}^{r=m} X_r = 0, \quad \sum_{r=1}^{r=m} Y_r = 0, \quad \sum_{r=1}^{r=m} \begin{vmatrix} \xi_r - x_m, & \eta_r - y_m \\ X_r & Y_r \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x_m - x_{s-1}, & y_m - y_{s-1}, & P_s \\ x_m - x_{m-1}, & y_m - y_{m-1}, & P_m \\ x_m - x_{m-2}, & y_m - y_{m-2}, & P_{m-1} \end{vmatrix} = 0, \quad s = 2, 3, \ldots (m-2). \qquad \text{(A)}$$

c) Die m Gleichgewichtsbedingungen enthalten $6m$ Grössen, nämlich die Kräfte X, Y, die Coordinaten ξ, η ihrer Angriffspunkte und die Coordinaten x, y der Scheitel. Gibt man noch die Länge $a_s = A_{s-1}A_s$ der Seiten durch Gleichungen, wie $a_s^2 = (x_s - x_{s-1})^2 + (y_s - y_{s-1})^2$, so hat man $2m$ Gleichungen zwischen den $6m$ Grössen.

Da das Dreieck eine unveränderliche Figur ist, so gilt für dasselbe die 4te Bedingung des Gleichgewichts nicht.

Sind X_s, Y_s und ξ_s, η_s als Functionen von x_{s-1}, y_{s-1} gegeben, so wird P_s gleichfalls eine Function von x_{s-1}, y_{s-1} und wenn man x_m, y_m, x_{m-1}, y_{m-1} als constant, x_{s-1}, y_{s-1} aber als Variabeln x, y ansieht, so stellt die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_m - x, & y_m - y & P_{x,y} \\ x_m - x_{m-1}, & y_m - y_{m-1}, & P_m \\ x_m - x_{m-2}, & y_m - y_{m-2}, & P_{m-1} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(B)}$$

eine Curve dar, auf welcher die Scheitel sämmtlich liegen (auch x_m, y_m; x_{m-1}, y_{m-1}; x_{m-2}, y_{m-2}). Es findet daher Gleichgewicht statt, wenn die drei Gleichgewichtsbedingungen für das unveränderliche System erfüllt sind und die Scheitel sämmtlich auf der Curve (B) liegen.

Fallen A_m, A_{m-1}, A_{m-2} in eine Gerade, so ist

$$(y_m - y_{m-1}) : (x_m - x_{m-1}) = (y_m - y_{m-2}) : (x_m - x_{m-2})$$

d. h.

$$\begin{vmatrix} x_m - x_{m-1}, & y_m - y_{m-1} \\ x_m - x_{m-2}, & y_m - y_{m-2} \end{vmatrix} = 0;$$

es wird daher der Coefficient von $P_{k,y}$ in (B) gleich Null und diese Gleichung vom ersten Grade. Sie stellt daher eine Gerade, nämlich $A_{m-2}A_m$ dar. Erfüllen also die Kräfte die Bedingungen, wie am unveränderlichen System und fallen die Scheitel alle in eine Gerade, so findet Gleichgewicht statt.

d) Werden die Seiten durch die Kräfte sämmtlich gepresst, so stellen die Gleichungen (A) auch dann noch das Gleichgewicht dar, wenn die Gelenke durchschnitten werden und die Seiten sich blos aneinander lehnen; werden sie alle gespannt, so besteht das Gleichgewicht auch noch fort, wenn die Seiten alle biegsam werden.

Die Gleichungen (A) stellen auch dann noch das Gleichgewicht des Polygons dar, wenn zwei Endpunkte fest werden; ebenso wenn eine Partie $A_m A_1 \ldots A_{p-1} A_p$ unveränderlich wird.

Das Gleichgewicht besteht auch fort, wenn sämmtliche Kräfte ihren Sinn umkehren.

e) Wir wollen jetzt annehmen, dass alle Kräfte in den Mitten der Seiten angreifen, dass also $p_r : q_r = 1 : 2$ sei für alle r, dass sie alle zu den Seiten, an welchen sie angreifen, senkrecht, dem Sinne nach aber alle nach aussen oder alle

nach innen gerichtet und dass ihre Intensitäten den Seiten proportional seien. Das Verhältniss der Kräfte zu den Seiten ist dann eine Constante $2h$, so dass man setzen kann:

$$X_s = -2h(y_s - y_{s-1}), \quad Y_s = 2h(x_s - x_{s-1}).$$

Man sieht leicht, dass die Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte am unveränderlichen System identisch erfüllt sind, und dass die Resultante aller an einer Parthie aufeinanderfolgender Seiten angreifenden Kräfte die Verbindungslinie des Anfangspunktes dieser Seitenpartie mit dem Endpunkte derselben rechtwinklig halbirt, nach innen oder aussen wirkt, je nachdem die Componenten nach aussen oder nach innen gerichtet sind und das Verhältniss der Resultanten zu der Verbindungslinie gleichfalls $2h$ ist. Es ist daher

$$[F_s] + [F_{s+1}] + \ldots + [F_m] = -\{[-2h(y_{s-1} - y_m)] + [2h(x_{s-1} - x_m)]\};$$

ebenso ist die Summe der Momente der Kräfte $F_s, \ldots F_m$ in Bezug auf irgend einen Punkt der Ebene gleich dem Momente dieser Resultanten. Nun stellt P_s die Summe der Momente der Kräfte $F_s, \ldots F_m$ in Bezug auf A_{s-1} dar und ist daher

$$P_s = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(x_{s-1} + x_m), & \frac{1}{2}(y_{s-1} + y_m) \\ -2h(y_{s-1} - y_m), & 2h(x_{s-1} - x_m) \end{vmatrix} = h[(x_{s-1}^2 + y_{s-1}^2) - (x_m^2 + y_m^2)]$$

$$P_{m-1} = h[(x_{m-2}^2 + y_{m-2}^2) - (x_m^2 + y_m^2)], \quad P_m = h[(x_{m-1}^2 + y_{m-1}^2) - (x_m^2 + y_m^2)].$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die letzte der Gleichungen (A), so geht (B) über in die Gleichung eines Kreises. Daher findet Gleichgewicht statt, wenn die Scheitel des Polygons auf einem Kreise liegen. Es gibt daher so viele Arten des Gleichgewichts als kreisförmige Anordnungen der Scheitel möglich sind.

f) Nehmen wir jetzt an, die Kräfte greifen in den Scheiteln an, so dass $\xi_r = x_r$, $\eta_r = y_r$, $\delta\xi_r = \delta x_r$, $\delta\eta_r = \delta y_r$, $\delta\xi_m = \delta x_m = \delta x$, $\delta\eta_m = \delta y_m = \delta y$. In diesem Falle vereinfachen sich die Formeln. Bildet man jetzt die Hauptgleichung

$$\sum_{r=1}^{r=m}(X_r\delta x_r + Y_r\delta y_r) = 0,$$

so erhält man

$$\delta x\sum_{r=1}^{r=m} X_r + \delta y\sum_{r=1}^{r=m} Y_r + \delta\alpha_1\sum_{r=1}^{r=m-1}\begin{vmatrix} x_r - x_m, & y_r - y_m \\ X_r & Y_r \end{vmatrix} + \delta\alpha_2\sum_{r=1}^{r=m-1}\begin{vmatrix} x_r - x_1, & y_r - y_1 \\ X_r & Y_r \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ \delta\alpha_s\sum_{r=1}^{r=m-1}\begin{vmatrix} x_r - x_{s-1}, & y_r - y_{s-1} \\ X_r & Y_r \end{vmatrix} + \cdots + \delta\alpha_{m-1}\begin{vmatrix} x_{m-1} - x_{m-2}, & y_{m-1} - y_{m-2} \\ X_{m-1} & Y_{m-1} \end{vmatrix} = 0,$$

indem $\delta\xi_m$ und $\delta\eta_m$ sich blos auf je ein Glied δx, δy reduciren. Man erhält also jetzt die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum_{r=1}^{r=m} X_r = 0, \sum_{r=1}^{r=m} Y_r = 0, \sum_{r=1}^{r=m-1}\begin{vmatrix} x_r - x_m, & y_r - y_m \\ X_r & Y_r \end{vmatrix} = 0, \sum_{s=2}^{s=m-1} P_s\delta\alpha_s = 0$$

nebst den Bedingungsgleichungen:

$$\sum_{s=2}^{s=m}(y_m - y_{s-1})\,\delta\alpha_s = 0, \quad \sum_{s=2}^{s=m}(x_m - x_{s-1})\,\delta\alpha_s = 0$$

und hierbei ist

$$P_s = \sum_{r=s}^{r=m-1} \begin{vmatrix} x_r - x_{s-1}, & y_r - y_{s-1} \\ X_r & Y_r \end{vmatrix}.$$

Eliminirt man $\delta\alpha_m$, welches jetzt in der 4. Gleichung nicht vorkommt, aus den Bedingungsgleichungen, so geben diese eine Gleichung von der Form:

$$\sum_{s=2}^{s=m-1} Q_s\,\delta\alpha_s = 0, \quad \text{wo} \quad Q_s = \begin{vmatrix} x_m - x_{m-1}, & y_m - y_{m-1} \\ x_m - x_{s-1}, & y_m - y_{s-1} \end{vmatrix}$$

ist. Die beiden Gleichungen $\sum_{s=2}^{s=m-1} P_s\,\delta\alpha_s = 0$ und $\sum_{s=2}^{s=m-1} Q_s\,\delta\alpha_s = 0$ aber liefern nach Elimination von $\delta\alpha_{m-1}$:

$$\begin{vmatrix} P_{m-1} & Q_{m-1} \\ \sum_{s=2}^{s=m-2} P_s\,\delta\alpha_s & \sum_{s=2}^{s=m-2} Q_s\,\delta\alpha_s \end{vmatrix} = 0,$$

oder da $\delta\alpha_2, \delta\alpha_3 \ldots \delta\alpha_{m-2}$ vollständig willkührlich sind

$$\begin{vmatrix} P_{m-1} & Q_{m-1} \\ P_s & Q_s \end{vmatrix} = 0,\ s = 2, 3, \ldots m-2, \quad \text{oder} \quad \frac{P_s}{Q_s} = \text{Const.},\ s = 2, 3, \ldots m-2.$$

In dieser Gleichung bedeutet P_s die Summe der Momente der an den Scheiteln $A_s, A_{s+1}, \ldots A_{m-1}$ angreifenden Kräfte in Bezug auf A_{s-1}; Q_s aber ist der doppelte Inhalt des Dreiecks $A_{m-1}A_mA_{s-1}$, welches A_{s-1} zur Spitze und $A_{m-1}A_m$ zu deren Gegenseite hat. Die Gleichung drückt daher aus, dass die Summe der Momente aller an den aufeinanderfolgenden Scheiteln $A_{s-1}, A_s, \ldots A_{m-1}$ angreifenden Kräfte in Bezug auf den Anfangsscheitel A_{s-1} dieser Folge zu dem Dreieck $A_{s-1}A_{m-1}A_m$ in constantem Verhältnisse steht.

Aus diesem Satze folgt u. a. ein Satz über die regulären Polygone. Gleiche Kräfte, welche in den Ecken eines regulären Polygons angreifen und alle in dem einen oder dem andern Sinne nach dem Mittelpunkt gerichtet sind, sind im Gleichgewicht. Daher:

In jedem regulären geschlossenen Polygon $A_1A_2 \ldots A_s \ldots A_m$, bilden gleiche Strecken $A_1P_1, A_2P_2 \ldots A_sP_s \ldots A_mP_m$, welche auf den Verbindungslinien $A_1O, A_2O, \ldots A_sO, \ldots A_mO$ des Mittelpunktes O mit den Scheiteln alle in demselben Sinne (dem Mittelpunkt zu- oder abgewandt) aufgetragen werden, Dreiecke $A_sA_{s+1}P_{s+1}$, $A_sA_{s+2}P_{s+2}, \ldots A_sA_{m-1}P_{m-1}$, deren Summe proportional ist dem Dreiecke $A_sA_{m-1}A_m$, für jeden Werth von s.

Vgl. über das vorliegende Problem Ruffini, *dell' equilibrio dei poligoni piani di forma variabile* (Mem. dell' Accad. di Bologna, Ser. III[za], T. X, p. 1—22; 1879), woselbst der zuletzt angeführte Satz auch rein geometrisch inductiv bewiesen ist.

§. 14. Die Brauchbarkeit des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten ist geknüpft an die Kenntniss aller Bewegungen, deren ein System

fähig ist. Für das unveränderliche System ist diese Kenntniss vollkommen zu erlangen und werden wir der Beweglichkeit desselben und deren Beschränkung durch Bedingungen eine ausführliche Betrachtung widmen. Für das veränderliche kann dasselbe nicht behauptet werden, doch sind wichtige Andeutungen in dieser Hinsicht möglich. Wenn es sich um die Auffindung der Gleichgewichtslagen eines Systems handelt, wird die Brauchbarkeit in der Regel aber durch die Reibung bedeutend eingeschränkt. Denn um die Gleichgewichtslagen zu finden, müssen die Widerstände und die von ihnen abhängige Reibung eliminirt werden. Durch die mit der Natur des Systems verträglichen Verschiebungen können die ersteren eliminirt werden, weil sie zu den Bahnen der Punkte senkrecht sind, nicht aber die Reibung, da sie die Richtung dieser Verschiebungen selbst hat. Um sie zu eliminiren sind andere Verschiebungen zu wählen. Glücklicherweise kann man aber Verschiebungen bezeichnen, durch welche Widerstände und Reibung in vielen Fällen zugleich eliminirt werden können.

Es sei (xy) ein Punkt eines ebenen Systems, welcher auf der Curve $L = 0$ zu bleiben gezwungen ist und finde auf derselben Reibung vom Coefficienten μ statt. Der Normalwiderstand der Curve sei N und folglich die Reibung μN. Beide Kräfte sind zusammen äquivalent einer einzigen Kraft $K = N\sqrt{1 + \mu^2}$, deren Richtung mit der Normalen den Reibungswinkel ϱ bildet, für welchen $\operatorname{tg}\varrho = \mu$ ist. Ertheilt man nun dem System oder einem Systemtheil, welcher den Punkt (x, y) enthält, eine Verschiebung senkrecht zu dieser Richtung, so wird mithin die virtuelle Arbeit des Widerstandes und der Reibung zugleich Null und fallen beide aus der betreffenden Gleichgewichtsbedingung, die durch diese Verschiebung erhalten wird, heraus. Die Gerade senkrecht zur Kraft K, längs welcher der Punkt verschoben wird, wollen wir eine Reibungslinie nennen. Da μ mit dem Zeichen $(+)$ oder $(-)$ genommen werden kann, so gibt es zwei Reibungslinien, welche mit der Normalen gleiche Winkel $\frac{1}{2}\pi - \varrho$ und mit der Tangente gleiche Winkel ϱ bilden. Bezeichnet daher α den Neigungswinkel der Tangente gegen die Axe der x, so bildet die Normale der einen Reibungslinie mit derselben Axe den Winkel $\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \varrho\right)$, die andere den Winkel $\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \varrho\right)$. Die Gleichung der ersteren ist daher

$$-(\xi - x)\sin(\alpha - \varrho) + (\eta - y)\cos(\alpha - \varrho) = 0$$

und da für eine Verschiebung des Punktes (xy) auf ihr $\xi - \alpha$, $\eta - y$ durch δx, δy ersetzt werden können, so besteht die Gleichung

$$-\delta x \sin(\alpha - \varrho) + \delta y \cos(\alpha - \varrho) = 0,$$

worin

$$\sin(\alpha-\varrho)=\sin\alpha\cos\varrho-\cos\alpha\sin\varrho=\left(\frac{dy}{dx}-\mu\right)\cdot\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}(1+\mu^2)^{-\frac{1}{2}}$$

und

$$\cos(\alpha-\varrho)=\cos\alpha\cos\varrho+\sin\alpha\sin\varrho=\left(1+\mu\frac{dy}{dx}\right)\cdot\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}(1+\mu^2)^{-\frac{1}{2}}$$

zu setzen ist, wodurch sie übergeht in

$$-\left(\frac{dy}{dx}-\mu\right)\delta x+\left(1+\mu\frac{dy}{dx}\right)\delta y=0$$

oder $$(\mu\delta x+\delta y)\,dx-(\delta x-\mu\delta y)\,dy=0,$$

wozu, um $\frac{dy}{dx}$ zu erhalten, noch die Differentialgleichung von $L=0$, d. h.

$$L'_x\,dx+L'_y\,dy=0$$

hinzutritt. Die Elimination von dx und dy gibt

$$\begin{vmatrix}\mu\delta x+\delta y, & -\delta x+\mu\delta y\\ L'_x & L'_y\end{vmatrix}=0 \quad\text{oder}\quad (L'_x+\mu L'_y)\,\delta x+(L'_y-\mu L'_x)\,\delta y=0$$

als die Gleichung, welcher δy, δx für die genannte Verschiebung genügen müssen. In derselben kann auch $-\mu$ an die Stelle von μ treten, dann bezieht sich die Verschiebung auf die andere Reibungslinie. Für $\mu=0$ fallen beide Reibungslinien mit der Tangente zusammen und geht diese Bedingungsgleichung über in $L'_x\delta x+L'_y\delta y=0$, wie selbstverständlich ist.

Ist das System unveränderlich und sind zwei Punkte vorhanden, welche sich mit Reibung auf ihren Bahnen bewegen, so kann man demselben zur Bestimmung der Gleichgewichtslage eine virtuelle Rotation um einen der vier Punkte als Momentancentrum ertheilen, in welchem sich die Paare von Normalen der Reibungslinien beider Punkte schneiden, welche nicht demselben Punkt angehören.

Beispiel.

In der Aufgabe No. 2, S. 62, über den Cylinder, welcher mit Reibung μ, μ' an der Horizontalen und Verticalen anlehnt, werde $r=0$ gesetzt und dadurch der Cylinder auf eine schwere Gerade reducirt. Die Coordinaten der Punkte A, B sind x, 0; 0, y'; die von S gleich $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}y'$ und es ist weiter $\operatorname{tg}\psi=y':x$, sowie $x^2+y'^2=4l^2$. Für den Punkt A ist $L\equiv y=0$, $L'_x=0$, $L'_y=1$, mithin die Bedingungsgleichung, welcher δx, δy genügen müssen, für eine Verschiebung auf der Reibungslinie $-\mu\delta x+\delta y=0$. Für B ist $L\equiv x'=0$, also $L'_x=1$, $L'_y=0$ und die Bedingung $\delta x'-\mu'\delta y'=0$. Zugleich besteht weiter die Gleichung $x\delta x+y'\delta y'=0$. Man hat daher überhaupt das Gleichungssystem:

$$\tfrac{1}{2}G\delta y'=0,\quad -\mu\delta x+\delta y=0,\quad \delta x'-\mu'\delta y'=0,\quad x\delta x+y'\delta y'=0.$$

Aus ihm ergibt sich für die Gleichgewichtslage ohne weitere Elimination der Widerstände $\operatorname{tg}\psi=y':x=-\delta x:\delta y'$.

Die Coordinaten von A sollen mit x, y, die von B mit x', y' bezeichnet werden; die von S sind dann $\frac{1}{2}(x+x')$, $\frac{1}{2}(y+y')$. Die Hauptgleichung wird

$G(\delta y + \delta y') = 0$. Für A besteht die Bedingung $L \equiv y = 0$, so dass $L'_x = 0$, $L'_y = 1$ und hiemit $-\mu \delta x + \delta y = 0$; für B wird $L \equiv x'$, $L'_{x'} = 1$, $L'_{y'} = 0$, mithin $\delta x' - \mu' \delta y' = 0$. Für die constante Entfernung AB ist

$(x - x')^2 + (y - y')^2 = 4l^2$, mithin $(x - x')(\delta x - \delta x') + (y - y')(\delta y - \delta y') = 0$.
Aus dem Gleichungssystem

$$-\mu \delta x + \delta y = 0, \quad \delta x' - \mu' \delta y' = 0, \quad \delta y + \delta y' = 0,$$
$$(x - x')(\delta x - \delta x') + (y - y')(\delta y - \delta y') = 0$$

folgt für die Gleichgewichtslage der Winkel ω ohne weiter erforderliche Elimination von Widerständen, nämlich

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{y - y'}{x - x'} = -\frac{\delta x - \delta x'}{\delta y - \delta y'} = \frac{1 - \mu \mu'}{2\mu'}.$$

Für ein räumliches System kann der Widerstand einer Fläche und die Reibung auf derselben eliminirt werden, indem man irgend eine Verschiebung des sich reibenden Punktes in der zur Richtung von $K = N\sqrt{1 + \mu^2}$ senkrechten Ebene wählt. Sind α, β, γ die Richtungswinkel dieser Kraft, so ist

$$(\xi - x) \cos \alpha + (\eta - y) \cos \beta + (\zeta - z) \cos \gamma = 0$$

die Gleichung dieser Ebene und indem man $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ in δx, δy, δz übergehen lässt, ergibt sich als Bedingung für die Verschiebung

$$\delta \xi \cos \alpha + \delta \eta \cos \beta + \delta \zeta \cos \gamma = 0.$$

Da aber K mit der Normalen der Fläche, welche $L = 0$ sei, den Winkel ϱ bildet, wofür $\operatorname{tg} \varrho = \mu$ ist, so besteht weiter die Gleichung

$$L'_x \cos \alpha + L'_y \cos \beta + L'_z \cos \gamma = \sin \varrho \, (L'^2_x + L'^2_y + L'^2_z)^{\frac{1}{2}},$$

wofür auch

$$\begin{vmatrix} L'_y & L'_z \\ \cos \beta & \cos \gamma \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} L'_z & L'_x \\ \cos \gamma & \cos \alpha \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} L'_x & L'_y \\ \cos \alpha & \cos \beta \end{vmatrix}^2 = \mu^2 (L'^2_x + L'^2_y + L'^2_z)$$

gesetzt werden kann, indem man $\cos \varrho$ bildet und $\sin \varrho : \cos \varrho = \mu$ setzt. Diese Gleichung drückt aus, dass die Richtung $(\alpha \beta \gamma)$ dem Reibungskegel angehört.

Vgl. Petersen, *Dell' uso del principio delle velocità virtuali con riguardo all' attrito* (*Brioschi e Cremona*, *Annali di matematica*, Ser. 2da, T. IV, p. 86). *)

---

*) Petersen gibt in dieser Abhandlung auch den Gebrauch an, den man von den Reibungslinien bei der Untersuchung der Bewegung eines Punktes machen kann, der sich auf gegebener Curve mit Reibung bewegt. Aus den Componenten $\frac{dv}{dt}$ und $v^2 : \varrho$ der Beschleunigung längs der Tangente und Normalen einer ebenen Curve bildet man leicht die Beschleunigungscomponente längs der Reibungslinie (es gibt für die Bewegung nur eine Reibungslinie), nämlich

$$\frac{dv}{dt} \cos \varrho + \frac{v^2}{\varrho} \sin \varrho \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \left(\frac{dv}{dt} + \mu \frac{v^2}{\varrho} \right).$$

Widerstand und Reibung haben aber keine Componente längs der Reibungslinie. Sind also 1. keine weiteren gegebenen Beschleunigungen vorhanden, so folgt die Bewegung der Gleichung $\frac{dv}{dt} + \mu \frac{v^2}{\varrho} = 0$ oder, wenn $\varrho = \frac{ds}{d\varepsilon} = v \frac{dt}{d\varepsilon}$ eingeführt

§. 15. Der Nerv des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten ist der allgemeine Satz über zwei Streckensysteme, Cap. III, §. 3, S. 28; man kann dem Princip verschiedene Formen geben, je nachdem man die Form des zweiten Streckensystems, welches den virtuellen Geschwindigkeitszustand repräsentirt, wählt. Eine interessante solche Form hat Chasles gegeben (*Propriétés géom. relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace.* Comptes r. T. XVI, p. 1420—1432 [1843] am Ende). Wie man auch immer nämlich den virtuellen Geschwindigkeitszustand eines unveränderlichen Systems in zwei Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 um zwei conjugirte Axen a_1, a_2 auflösen mag, so ist $\omega_1 \omega_2 d \sin(a_1 a_2)$ eine Constante, wo d den kürzesten Abstand der Axen bezeichnet (S. B. I, S. 68), nämlich gleich dem Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit ω_0 um die Momentanaxe und der Translationsgeschwindigkeit v_0 parallel derselben. Nun stellt aber $d.\omega_2$ die Geschwindigkeit des Fusspunktes von d auf der Axe a_1 und folglich $\omega_2 d \sin(a_1 a_2)$ die Projection dieser Geschwindigkeit auf dieselbe Axe dar, eine Grösse, welche für alle Punkte von a_1 einen und denselben Werth hat (S. B. I, S. 287). Bezeichnen wir sie mit v_a, so ist $\omega_1 v_a = \omega_0 v_0$.

---

wird, $\frac{dv}{v} + \mu d\varepsilon = 0$, woraus die Geschwindigkeit v als Function der Summe der Contingenzwinkel, d. h. des Winkels ε, den die Tangente mit der x-Axe bildet, folgt, nämlich $v = v_0\, e^{-\mu\varepsilon}$. Es entspricht dabei v_0 dem Werthe $\varepsilon = 0$. Es ist hierbei $d\varepsilon$ positiv, also ε wachsend, die Curve also convex gegen die Abscissenaxe gedacht. 2. Ist der Punkt der Schwere unterworfen, so hat man die Gleichung

$$\frac{dv}{dt} + \mu v \frac{d\varepsilon}{dt} = -g\frac{dy + \mu dx}{ds},$$

denn die Reibungslinie bildet mit der x-Axe einen Winkel gleich der Summe von ϱ und dem Winkel, den die Tangente mit derselben Axe bildet, daher ist die Componente der Schwere längs der Reibungslinie

$$\frac{-g}{\sqrt{1+\mu^2}}\,\frac{dy + \mu dx}{ds}.$$

Die Differentialgleichung der Bewegung ist äquivalent mit

$$d\cdot v^2 + 2\mu v^2 d\varepsilon = -2g(\sin\varepsilon + \mu\cos\varepsilon)\, ds,$$

woraus folgt

$$v^2 = -2ge^{-2\mu\varepsilon}\left[\int e^{-2\mu\varepsilon}(\sin\varepsilon + \mu\cos\varepsilon)\, ds + C\right],$$

worin $ds = \varrho d\varepsilon$ zu setzen und ϱ eine gegebene Function von ε ist. 3. Sind X, Y die Componenten der gegebenen Beschleunigung in Bezug auf die Axen der x und y, so hat man in ähnlicher Weise:

$$d\cdot v^2 + 2\mu v^2 d\varepsilon = \{2X(\cos\varepsilon - \mu\sin\varepsilon) + 2Y(\sin\varepsilon + \mu\cos\varepsilon)\}\, ds.$$

Hängen X, Y blos von x und y ab, so kann diese Gleichung integrirt werden, denn $dx = ds\cos\varepsilon$, $dy = ds\sin\varepsilon$ u. s. w.

Ist nun P, P', ... das Kräftesystem, und wählen wir die Richtungen der Kräfte P nach und nach zu der Axe a_1, so wird $\Sigma P v_a = \omega_0 v_0 \Sigma \frac{P}{\omega}$, und da $\Sigma P \delta p = \Sigma P v_a dt = 0$ sein muss, so wird $\Sigma \frac{P}{\omega} = 0$, d. h.

Zum Gleichgewicht eines Kräftesystems, welches an einem unveränderlichen Punktsystem angreift, ist nothwendig und hinreichend, dass für jeden beliebigen virtuellen Geschwindigkeitszustand die Summe der Quotienten aus den Kräften, dividirt durch die Componenten der Winkelgeschwindigkeit des Geschwindigkeitszustandes um die Kraftrichtungen gleich Null ist.

X. Capitel.

Virtueller Coefficient und Cylindroid. Reciprocale Axensysteme.

§. 1. Derjenige Theil der Statik, welcher die gleichzeitige Betrachtung zweier oder mehrerer Streckensysteme zur Grundlage hat, wie das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, hat in neuester Zeit durch die Arbeiten von Robert Stawell Ball sehr wesentliche Erweiterungen erfahren, welche von tiefgreifender Einwirkung auf die Gestaltung der gesammten Mechanik geworden sind. Wir haben bereits B. I, S. 301 auf die Bedeutung dieser Forschungen hingewiesen und wollen die Hauptresultate, welche der Statik angehören, hier entwickeln.

§. 2. Nach B. I, S. 30 ist jedes Streckensystem, für welches die Verschiebbarkeit und Resultantenbildung der Strecken gilt, äquivalent der Verbindung (R, G_0) einer Einzelstrecke R und eines Axenmomentes G_0 längs der Centralaxe μ_0 des Streckensystems und stellt $G_0 : R = p$ den Parameter des durch das Streckensystem bestimmten Complexes dar. Wir tragen die Länge des Parameters auf der Centralaxe auf und betrachten sie als positiv oder negativ, je nachdem die Grössen R und G_0 gleichen oder entgegengesetzten Sinn haben. Den Sinn drücken wir auch bei p durch eine angefügte Pfeilspitze aus und hängen zum Zeichen, dass diese Strecke an der Axe μ_0 haftet, je nach Bedürfniss, dem Buchstaben p den Index von μ_0 an, so dass p_0 eine nach Grösse, Sinn und Richtungslinie bestimmte Strecke bedeutet, deren Lage blos auf ihrer Richtungslinie, nicht aber im Raume, willkührlich wählbar ist. Wir nennen diese Grösse den Axenparameter der Streckenverbindung (R, G_0). Die Gleichung $pR = G_0$ zeigt, dass durch den Axenparameter p und die Einzelstrecke R das Axenmoment G_0 und also die Verbindung (R, G_0) bestimmt ist. Zur Bestim-

mung von p sind 5 Grössen erforderlich, vier davon bestimmen die Lage der Axe, die fünfte die Grösse von p; zur Bestimmung der Streckenverbindung (R, G_0) dienen daher 6 Grössen, nämlich fünf für p und die Grösse der Einzelstrecke R.

Für ein System von Winkelgeschwindigkeiten (ω, v_0), wofür die Einzelstrecke ω die resultirende Winkelgeschwindigkeit um die Centralaxe und v_0 die Translationsgeschwindigkeit parallel derselben bedeutet, bestimmt $p = v_0 : \omega$ in der Entfernung gleich der Einheit von der Axe eine Schraube um diese Axe, so dass durch sie und die Winkelgeschwindigkeit ω die Elementarwindungsbewegung des Systems gegeben ist. Ball nennt daher den Axenparameter p den pitch dieser Schraube, wofür Fiedler den Ausdruck Pfeil gebraucht; wir ziehen es vor Axenparameter der Windung oder Windungsparameter zu sagen.

Für ein Kräftesystem (R, G_0), wofür R die Resultante längs der Centralaxe und G_0 das Axenmoment parallel derselben bedeutet, denkt Ball sich gleichfalls eine durch $p = G_0 : R$ als Steigungsverhältniss bestimmte Schraube, wenn auch (R, G_0) nicht gerade um diese Axe eine Bewegung hervorruft. Die Kraftverbindung (R, G_0) nennt Ball einen wrench, welchen Ausdruck Fiedler mit Winder wiedergibt. Um zu verhüten, dass man denke, der Winder bringe eine Elementarbewegung um die ebengenannte Schraube hervor, sind wir geneigt, für den Ausdruck wrench das früher von Plücker in einem nicht ganz klaren Sinne gebrauchte Wort Dyname anzuwenden. Es kommt uns mehr darauf an, das Wesen der Kraftverbindung anzudeuten, als die Hervorrufung einer Elementarwindung, zu welcher ohnehin noch elementare Centripetalbeschleunigungen hinzutreten müssten, um die Gesammtänderung des Geschwindigkeitszustandes eines Systems darzustellen (S. B. I, S. 505).

Dem Obigen zufolge ist eine Windungsgeschwindigkeit (ω, v_0), wie eine Dyname (R, G_0) durch 6 Grössen vollständig bestimmt.

Reducirt sich der Axenparameter p der Windungsgeschwindigkeit (ω, v_0) auf Null, so zeigt die Gleichung $p\omega = v_0$, dass, wenn ω nicht unendlich wird, die Translationsgeschwindigkeit v_0 verschwindet und die Windungsgeschwindigkeit in eine blosse Winkelgeschwindigkeit ω übergeht. Wird $p = \infty$, so muss ω verschwinden und reducirt sich die Windungsgeschwindigkeit auf eine Translationsgeschwindigkeit v_0 parallel der Schraubenaxe. Der Axenparameter hat in diesem Falle blos Axenrichtung, ohne bestimmte Lage der Axe.

Wird der Axenparameter p der Dyname (R, G_0) gleich Null, so folgt ebenso aus $pR = G_0$, dass die Dyname sich auf eine Einzelkraft R, ist $p = \infty$, dass sie sich auf ein Paar G_0 reducirt. Im letzteren Falle ist die Axe von p der Lage nach unbestimmt.

§. 3. Eine Dyname (R, G) greife an einem unveränderlichen System an; man ertheilt dem System eine virtuelle Windungsgeschwindigkeit (ω, v), vermöge welcher dasselbe die virtuelle Windung $(\delta\vartheta, \delta\tau)$ erleidet. Wir wollen die virtuelle Arbeit der Dyname in Bezug auf die virtuelle Windung bestimmen. Es sei α die Axe und $p_\alpha = G : R$ der Axenparameter der Dyname, also $G = p_\alpha R$; β die Axe und $p_\beta = v : \omega = \delta\tau : \delta\vartheta$ der Axenparameter der Windung, also $\delta\tau = p_\beta\,\delta\vartheta$, sowie d der kürzeste Abstand der Axen (Schrauben) α, β und λ der von ihnen gebildete Winkel. Wir wählen β zur x-Axe und die Richtung des kürzesten Abstandes d zur z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems (Fig. 67). Indem wir die Kräfte der Dynamen für den Ursprung O reduciren, erhalten wir an Componenten X, Y, Z der Resultanten und L, M, N des resultirenden Axenmomentes

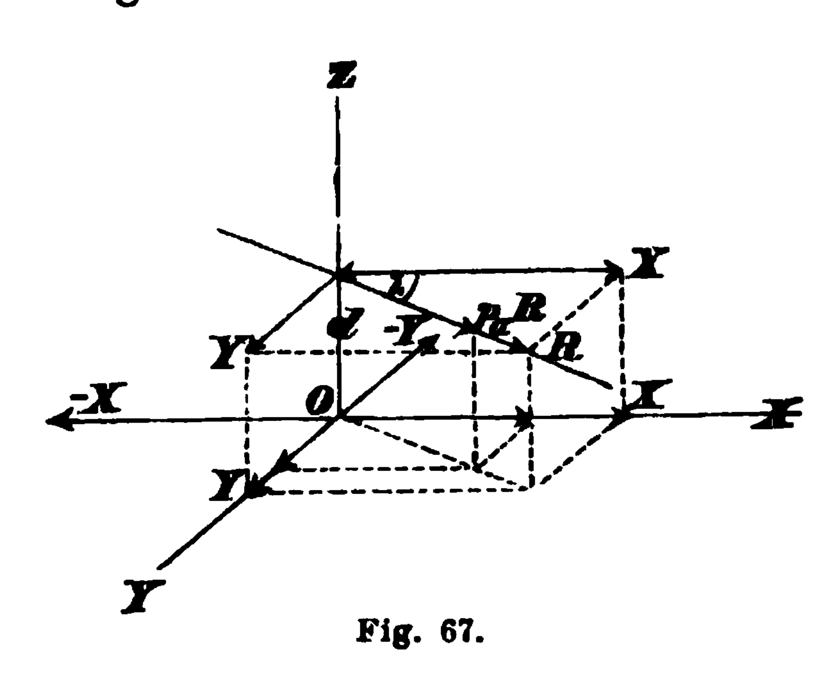


Fig. 67.

$$X = R\cos\lambda, \qquad L = p_\alpha R\cos\lambda - Rd\sin\lambda,$$
$$Y = R\sin\lambda, \qquad M = p_\alpha R\sin\lambda + Rd\cos\lambda,$$
$$Z = 0, \qquad N = 0.$$

Die Arbeit der Dyname entspringt nun aus den Arbeiten ihrer vier Componenten in Bezug auf die Rotation und die Translation der Windung um die Axe α. Von den 8 hier in Frage kommenden Partialarbeiten verschwinden aber 6. In Bezug auf Rotation leistet nämlich blos L Arbeit und ist dieselbe gleich dem Produkt aus L in die Elementaramplitude $\delta\vartheta$, d. h.

$$R\delta\vartheta\,(p_\alpha\cos\lambda - d\sin\lambda).$$

Rücksichtlich der Translation ergibt sich blos eine Arbeit von Seiten X, nämlich $R\cos\lambda\cdot\delta\tau = Rp_\beta\delta\vartheta\cdot\cos\lambda$. Daher ist die Gesammtarbeit der Dyname in Bezug auf die Windung $(\delta\vartheta, \delta\tau)$

$$R\delta\vartheta\,[(p_\alpha + p_\beta)\cos\lambda - d\sin\lambda] = R\delta\vartheta\begin{vmatrix} p_\alpha + p_\beta & \sin\lambda \\ d & \cos\lambda \end{vmatrix}.$$

Den Coefficienten des Produkts der Intensität R und der Amplitude $\delta\vartheta$ bezeichnet Ball mit $2\varpi_{\alpha\beta}$ und nennt ihn den virtuellen Coefficienten der Schrauben α, β (der Axenparameter p_α, p_β), so dass er also setzt

$$2\varpi_{\alpha\beta} = (p_\alpha + p_\beta)\cos\lambda - d\sin\lambda.$$

Diese Grösse ist symmetrisch in Bezug auf p_α und p_β d. h.

Die virtuelle Arbeit einer Dyname in Bezug auf irgend eine

virtuelle Windung bleibt dieselbe, wenn die Axen der Dyname und der Windung mit einander vertauscht werden.

Für den Fall des Gleichgewichtes eines an einem freien unveränderlichen Punktsystem angreifenden Kräftesystems muss die virtuelle Arbeit aller Kräfte, also auch die der resultirenden Dyname verschwinden. Man kann daher das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für diesen Fall auch in folgende Form einkleiden:

Zum Gleichgewicht eines Kräftesystems am freien unveränderlichen Punktsystem ist erforderlich und hinreichend, dass der virtuelle Coefficient der resultirenden Dyname in Bezug auf jede virtuelle Windung verschwinde.

Zwei Axenparameter p_α, p_β (Schrauben), deren virtueller Coefficient $(p_\alpha + p_\beta)\cos\lambda - d\sin\lambda$ gleich Null ist, heissen reciprocale Axenparameter (Schrauben). Man kann daher auch sagen:

Zum Gleichgewicht eines Kräftesystems an einem freien unveränderlichen Punktsystem ist erforderlich und hinreichend, dass der Axenparameter der resultirenden Dynamen zu jedem beliebigen Axenparameter des Raumes reciprocal sei.

§. 4. Der virtuelle Coefficient zweier Axenparameter p_α, p_β ist Null: 1. wenn die Axen sich rechtwinklig schneiden; denn dann ist $d = 0$ und $\cos\lambda = 0$; 2. wenn $p_\alpha + p_\beta = 0$ und $d = 0$ ist; 3. wenn die Axen parallel sind und $p_\alpha + p_\beta = 0$; 4. wenn die Axen zusammenfallen und $p_\alpha + p_\beta = 0$ ist; 5. wenn überhaupt $\operatorname{tg}\lambda = (p_\alpha + p_\beta) : d$ ist.

§. 5. Zwei Dynamen von entgegengesetzt gleichen Intensitäten der Einzelkräfte bei zusammenfallenden Axen und gleichen Parametern sind im Gleichgewicht. Zwei Dynamen verschiedener Axen von endlichen Intensitäten der Einzelkräfte können nicht im Gleichgewicht sein. Der erste dieser Sätze ist selbstverständlich, den zweiten wollen wir mit Hülfe des virtuellen Coefficienten beweisen. Sind nämlich R, R' die Intensitäten, p_α, $p_{\alpha'}$ die Parameter der Dynamen mit den Axen α, α' und ertheilen wir dem System, an welchem sie angreifen, eine unendlich kleine Windung $(\delta\vartheta, \delta\tau)$ um eine Axe ξ, so müsste, wenn Gleichgewicht möglich wäre, die Summe der virtuellen Arbeiten $2\delta\vartheta(R\varpi_{\alpha\xi} + R'\varpi_{\alpha'\xi})$, d. h. $R\varpi_{\alpha\xi} + R'\varpi_{\alpha'\xi} = 0$ sein. Wählen wir nun die Axe ξ reciprocal zu α', so wird $\varpi_{\alpha'\xi} = 0$ und bleibt $\varpi_{\alpha\xi} = 0$, d. h. ist ξ reciprocal zu der einen Axe α oder α', so ist sie es auch zu der andern α' oder α. Es sei nun ξ eine Axe, welche α rechtwinklig schneidet. Solcher Axen gibt es unendlich viele und wenn λ der Winkel, den irgend eine von ihnen mit α' bildet und d der kürzeste Abstand von α' und ξ ist, so muss

$$2\varpi_{\alpha'\xi} = (p_{\alpha'} + p_\xi)\cos\lambda - d\sin\lambda = 0$$

sein. Da diese Gleichung für unendlich viele Werthe von λ gilt, so muss $p_{\alpha'} + p_\xi = 0$ und $d = 0$ sein, d. h. alle solche Axen ξ müssen von α' geschnitten werden und p_ξ ist $p_{\alpha'}$ entgegengesetzt gleich. Die erste dieser Bedingungen fordert, dass α' mit α zusammenfalle, was gegen die Voraussetzung ist.

Dieselben Sätze gelten auch von Windungsgeschwindigkeiten, wie man sieht, indem man eine Dyname zu Hülfe nimmt und ähnlich schliesst.

§. 6. Wir wollen jetzt das Gleichgewicht dreier Dynamen oder dreier Windungsgeschwindigkeiten untersuchen. Die Frage hiernach ist identisch mit der Frage nach der Aequivalenz der Verbindung zweier Dynamen oder Windungsgeschwindigkeiten mit einer dritten. Bereits B. I, S. 184 u. 288 ergab sich, dass zwei oder mehrere Windungsgeschwindigkeiten einer einzigen Windungsgeschwindigkeit äquivalent sind; der dort geführte Beweis kann auf Dynamen unmittelbar angewandt werden. Es ist jedoch eine ausführlichere Erörterung dieses Gegenstandes nothwendig. Dabei wollen wir allgemein eine Dyname durch (a, p_α) bezeichnen, wo a die Intensität der Einzelkraft und p_α den Parameter bedeutet, dessen Suffix α zugleich die Axe bezeichnen soll. Dasselbe Zeichen soll auch eine Windungsgeschwindigkeit ausdrücken, wobei dann nur a die Winkelgeschwindigkeit bedeutet.

Wir nehmen zunächst an, es seien zwei Dynamen (a, p_α) und (b, p_β) gegeben, deren Axen α, β sich in einem Punkte O rechtwinklig schneiden; die aus ihnen resultirende Dyname sei (r, p) und γ ihre Axe. Die Intensitäten a, b liefern die durch O gehende Intensität r in der Ebene $(\alpha\beta)$, deren Richtung mit der Axe α den Winkel ϑ bildet, für welchen $\operatorname{tg}\vartheta = b : a$, während der Werth von $r = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ ist. Die Axenmomente ap_α, bp_β der Dynamen zerlegen wir parallel und senkrecht zu r; die algebraische Summe ihrer zu r senkrechten Componenten liefert ein Axenmoment, mit dessen Hülfe r in die Richtung der Axe γ der resultirenden Dyname verlegt wird, während die Componentensumme parallel zu r das Axenmoment dieser Dyname selbst bildet. Die letztere Summe ist daher

$$rp = ap_\alpha\cos\vartheta + bp_\beta\sin\vartheta,$$

woraus man mit Rücksicht auf $a = r\cos\vartheta$, $b = r\sin\vartheta$ den Parameter p der resultirenden Dyname erhält, nämlich

$$p = p_\alpha\cos^2\vartheta + p_\beta\sin^2\vartheta.$$

Die erstere Summe ist $ap_\alpha\sin\vartheta - bp_\beta\cos\vartheta$ oder $r(p_\alpha - p_\beta)\sin\vartheta\cos\vartheta$. Ist $\varkappa$ die Strecke senkrecht zur Ebene $(\alpha\beta)$, um welche r zu verlegen ist, damit das aus dieser Verlegung entspringende Paar $r\varkappa$ dies Axenmoment tilge, so folgt aus $r\varkappa = r(p_\alpha - p_\beta)\sin\vartheta\cos\vartheta$ der Abstand

$$\varkappa = (p_\alpha - p_\beta) \sin \vartheta \cos \vartheta = \tfrac{1}{2} (p_\alpha - p_\beta) \sin 2\vartheta.$$

Durch $$r = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}, \; p = p_\alpha \cos^2 \vartheta + p_\beta \sin^2 \vartheta$$

und $$\varkappa = (p_\alpha - p_\beta) \sin \vartheta \cos \vartheta$$

ist die resultirende Dyname (r, p) vollständig bestimmt. Dieselben Betrachtungen gelten für die aus zwei Windungsgeschwindigkeiten (a, p_α), (b, p_β) resultirende Windungsgeschwindigkeit (r, p).

Der Winkel ϑ, welchen die Axe der resultirenden Dyname mit der Axe α bildet, hängt blos von dem Verhältniss der Parameter a und b ab, nicht von deren absoluter Grösse. So lange dies Verhältniss ungeändert bleibt, behält die Axe γ der Dyname dieselbe Lage. Diese Axe schneidet das Perpendikel OZ, welches man in O auf der Ebene $(\alpha\beta)$ errichten kann, im Abstande $\varkappa$ von O, welcher von der Differenz der Parameter und dem Winkel ϑ abhängt. Eine durch dies Perpendikel gehende, gegen α unter dem Winkel ϑ geneigte Ebene enthält die Axe γ. Beschreibt man in dieser Ebene mit $p_\alpha - p_\beta$ als Durchmesser einen Kreis (Fig. 68), welcher das Perpendikel in O berührt und schneidet ihn mit einer Geraden OQ, welche gegen die Ebene $(\alpha\beta)$ den Winkel ϑ bildet, in Q, so ist die von Q auf das Perpendikel gefällte Senkrechte die Axe γ. Dreht sich die Ebene um das Perpendikel um, so dass ϑ alle Werthe von 0 bis 2π continuirlich durchläuft, so dreht sich die Axe γ um OZ und rückt dabei längs dieser Geraden auf und ab. Für $\vartheta = 0$ fällt sie in der Ebene $(\alpha\beta)$ mit α zusammen, für $\vartheta = \frac{1}{4}\pi$ erreicht ihr Abstand $\varkappa$ von derselben sein Maximum $\frac{1}{2}(p_\alpha - p_\beta)$, für $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ fällt sie wieder in die Ebene $(\alpha\beta)$ und zwar mit β zusammen, für $\vartheta = \frac{3}{4}\pi$ erreicht sie auf der entgegengesetzten Seite das Maximum des Abstandes von $(\alpha\beta)$, für $\vartheta = \pi$ tritt sie wieder in α ein etc. Die Axe γ beschreibt während dieser Bewegung eine geradlinige Fläche, welche die Axen α, β enthält. Das Perpendikel OZ heisst die Directrix der Fläche; sie hat mit der Fläche nur die Strecke $p_\alpha - p_\beta$, die Axe, gemein; diese aber gehört der Fläche als eine Doppel- oder Knotenlinie an; denn während γ die Fläche beschreibt, durchläuft ihr Schnittpunkt mit der Directrix diese Strecke zweimal. Durch jeden Punkt dieser Strecke gehen also zwei Axen γ, entsprechend den Winkeln ϑ und $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$.

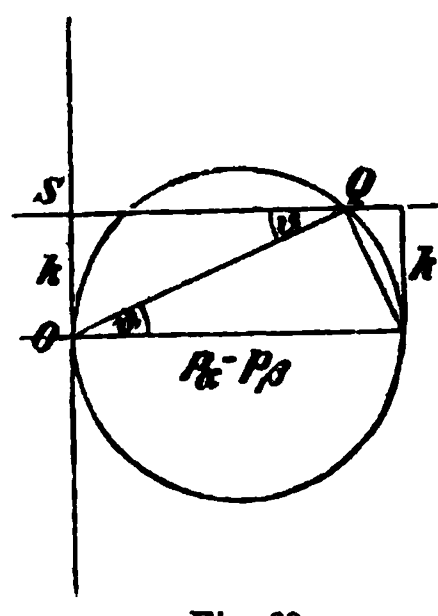


Fig. 68.

Um eine Gleichung für die Fläche zu finden, wählen wir die Richtungen von α, β, $\varkappa$ zu Axen der x, y, z und eliminiren aus den Gleichungen der Axe γ, nämlich

$$y = x \operatorname{tg} \vartheta, \quad z = (p_\alpha - p_\beta) \sin \vartheta \cos \vartheta$$

den Winkel ϑ. Dies liefert

$$z(x^2 + y^2) - (p_\alpha - p_\beta)\, xy = 0.$$

Die Fläche ist daher vom dritten Grade. Sie führt den Namen Cylindroid und ist uns bereits B. I, S. 298 als die Axenfläche einer Complexschaar begegnet.

Aus der Gleichung $z = \frac{1}{2}(p_\alpha - p_\beta)\sin 2\vartheta$ erkennt man, dass der Schnittpunkt S der Erzeugungslinie des Cylindroids mit der Directrix auf dieser eine oscillirende Bewegung hat, welche die Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung ist, von doppelt so grosser Winkelgeschwindigkeit als die Rotation der Ebene um die Directrix. Daher der Satz:

Hat eine, eine feste Axe rechtwinklig schneidende Gerade eine Schraubenbewegung um diese Axe, deren Rotationscomponente gleichförmig, deren Translationscomponente aber eine oscillirende Bewegung, nämlich die Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung, und zwar von doppelt so grosser Winkelgeschwindigkeit als die Winkelgeschwindigkeit der Rotationsbewegung ist, so beschreibt sie ein Cylindroid.

Um den Parameter p der Axe γ auf dem Cylindroid zu finden, d. h. um die Formel $p = p_\alpha \cos^2\vartheta + p_\beta \sin^2\vartheta$ zu construiren, wählt Ball in der xy-Ebene den Kegelschnitt $p_\alpha x^2 + p_\beta y^2 = H$, wo H beliebig ist, dessen Halbaxen $(H:p_\alpha)^{\frac{1}{2}}$, $(H:p_\beta)^{\frac{1}{2}}$ den Parametern p_α, p_β umgekehrt proportional sind. Der Radiusvector ϱ dieses Kegelschnitts, welcher vom Mittelpunkt unter dem Winkel ϑ gegen die α-Axe geneigt ist, genügt der Gleichung $p_\alpha \cos^2\vartheta + p_\beta \sin^2\vartheta = H:\varrho^2$ und es ist daher $p = H:\varrho^2$ d. h. p ist dem Quadrate des Radiusvectors ϱ umgekehrt proportional.

Den Hauptinhalt dieses §. fassen wir in den Satz zusammen:

Zwei Dynamen (a, p_α), (b, p_β), deren Axen α, β sich in einem Punkte O rechtwinklig schneiden, sind äquivalent einer Dyname (r, p_ϑ), deren Axe die Gerade OZ, welche in O zur Ebene $(\alpha\beta)$ rechtwinklig ist, in einem Punkte S senkrecht trifft und gegen die Axe α unter einem Winkel ϑ geneigt ist, dessen Tangente gleich dem Verhältniss $b:a$ der Intensitäten der Dynamen ist; die Intensität r der resultirenden Dyname ist der Diagonale des über a und b zu construirenden Parallelogramms geometrisch gleich, ihr Parameter p_ϑ hängt von den Parametern p_α, p_β und dem Winkel ϑ so ab, dass $p_\vartheta = a\cos^2\vartheta + b\sin^2\vartheta$ ist; ihr kürzester Abstand $OS = \varkappa$ von den Axen α, β folgt der Formel

$$\varkappa = \frac{1}{2}(p_\alpha - p_\beta)\sin 2\vartheta.$$

Die Axen sämmtlicher den verschiedenen Werthen des Verhältnisses $b:a$ entsprechenden resultirenden Dynamen bilden das

Cylindroid $z(x^2+y^2)-(p_\alpha-p_\beta)xy=0$, eine cubische geradlinige Fläche, welche die Axen α, β enthält und von einer einzigen Constanten $p_\alpha - p_\beta$ abhängt.

Derselbe Satz gilt für die Aequivalenz zweier Windungsgeschwindigkeiten (a, p_α), (b, p_β) mit der aus ihnen resultirenden Windungsgeschwindigkeit (r, p_ϑ).

Die Parameter p_α, p_β nennen wir die Hauptparameter des Cylindroids.

§. 7. Man kann die Construction des Cylindroids auf mannigfache Weise variiren. Wir wollen einige Constructionen mittheilen.

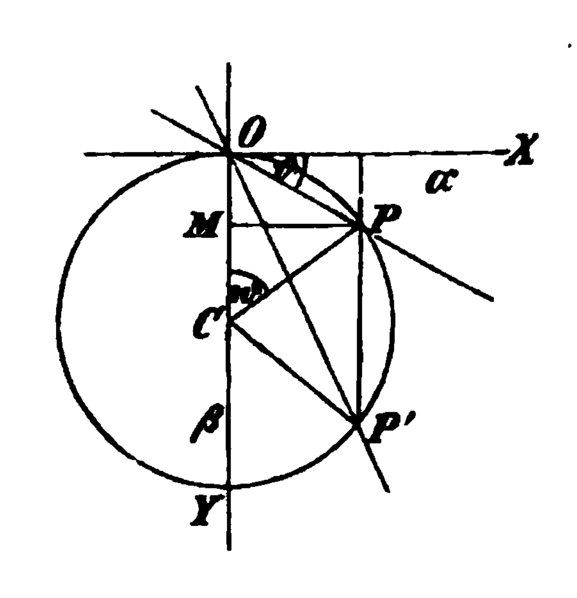


Fig. 69.

1. Nach Cayley construirt man mit $p_\alpha - p_\beta$ als Durchmesser in der Ebene $(\alpha\beta)$ einen Kreis (Fig. 69), welcher die Axe α in O berührt und betrachte ihn als Querschnitt eines Rotationscylinders. Ist OP die Spur der um OZ beweglichen Ebene, welche mit OX den Winkel ϑ bildet und P ihr Schnittpunkt mit dem Kreise, so bildet der Radius CP mit OY den Winkel 2ϑ und wird das auf CO gefällte Perpendikel

$$MP = \tfrac{1}{2}(p_\alpha - p_\beta)\sin 2\vartheta = \varkappa.$$

Legt man nun durch die Axe OY eine Ebene, welche mit der xy-Ebene den Winkel $\frac{1}{4}\pi$ bildet und ist Q der Punkt des elliptischen Schnittes dieser Ebene mit dem Cylinder, dessen Projection P ist, so ist $PQ = PM = \varkappa$ und mithin eine durch Q parallel zu OP geführte Gerade die dem Winkel ϑ entsprechende Erzeugungslinie des Cylindroids. Eine durch Q senkrecht zu OZ gelegte Ebene schneidet die Ellipse in einem zweiten Punkte Q', von welchem eine zweite Erzeugungslinie ausgeht, welche mit der vorigen auf der Axe OZ in demselben Punkte S zusammentrifft und dem Winkel $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$ entspricht. Die Directrix OZ des Cylindroids ist die Erzeugungslinie des Cylinders, welche durch einen Scheitel der kleinen Axe des elliptischen Schnittes hindurchgeht. Während der Punkt P gleichförmig den Kreis OPP' beschreibt, wird die Projection von P auf die x-Axe eine oscillirende Bewegung haben, nämlich die Projection dieser gleichförmigen Kreisbewegung und da $PQ = PM$ ist, hat auch der Punkt S auf der Directrix eine oscillirende Bewegung. Die Periode dieser letzteren ist doppelt so gross als die der gleichförmigen Kreisbewegung.

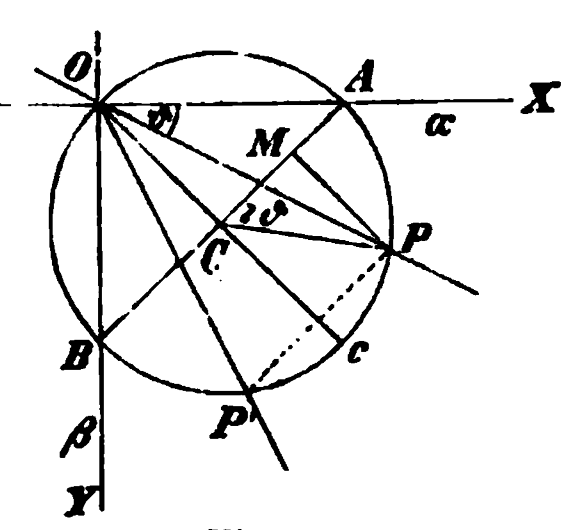


Fig. 70.

2. Clifford hat die Cayley'sche Construction so modificirt, dass die Directrix nicht durch einen Scheitel der kleinen, sondern durch einen Scheitel der grossen

Axe des elliptischen Cylinderschnittes geht. Legt man nämlich durch O (Fig. 70) in der Ebene der x, y (der Axen α, β) einen Kreis mit dem Mittelpunkte C auf der Halbirungslinie Oc des rechten Winkels XOY, so wird die Spur der Ebene, welche mit OX den Winkel ϑ bildet, denselben in einem Punkte P treffen und ein auf den Durchmesser AB, welcher die Schnittpunkte des Kreises mit den Axen verbindet, von P gefälltes Perpendikel ist $PM = CA \cdot \sin 2\vartheta$. Ueber diesem Kreis errichte man einen geraden Cylinder und schneide ihn mit einer durch AB gehenden Ebene, welche gegen die Kreisebene unter einem Winkel geneigt ist, dessen Tangente $\frac{1}{2}(p_\alpha - p_\beta) : CA$ ist. Die Projection der grossen Axe der Ellipse ist Oc, so dass c die Projection des Scheitels d darstellt. Ist nun Q der Punkt der Ellipse, dessen Projection P ist, so wird

$$PQ : PM = cd : Cc = \tfrac{1}{2}(p_\alpha - p_\beta) : CA,$$

also

$$PQ = \tfrac{1}{2}(p_\alpha - p_\beta) \sin 2\vartheta = \varkappa.$$

Daher ist eine Parallele QS zu OP, durch Q gelegt, eine Erzeugungslinie des Cylindroids. Der zu P in Bezug auf Oc symmetrisch gelegene Punkt liefert auch hier eine zweite Erzeugungslinie. Auch hier sieht man, wie die Bewegung des Schnittpunktes S der beiden Erzeugungslinien mit der Directrix, nämlich der Erzeugungslinie des Cylinders durch O die obige oscillirende Bewegung ist.

3. Lewis hat eine dritte Form der Construction des Cylindroids gegeben, welche zugleich den Parameter jeder Erzeugungslinie unmittelbar liefert. Um die Axe OZ (Fig. 71) rotire, wie früher die Ebene, welche die Erzeugungslinie des Cylindroids enthält und bilde mit der x-Axe den veränderlichen Winkel ϑ. In dieser Ebene liege ein Kreis vom Durchmesser $p_\alpha - p_\beta$, dessen Mittelpunkt C in die xy-Ebene fällt. Seine Schnittpunkte A, B mit der xy-Ebene haben die Abstände $OA = p_\alpha$, $OB = p_\beta$ von O. Ein Punkt P durchlaufe diesen Kreis gleichförmig, von A

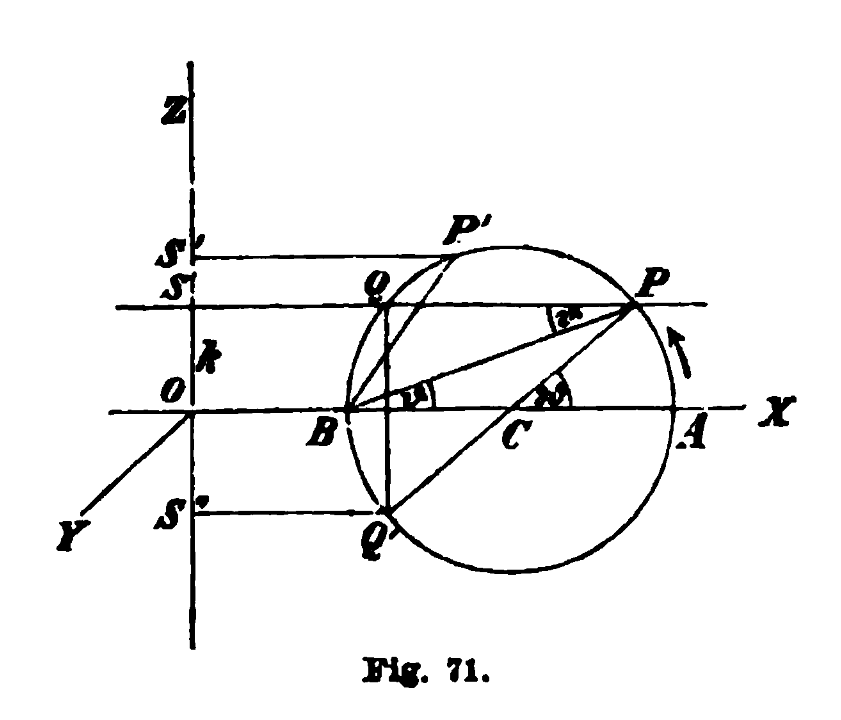


Fig. 71.

anfangend, während seine Ebene gleichförmig um die Axe OZ mit einer halb so grossen Winkelgeschwindigkeit rotirt, als die Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung. Die Gerade PS dieser Ebene, senkrecht zu OZ, ist die Erzeugungslinie des Cylindroids und die Strecke PS der Parameter, welcher dieser Erzeugungslinie entspricht. Denn die Bewegung des Punktes S ist die Projection der gleichförmigen Kreisbewegung des Punktes P und da $\sphericalangle PCA = 2\vartheta = 2 \cdot PBA$, so ist $OS = \frac{1}{2}(p_\alpha - p_\beta) \sin 2\vartheta = \varkappa$.

Zugleich ist $y = x \operatorname{tg} \vartheta$, wie früher. Ferner hat man

$$PS = \tfrac{1}{2}(p_\alpha + p_\beta) + \tfrac{1}{2}(p_\alpha - p_\beta)\cos 2\vartheta = \tfrac{1}{2}p_\alpha(1 + \cos 2\vartheta) + \tfrac{1}{2}p_\beta(1 - \cos 2\vartheta) = p_\alpha \cos^2\vartheta + p_\beta \sin^2\vartheta = p.$$

Diese Construction leitet unmittelbar zur Construction eines Modells des Cylindroids aus dünnen Stäben hin. Aehnlich wie die schmalen Sectoren eines Fächers auf dessen Axe sitzen, befestigt man die Stäbe auf der Directrix, drehbar um dieselbe. Sämmtlich in eine Ebene zusammengeschoben, stellen ihre Parameter die Ordinaten eines Kreises dar, den wir deshalb den **Parameterkreis** nennen wollen. Entfaltet, wie die Sectoren eines Fächers und paarweise mit einander Winkel bildend, gleich den Peripheriewinkeln im Parameterkreis über den Bogen AP bilden sie die Geraden des Cylindroids. Um die Entfaltung zu reguliren kann man senkrecht zur Directrix einen in gleiche Theile getheilten Kreis aufsetzen.

Vermöge dieser Erzeugungsart könnte die Fläche nicht unpassend der **cubische Fächer** oder das **cubische Fächerconoid** genannt werden, eine Benennung, welche significanter sein würde, als der Name „Cylindroid".

§. 8. Irgend zwei Axen φ, ψ mit Parametern p_φ, p_ψ, vom kürzesten Abstande h, mit dem Winkel σ, unter welchem sie gegen einander geneigt sind, bestimmen ein Cylindroid, d. h. man kann die Hauptparameter p_α, p_β, die Winkel λ, μ, welche p_α mit den Axen φ, ψ bildet, und die kürzesten Abstände $\varkappa_\varphi$, $\varkappa_\psi$ der Axen φ, ψ von den Axen α, β der Hauptparameter finden. Da nämlich p_φ, p_ψ dem gesuchten Cylindroid angehören, so bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} p_\varphi &= p_\alpha \cos^2\lambda + p_\beta \sin^2\lambda, & \varkappa_\varphi &= \tfrac{1}{2}(p_\alpha - p_\beta)\sin 2\lambda, & \lambda - \mu &= \sigma,\\ p_\psi &= p_\alpha \cos^2\mu + p_\beta \sin^2\mu, & \varkappa_\psi &= \tfrac{1}{2}(p_\alpha - p_\beta)\sin 2\mu, & \varkappa_\varphi - \varkappa_\psi &= h,\end{aligned}$$

mit deren Hülfe p_α, p_β, λ, μ, $\varkappa_\varphi$, $\varkappa_\psi$ durch φ, ψ, h, σ auszudrücken sind. Es wird aber

$$\begin{aligned} h = \varkappa_\varphi - \varkappa_\psi &= \tfrac{1}{2}(p_\alpha - p_\beta)(\sin 2\lambda - \sin 2\mu) = (p_\alpha - p_\beta)\cos(\lambda + \mu)\sin(\lambda - \mu)\\ &= (p_\alpha - p_\beta)\cos(\lambda + \mu)\sin\sigma,\\ \varkappa_\varphi + \varkappa_\psi &= \tfrac{1}{2}(p_\alpha - p_\beta)(\sin 2\lambda + \sin 2\mu) = (p_\alpha - p_\beta)\sin(\lambda + \mu)\cos(\lambda - \mu)\\ &= (p_\alpha - p_\beta)\sin(\lambda + \mu)\cos\sigma,\\ p_\varphi - p_\psi &= (p_\alpha - p_\beta)(\cos^2\lambda - \cos^2\mu) = (p_\alpha - p_\beta)\sin(\lambda + \mu)\sin(\lambda - \mu)\\ &= (p_\alpha - p_\beta)\sin(\lambda + \mu)\sin\sigma,\\ p_\varphi + p_\psi &= (p_\alpha + p_\beta) + \tfrac{1}{2}(p_\alpha - p_\beta)(\cos 2\lambda + \cos 2\mu)\\ &= p_\alpha + p_\beta + (p_\alpha - p_\beta)\cos(\lambda + \mu)\cos(\lambda - \mu)\\ &= (p_\alpha + p_\beta) + (p_\alpha - p_\beta)\cos(\lambda + \mu)\cos\sigma.\end{aligned}$$

Hieraus erhält man zunächst

$$p_\varphi - p_\psi = h \operatorname{tg}(\lambda + \mu) = h \operatorname{tg}(2\lambda - \sigma), \quad p_\varphi + p_\psi = p_\alpha + p_\beta + h \operatorname{cotg}\sigma,$$
$$p_\psi - p_\varphi = (\varkappa_\varphi + \varkappa_\psi)\operatorname{tg}\sigma, \quad h^2 + (p_\varphi - p_\psi)^2 = (p_\alpha - p_\beta)^2 \sin^2\sigma$$

und hiemit weiter

$$p_\alpha - p_\beta = \frac{1}{\sin\sigma}\sqrt{h^2 + (p_\varphi - p_\psi)^2}, \quad \lambda = \tfrac{1}{2}\left[\sigma + \operatorname{Arctg}\frac{1}{h}(p_\varphi - p_\psi)\right],$$

$$\varkappa_\varphi + \varkappa_\psi = (p_\psi - p_\varphi)\cot\sigma,$$

$$p_\alpha + p_\beta = p_\varphi + p_\psi - h\cot\sigma, \quad \mu = \lambda - \sigma, \quad \varkappa_\varphi - \varkappa_\psi = h.$$

Hiedurch ist das Cylindroid eindeutig bestimmt, denn das Zeichen von $(p_\alpha - p_\beta)\sin\sigma$ entscheidet über das Zeichen der Wurzelgrösse. Sind die Parameter p_φ und p_ψ gleich, so wird

$$p_\alpha - p_\beta = \frac{h}{\sin\sigma}, \qquad \lambda = \tfrac{1}{2}\sigma, \qquad \varkappa_\varphi + \varkappa_\psi = 0,$$

$$p_\alpha + p_\beta = 2p_\varphi - h\cot\sigma, \quad \mu = -\tfrac{1}{2}\sigma, \quad \varkappa_\varphi = \tfrac{1}{2}h.$$

Die Lewis'sche Erzeugungsart des Cylindroids gibt unmittelbar die Construction desselben mit Hülfe von p_φ, p_ψ, h, σ. Man bestimme den kürzesten Abstand $SS' = h$ der Axen φ, ψ und errichte in einer durch h gehenden Ebene, z. B. in der Ebene $(h\varphi)$ die Parameter $SP = p_\varphi$, $S'P' = p_\psi$. In derselben Ebene beschreibe man durch P und Q einen Kreis, welcher über dem Bogen PP' den Winkel σ als Peripheriewinkel fasst. Dieser Kreis ist der Parameterkreis des gesuchten Cylindroids. Von den beiden möglichen Kreisen genügt nur einer der Aufgabe. Während nämlich eine um SS' gleichförmig rotirende Ebene den Winkel σ in bestimmtem Sinne beschreibt, beschreibt nach der Lewis'schen Erzeugungsart der bewegliche Punkt den Bogen PP' nur in einem gleichfalls bestimmten Sinne.

§. 9. Die Frage nach der Aequivalenz zweier Dynamen, oder zweier Windungsgeschwindigkeiten, deren Axen sich nicht schneiden mit einer dritten, erledigt sich durch den Satz:

Drei Dynamen, deren Axen einem Cylindroid angehören und von deren Intensitäten jede dem Sinus des Winkels proportional ist, welchen die Axen der beiden andern bilden, sind äquivalent Null, d. h. im Gleichgewicht.

Drei Windungsgeschwindigkeiten um drei Axen, welche demselben Cylindroid angehören und von deren Winkelgeschwindigkeiten jede dem Sinus des Winkels zwischen den Axen der beiden andern proportional ist, sind äquivalent Null, d. h. ertheilen dem System keine Windung.

Es genügt den einen Theil des Satzes zu beweisen. Es seien φ, ψ, ϖ drei Axen eines Cylindroids mit den Parametern p_φ, p_ψ, p_ϖ und besitze das System drei Windungsgeschwindigkeiten um sie mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_φ, ω_ψ, ω_ϖ. Jede von diesen Windungsgeschwindigkeiten ist äquivalent zweien Winkelgeschwindigkeiten um die Hauptaxen OX, OY mit den

Hauptparametern p_α, p_β und zwei Translationsgeschwindigkeiten parallel OX, OY. Sind nämlich λ, μ, ν die Winkel, welche φ, ψ, ϖ mit OX oder α bilden, so sind die Winkelgeschwindigkeiten ω_φ, ω_ψ, ω_ϖ äquivalent $\omega_\varphi \cos \lambda$, $\omega_\psi \cos \mu$, $\omega_\varpi \cos \nu$ um OX und $\omega_\varphi \sin \lambda$, $\omega_\psi \sin \mu$, $\omega_\varpi \sin \nu$ um OY und die Translationsgeschwindigkeiten $p_\varphi \omega_\varphi$, $p_\psi \omega_\psi$, $p_\varpi \omega_\varpi$ äquivalent $p_\alpha \omega_\varphi \cos \lambda$, $p_\alpha \omega_\psi \cos \mu$, $p_\alpha \omega_\varpi \cos \nu$ parallel OX und $p_\beta \omega_\varphi \sin \lambda$, $p_\beta \omega_\psi \sin \mu$, $p_\beta \omega_\varpi \sin \nu$ parallel OY.

Demnach ist der Geschwindigkeitszustand des Systems äquivalent den beiden Winkelgeschwindigkeiten um die Axen OX, OY

$$\omega_\varphi \cos \lambda + \omega_\psi \cos \mu + \omega_\varpi \cos \nu, \qquad \omega_\varphi \sin \lambda + \omega_\psi \sin \mu + \omega_\varpi \sin \nu$$

und den beiden Translationsgeschwindigkeiten parallel denselben Axen

$$p_\alpha (\omega_\varphi \cos \lambda + \omega_\psi \cos \mu + \omega_\varpi \cos \nu), \quad p_\beta (\omega_\varphi \sin \lambda + \omega_\psi \sin \mu + \omega_\varpi \sin \nu).$$

Diese Grössen verschwinden nur dann, wenn

$$\frac{\omega_\varphi}{\sin(\mu - \nu)} = \frac{\omega_\psi}{\sin(\nu - \lambda)} = \frac{\omega_\varpi}{\sin(\lambda - \mu)}$$

ist, w. z. b. w.

Soll daher zu zwei Dynamen oder zwei Windungsgeschwindigkeiten die resultirende Dyname oder die resultirende Windungsgeschwindigkeit gefunden werden, so construire man nach §. 8 das Cylindroid, welches die Axen der gegebenen Dynamen oder Windungsgeschwindigkeiten mit deren Parametern enthält und theile den Winkel dieser Axen durch eine durch die Directrix gehende Ebene im umgekehrten Verhältniss der Intensitäten, resp. Winkelgeschwindigkeiten. Diese Ebene schneidet das Cylindroid in der Axe der Resultanten; die Intensität, resp. Winkelgeschwindigkeit ist die Diagonale des Parallelogramms der beiden gegebenen Intensitäten oder Winkelgeschwindigkeiten.

Das Cylindroid hat für die Dynamen und Windungsgeschwindigkeiten dieselbe Bedeutung wie das Parallelogramm für einzelne Kräfte und für Winkelgeschwindigkeiten.

Sind die Hauptparameter p_α, p_β des Cylindroids einander gleich, so sind alle Parameter $p = p_\alpha \cos^2 \vartheta + p_\beta \sin^2 \vartheta$ gleich p_α, der Parameterkreis reducirt sich auf einen Punkt und das Cylindroid auf die Ebene $(\alpha\beta)$; $\varkappa$ wird gleich Null; die cylindrische Construction der resultirenden Axe geht über in die Parallelogrammconstruction. Sind die Parameter alle Null, so liefert das Cylindroid das Parallelogramm der Kräfte oder der Winkel- eschwindigkeiten; sind sie alle unendlich das der Kräftepaare oder Translationsgeschwindigkeiten.

§. 10. Aus den §. 7 angeführten Erzeugungsarten des Cylindroids

ergeben sich mit Leichtigkeit eine Reihe von Eigenschaften desselben, insbesondere die folgenden.

1. Alle Cylindroide sind ähnliche Flächen. Denn das Cylindroid hängt nur von einem Parameter $p_\alpha - p_\beta$ ab, der auch allein in dessen Gleichung vorkommt. Addirt man zu beiden Hauptparametern p_α, p_β eine Constante c, so ändern sich alle Parameter der verschiedenen Erzeugungslinien der Fläche um dieselbe Grösse c; denn es ist ein solcher

$$(p_\alpha + c)\cos^2\vartheta + (p_\beta + c)\sin^2\vartheta = p_\alpha\cos^2\vartheta + p_\beta\sin^2\vartheta + c.$$

Auf die Gestalt der Fläche hat diese Aenderung keinen Einfluss.

2. Die Strecke, welche die Fläche mit der Directrix gemein hat, ist gleich der Differenz $p_\alpha - p_\beta$ der Hauptparameter; nämlich gleich dem Durchmesser des Parameterkreises.

3. Verschwindet der Parameter einer Erzeugungslinie, so verschwindet im Allgemeinen auch der Parameter einer zweiten Erzeugungslinie. Denn der Parameterkreis schneidet die Directrix noch in einem zweiten Punkte, wenn er sie in irgend einem Punkte schneidet; es sei denn dass er die Directrix berührt, in welchem Falle beide verschwindenden Parameter zusammenfallen.

4. Das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten zweier Windungen um die Hauptaxen des Cylindroids, welche äquivalent sind einer resultirenden Windung um eine bestimmte Axe PS des Cylindroids ist gleich tg BPS (Fig. 71).

5. Der Winkel zweier Erzeugungslinien PS, $P'S'$ des Cylindroids ist (Fig. 71) gleich dem Peripheriewinkel PBP' des Parameterkreises. Da die Erzeugungslinien PS, QS sich in S schneiden, $Q'S''$ mit QS gleichen Parameter hat und $\sphericalangle\, Q'BP = \frac{1}{2}\pi$ ist, so folgt, dass wenn eine Erzeugungslinie des Cylindroids zu einer von zwei Erzeugungslinien, die sich in einem Punkte der Directrix schneiden, rechtwinklig ist, sie mit der andern Erzeugungslinie gleichen Parameter hat.

6. Lewis hat bemerkt, dass die Cayley'sche und Clifford'sche Construction des Cylindroids verallgemeinert werden kann. Man kann dasselbe Cylindroid in verschiedenen Lagen erzeugen, indem man zur Directrix OZ eine beliebige Erzeugungslinie des Cylinders wählt, sodass, wenn eine zur Cylinderaxe senkrechte Ebene einen festen elliptischen Schnitt in QQ' und die Gerade OZ in S schneidet, SQ, SQ' zwei Erzeugungslinien des Cylindroids sind. Denn der durch den Mittelpunkt C der Ellipse zur Cylinderaxe senkrechte Kreisschnitt trifft die Ebene der Ellipse in den Scheiteln A, B der kleinen Axe und die OZ in einem Punkte O, sodass $AOB = \frac{1}{2}\pi$ ist. Sind P, P' die Projectionen von Q, Q' auf den Kreisschnitt, so ist, wie in Fig. 70, die Bewegung von S auf OZ die oscillirende Projection der

gleichförmigen Kreisbewegung, wenn P gleichförmig auf dem Kreisschnitt sich bewegt, und wird $PQ = OS = CP \cdot \sin 2\vartheta$, wo auch O auf dem Kreise liegen mag. Rückt die Ebene SQQ' parallel mit sich fort, bis S in den Schnittpunkt von OZ mit der Ellipse gelangt, so folgt:

7. Berührt ein Kreiscylinder die Ebene, welche die Directrix und eine Erzeugungslinie des Cylindroids enthält längs der Directrix, so schneidet er das Cylindroid in einer Ellipse, die Erzeugungslinie dieser Fläche, welche sich mit der gegebenen Erzeugungslinie auf der Directrix schneidet, fällt in die Ebene der Ellipse.

8. Jeder Kreiscylinder, welcher durch die Directrix geht, schneidet das Cylindroid in einer Ellipse. Denn er berührt eine gewisse Erzeugungslinie desselben.

9. Durch jeden Punkt S der Directrix gehen zwei Erzeugungslinien SQ, SQ' des Cylindroids, deren Ebene die Directrix in S und die Ellipse in Q, Q' schneidet. Geht diese Ebene durch einen Scheitel der grossen Axe, so fallen SQ, SQ' zusammen, geht sie durch den Mittelpunkt der Ellipse, so werden SQ, SQ' rechtwinklig zu einander. Die Verbindungslinie QQ' der beiden Schnittpunkte ist in allen Fällen parallel der kleinen Axe der Ellipse. Geht die Ebene SQQ' durch den Schnittpunkt der Directrix mit der Ellipse, so fällt die eine Gerade SQ in die Ebene der Ellipse, während die andere in die zur Directrix senkrechte Tangente des Cylinders übergeht. Da die Ellipse dem Cylindroid angehört, so bestimmen ihre Tangente in Q und die Erzeugungslinie SQ die Tangentenebene des Cylindroids in Q, d. h. die Ebene der Ellipse ist selbst die Tangentenebene in Q. Umgekehrt folgt ebenso, dass jede Tangentenebene des Cylindroids dasselbe in einer Ellipse schneidet. Man construirt leicht den Cylinder, welcher die Fläche in der Ellipse schneidet, deren Ebene tangirt.

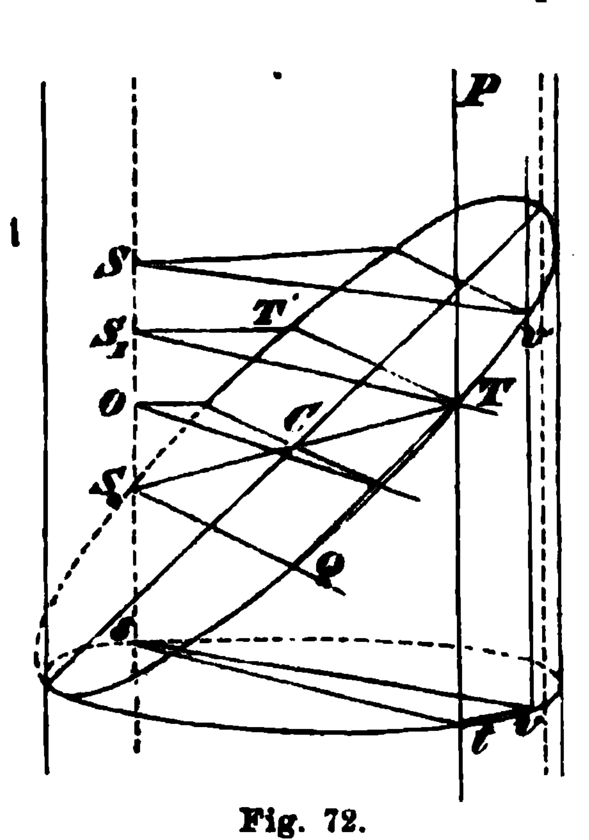


Fig. 72.

10. Es sei S_0Q (Fig. 72) die Erzeugungslinie des Cylindroids, welche in die Ebene der Ellipse fällt, die in Q berührt, so dass also die zweite durch S_0 gehende Erzeugungslinie den Cylinder in S_0 berührt. Durch den Mittelpunkt C der Ellipse ziehen wir den Diameter S_0CT und legen durch T die Erzeugungslinie TS_1 der Fläche. Dieselbe gehört einer Ebene S_1TT' an, welche um ebensoviel über dem Mittelpunkt C, als die Ebene S_0QQ' unterhalb desselben liegt. Nach Nr. 5 haben beide Erzeugungslinien S_0Q und S_1T gleichen Parameter. Da die grosse Axe der Ellipse sowohl S_0Q, als auch S_0T halbirt, so ist die Verbindungslinie QT parallel der grossen Axe. Während also die Verbindungslinie TT' der

Punkte T, T', in welchen zwei sich auf der Directrix schneidende Erzeugungslinien den Cylinder treffen der kleinen Axe der Ellipse parallel sind, sind die Verbindungslinien QT der Schnittpunkte der Erzeugungslinien gleichen Parameters mit dem Cylinder der grossen Axe parallel.

Da die Ebene $S_0 S_1 T$ eine Diametralebene des Cylinders ist, so ist sie senkrecht zu der Tangentenebene desselben in S_0, mithin kreuzt $S_1 T$ die Erzeugungslinie, welche $S_0 Q$ in S_0 schneidet, rechtwinklig.

11. Die kleinen Axen aller elliptischen Schnitte der Tangentenebenen mit der Fläche fallen in eine Ebene, nämlich in die Ebene der Hauptparameter, welche zur Directrix im Mittelpunkte O senkrecht sind.

12. Die Quadratdifferenz zwischen der grossen und kleinen Axe des elliptischen Schnittes des Cylindroids ist constant für alle Schnitte. Es ist nämlich dieselbe gleich dem Quadrat der Axe der Fläche (s. Fig. 72); also $4\,(p_\alpha - p_\beta)^2$.

§. 12. Ist eine Axe η mit bestimmtem Parameter p_η reciprocal zu zwei gegebenen Axen (ϑ, φ) mit den Parametern p_ϑ, p_φ, so ist sie reciprocal zu allen Axen des Cylindroids (ϑ, φ). Denn der virtuelle Coefficient zwischen einer Windung um η und Dynamen um ϑ und φ ist Null. Eine Dyname um eine Axe ψ des Cylindroids ist äquivalent zweien Dynamen um ϑ und φ. Daher ist die virtuelle Arbeit und hiemit der virtuelle Coefficient von ψ in Bezug auf η Null, d. h. ψ und η sind reciprocal.

Eine Axe η, welche reciprocal ist zu jeder Axe ψ des Cylindroids (ϑ, φ) nennen wir reciprocal zum Cylindroid (ϑ, φ).

Wie jede Gerade, schneidet die Axe η das Cylindroid als Fläche 3. Ordnung in drei Punkten und durch jeden dieser Punkte geht eine Erzeugungslinie desselben hindurch. Jede dieser drei Axen ist reciprocal zu η. Zwei sich schneidende Axen können aber nur reciprocal sein, entweder, wenn sie rechtwinklig zu einander sind oder wenn sie entgegengesetzt gleiche Parameter haben. Man sieht aber leicht, dass es zu einer Axe des Cylindroids auf diesem nur eine einzige Axe gibt, welche mit ihr gleichen Parameter hat. Dies erhellt aus der Lewis'schen Erzeugungsart oder auch aus der Formel $p_\vartheta = p_\alpha \cos^2 \vartheta + p_\beta \sin^2 \vartheta$, welche den Parameter für die Axe ϑ, aber auch für die Axe $\pi - \vartheta$, aber für keine andere Axe darstellt. Es kann also η nur zwei Axen des Cylindroids schneiden, deren Parameter ihrem Parameter entgegengesetzt gleich sein können, folglich muss sie die dritte von allen drei Axen, die sie trifft, rechtwinklig schneiden.

Jede Axe, welche zu einem Cylindroid reciprocal ist, schneidet daher eine Erzeugungslinie des Cylindroids rechtwinklig. Sie schneidet ausserdem noch zwei andere, deren Parameter gleich sind.

Fällt man von einem Punkte P Perpendikel auf alle Erzeugungslinien des Cylindroids und ertheilt ihnen als Axen Parameter zu, gleich und entgegengesetzt den unter sich gleichen Parametern der beiden Erzeugungslinien, welche die Perpendikel schneiden, so bilden diese Perpendikel eine Kegelfläche, nämlich die Kegelfläche aller durch den Punkt P gehenden zum Cylindroid reciprocalen Axen.

Der Kegel aller zu einem Cylindroid reciprocalen Axen eines Punktes ist ein Kegel zweiter Ordnung. Denn zieht man durch den gegebenen Punkt P eine Gerade parallel zur Directrix, so ist sie senkrecht zu allen Erzeugungslinien und schneidet die Directrix im Unendlichen in zwei Punkten, weil die Directrix eine Doppellinie ist. Diese Schnittpunkte sind imaginär, weil die Doppellinie nur eine bestimmte reelle Strecke im Endlichen mit der Fläche gemein hat. Die Gerade schneidet daher die Fläche in einem dritten, reellen Punkte. Durch diesen Punkt geht eine Erzeugungslinie und zu ihr gibt es eine einzige Erzeugungslinie SQ, welche mit ihr gleichen Parameter hat. Eine Ebene durch T und SQ schneidet die Fläche in einer Curve 3. Ordnung, welche in die Gerade SQ und einen Kegelschnitt zerfällt. Diese Ebene ist nur mit einer Erzeugungslinie parallel, nämlich mit SQ, die in ihr liegt und schneidet alle andern im Endlichen. Daher ist der Kegelschnitt eine Ellipse. Dieser Kegelschnitt ist der Ort der Fusspunkte aller von P aus auf die Erzeugungslinien gefällten Perpendikel. Denn zieht man in der Ebene der Ellipse durch T irgend eine Gerade TUV, welche SQ in U und die Ellipse zum zweiten mal in V schneidet, so ist sie, weil sie zwei Erzeugungslinien gleichen Parameters schneidet, senkrecht zu der Erzeugungslinie, welche durch den dritten Schnittpunkt V mit der Fläche geht. Diese Erzeugungslinie ist daher senkrecht zu TV und PT, also senkrecht zur Ebene PTV und mithin senkrecht zu PV. Daher ist V der Fusspunkt des von P auf die durch V gehende Erzeugungslinie gefällten Perpendikels und ist die Ellipse der Ort aller dieser Fusspunkte. Die Ebene TSQ ist die Tangentenebene des Cylindroids in Q, da sie durch die Erzeugungslinie SQ geht und die Tangente des elliptischen Schnittes enthält. Vgl. Fig. 72, wo $\sphericalangle\, svt = \frac{1}{2}\pi$ und die Ebene PTV senkrecht zu SV, also auch PV senkrecht zu SV ist.

Nimmt man für den Punkt P, durch welchen die zum Cylindroid reciprocalen Axen gehen, nach und nach alle Punkte einer Ebene, so schneidet diese Ebene alle Kegel zweiten Grades reciprocaler Axen, jeden in zwei Axen. Sämmtliche in der Ebene enthaltene, zum Cylindroid reciprocale Axen umhüllen daher einen Kegelschnitt, weil von jedem Punkte der Ebene an die Enveloppe zwei Tangenten gehen. Daher: Alle zu einem Cylindroid reciprocalen Axen einer Ebene umhüllen einen Kegelschnitt. Daher

weiter: Alle zu einem Cylindroid reciprocalen Axen des Raumes bilden einen Liniencomplex zweiten Grades.

§. 13. Wir suchen jetzt den Ort aller Axen, welche zu vier und fünf gegebenen Axen reciprocal sind. Eine Axe mit ihrem Parameter ist durch fünf Grössen bestimmt, von denen vier die Lage betreffen, während die fünfte der Parameter selbst ist. Sind also nur vier Bedingungen für eine Axe gegeben, so gibt es eine einfache Mannigfaltigkeit oder eine Fläche von Axen, welche diesen Bedingungen genügen. Soll die Axe zu vier gegebenen Axen α, β, γ, δ reciprocal sein, so ist diese Fläche ein Cylindroid. Denn sind λ, μ, ν drei Axen, welche zu α, β, γ, δ reciprocal sind, so bestimmen λ, μ ein Cylindroid (λ, μ) und jede Axe φ desselben ist reciprocal zu $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Ebenso bestimmen λ, ν ein anderes Cylindroid (λ, ν) und jede Axe ψ dieses letzteren ist ebenfalls reciprocal zu $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Die Axen φ, ψ bestimmen aber selbst wieder ein Cylindroid (φ, ψ), dessen Axen alle zu α, β, γ, δ reciprocal sind. Da nun, sobald (λ, μ), (λ, ν) verschiedene Cylindroide sind, φ und ψ nicht ein bestimmtes, sondern eine Schaar von Cylindroiden liefern, während blos, wenn sie zusammenfallen, φ und ψ ein einziges Cylindroid, nämlich das bestimmen, auf welchem die drei Axen λ, μ, ν liegen, so folgt, dass es keine drei Axen λ, μ, ν geben kann, reciprocal zu α, β, γ, δ, welche nicht ein und demselben Cylindroid angehören und dass also alle zu den vier Axen reciprocalen Axen auf einem Cylindroid liegen.

Dies Cylindroid ist in bestimmten Fällen leicht zu construiren. Es seien die Parameter von α, β, γ, δ der Grösse nach geordnet p_α, p_β, p_γ, p_δ. Man bilde die Cylindroide (α, γ) und (β, δ). Ist σ eine Länge zwischen p_β und p_γ, so finden sich auf dem Cylindroid (α, γ) zwei Axen vom Parameter σ und ebenso auf (β, δ) zwei Axen von demselben Parameter σ. Nun ziehe man die zwei Transversalen ϑ, φ, welche diese vier Axen gleichen Parameters schneiden und ertheile ihnen beiden denselben Parameter $-\sigma$. Da ϑ und φ mit α und γ entgegengesetzt gleiche Parameter haben und diese Axen schneiden, so sind sie reciprocal zu allen Axen des Cylindroids (α, γ). Aus demselben Grunde sind ϑ, φ reciprocal zu allen Axen des Cylindroids (β, δ). Daher sind alle Axen des Cylindroids (ϑ, φ) reciprocal zu α, β, γ, δ.

Zu fünf Axen α, β, γ, δ, ε von gegebenen Parametern gibt es nur eine einzige reciprocale Axe. Denn eine Axe, welche zu α, β, γ, δ reciprocal ist, gehört einem bestimmten Cylindroid an; eine Axe, welche zu α, β, γ, ε reciprocal ist, einem andern. Jede Axe, welche zu allen fünf Axen reciprocal ist, muss also eine gemeinschaftliche Axe dieser beiden Flächen sein. Zwei Cylindroide haben aber nur eine endliche Anzahl Erzeugungslinien gemein. Daher kann es nicht unendlich viele Axen geben, welche

zu 5 Axen reciprocal sind. Es kann aber nur eine einzige geben; denn wären zwei solche möglich, so wären unendlich viele möglich, nämlich alle Axen des durch diese beiden bestimmten Cylindroids. Man kann diese einzige Axe construiren, indem man sie als Schnittlinie zweier Cylindroide auffasst, von denen jede zu vier von den fünf gegebenen Axen reciprocal ist.

Zu einer gegebenen Axe ε von bestimmtem Parameter p_ε kann auf einem gegebenen Cylindroid eine reciprocale Axe η gefunden werden. Denn sind λ, μ, ν, ϱ vier zum Cylindroid reciprocale Axen, so bestimme man die Axe η, welche zu den fünf Axen ε, λ, μ, ν, ϱ reciprocal ist; dieselbe liegt auf dem Cylindroid, weil sie zu den vier Axen λ, μ, ν, ϱ reciprokal ist. Es gibt ausser η im Allgemeinen keine zweite Axe des Cylindroids, reciprocal zu ε; denn, wäre dies der Fall, so müsste ε zum Cylindroid reciprocal und mithin zu einer Axe desselben rechtwinklig sein, was im Allgemeinen nicht der Fall sein wird.

§. 14. Ein in seiner Beweglichkeit beschränktes System kann nicht um alle Axen des Raumes Windungen erleiden, sondern nur um ein bestimmtes System von Axen. Ein solches Axensystem hängt von den Bedingungen der Beweglichkeit ab und ist durch eine bestimmte Anzahl seiner Axen bestimmt. Die Anzahl dieser Axen, welche unter den Axen des Systems willkührlich wählbar sind, bestimmt die Stufe des Axensystems. Jeder Axe dieses Systems kommt ein bestimmter Parameter zu, welcher von den Parametern der bestimmenden Axen abhängt. Denn ist das Axensystem von der n^{ten} Stufe und ertheilt man dem Punktsystem um n Axen A_1, A_2, ... A_n unendlichkleine Windungen $(\delta\omega_1, p_1\delta\omega_1)$, $(\delta\omega_2, p_2\delta\omega_2)$, ... $(\delta\omega_n, p_n\delta\omega_n)$, sind diese zusammen einer bestimmten unendlichkleinen Windung um eine Axe des Axensystems äquivalent, deren Lage und Parameter durch die $n-1$ Verhältnisse der Amplituden und die n Parameter $p_1, p_2, \ldots p_n$ bestimmt ist.

Eine Axe X, welche zu n Axen A_1, A_2, ... A_n eines Axensystems Σ n^{ter} Stufe reciprocal ist, ist zu allen Axen des Systems reciprocal. Denn da n Windungen um A_1, A_2, ... A_n äquivalent einer Windung um eine Axe A des Axensystems sind, so ist die virtuelle Arbeit einer Dyname um X in Bezug auf eine Windung um A gleich der Summe der virtuellen Arbeiten dieser Dyname in Bezug auf A_1, A_2 ... A_n. Da aber X reciprocal zu diesen Axen, so sind die Summanden dieser Summe einzeln Null und ist daher die virtuelle Arbeit der Dyname um X in Bezug auf die Windung um A selbst Null. Daher ist X reciprocal zu A.

Die Gesammtheit Σ' aller zu den Axen eines Axensystems Σ n^{ter} Stufe reciprocalen Axen heisst das zu Σ reciprocale Axensystem Σ'.

Das zu einem Axensystem Σ der $\varkappa^{ter}$ Stufe reciprocale Axensystem Σ' ist ein Axensystem von der $6 - \varkappa^{ten}$ Stufe. Damit zwei Axen reciprocal seien, ist nur eine Bedingung zu erfüllen. Damit also eine Axe X reciprocal zu $\varkappa$ Axen des Systems Σ und damit zu Σ überhaupt reciprocal sei, hat sie $\varkappa$ Bedingungen zu genügen. Sie ist bestimmt nach Lage und Parameter durch 5 Bedingungen, sie kann also noch $5 - \varkappa$ weitere Bedingungen erfüllen. Für $\varkappa = 5$ gibt es daher nur eine, für $\varkappa = 4, 3, 2, 1$ aber unendlich viele Axen, welche zu Σ reciprok sind. Sie bilden für $\varkappa = 4$ eine Fläche, für $\varkappa = 3$ ein System von Flächen oder eine Congruenz, für $\varkappa = 2$ einen Complex und sind für $\varkappa = 1$ alle beliebigen Geraden des Raumes. Sie bilden also jedenfalls ein Axensystem von bestimmter Stufe. Nun ist nach dem Obigen die Anzahl der disponibelen Elemente, durch welche eine beliebige Axe eines Axensystems bestimmt wird, um eine Einheit kleiner, als die Stufe desselben ($n - 1$ für die n^{te} Stufe) und da hier $5 - \varkappa$ Elemente unbestimmt sind, so ist die Ordnung der Stufe des Axensystems gleich $6 - \varkappa$.

Da zwei reciprocale Axen ihrer Bedeutung nach vertauschbar sind, d. h. die eine eine Windungsaxe, die andere eine Dynamenaxe oder umgekehrt sein kann, so folgt, dass mit dem Studium des Axensystems $\varkappa^{ter}$ Stufe zugleich das Studium des Axensystems $6 - \varkappa^{ter}$ Stufe erledigt ist.

Jedes Kräftesystem, welches einer Dyname um eine Axe des reciprocalen Systems äquivalent ist, hält am Punktsystem Gleichgewicht. Der Widerstand oder Zwang, welchen die Bedingungen, welche die Beweglichkeit des Punktsystems beschränken, diesem auferlegen, kann durch eine Dyname um eine solche Axe repräsentirt werden.

Wir wollen noch die Anzahl der Bedingungen aufsuchen, welche ein Axensystem $\varkappa^{ter}$ Stufe bestimmen. Da das Axensystem durch $\varkappa$ Axen bestimmt ist und jede Axe 5 Bedingungen erfordert, so würden $5\varkappa$ Bedingungen zu erfüllen sein. Allein damit wären $\varkappa$ speciell gewählte Axen gegeben. Es ist aber nur erforderlich, dass überhaupt irgend 5 Axen des Systems gegeben seien. Nun kann man, um eine beliebige Axe des Systems zu bestimmen, $\varkappa - 1$ Grössen (nämlich die Verhältnisse von $\varkappa$ Amplituden) willkührlich wählen; dies gibt für $\varkappa$ Axen $\varkappa(\varkappa - 1)$ willkührlich wählbare Grössen. Daher sind unter den $5\varkappa$ Bedingungen $\varkappa(\varkappa - 1)$ willkührlich wählbare Bedingungen, also nur $5\varkappa - \varkappa(\varkappa - 1) = \varkappa(6 - \varkappa)$ absolut nothwendige Bedingungen für die Bestimmung des Axensystems $\varkappa^{ter}$ Stufe. Ein Axensystem $\varkappa^{ter}$ Stufe ist daher durch $\varkappa(6 - \varkappa)$ Bedingungen bestimmt. Da der Ausdruck $\varkappa(6 - \varkappa)$ symmetrisch in Bezug auf $\varkappa$ und $6 - \varkappa$ ist, d. h. ungeändert bleibt, wenn $\varkappa$ mit $6 - \varkappa$ vertauscht wird, so folgt, dass ein Axensystem und das ihm reciprocale durch dieselbe Anzahl von Bedingungen bestimmt wird.

§. 15. Für die Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten ist es von grosser Wichtigkeit, sämmtliche virtuelle Windungen übersehen zu können, deren ein in seiner Beweglichkeit beschränktes unveränderliches System fähig ist. Die Ball'sche Theorie der reciprocalen Axenparameter löst diese Frage in ausgezeichneter Weise. Die B. I, S. 293 u. ff. erwähnten Fälle gehören hieher.

1. Ein unveränderliches System besitzt Freiheit erster Stufe, wenn es in seiner Beweglichkeit so beschränkt ist, dass es blos um eine einzige Axe α eine Windung von bestimmtem Parameter p_α erleiden kann. Fünf Bedingungen sind erforderlich, um den Axenparameter zu bestimmen. Als specielle Beispiele gehören hieher die Rotation um eine feste Axe, wofür $p_\alpha = 0$ und das Gleiten längs einer festen Axe, wofür $p_\alpha = \infty$ ist. Das Axensystem dieser Stufe reducirt sich auf eine einzige Axe. Das reciprocale Axensystem ist ein System fünfter Stufe; es enthält alle Axen ϑ, welche die Bedingung

$$(p_\alpha + p_\vartheta) \cos\lambda - d \sin\lambda = 0$$

erfüllen, worin d den Abstand der Axe ϑ von α und λ den Winkel bezeichnet, den beide mit einander bilden. Jede Axe des Raumes gehört diesem Axensystem an, wenn ihr ein bestimmter Parameter zuertheilt wird. Denn für eine bestimmte Axe sind d und λ bekannt und dient diese Bedingung daher dazu, p_ϑ zu bestimmen. Durch einen gegebenen Punkt A des Raumes geht eine doppelte Mannigfaltigkeit von Axen, welche zu α reciprocal sind bei verschiedenen Parametern. Alle zu α reciprocalen Axen dieses Punktes, welche einen bestimmten Parameter besitzen, bilden daher eine einfache Mannigfaltigkeit und alle Axen des Raumes von demselben Parameter einen Liniencomplex. Wir werden zeigen, dass dieser Complex vom ersten Grade ist. Zeigen wir dies zunächst für den Parameter Null und dann allgemein. Durch eine unendlichkleine Windung um α beschreibt A ein Schraubenelement AA'; alle zu diesem Elemente normalen Geraden sind Richtungslinien von Kräften (Dynamen vom Parameter Null), deren Arbeit Null ist; mithin sind dieselben zu α reciprocal für den Parameter Null. Denkt man sich nun eine Axe η mit dem Parameter $p_\alpha + \varkappa$, zusammenfallend mit der Axe α, so sind alle Axen μ vom Parameter Null, welche zu η reciprocal sind und durch A gehen, senkrecht zu AA' und liegen folglich in einer Ebene. Die Axen η und μ bleiben aber reciprocal, wenn man vom Parameter von η die Grösse $\varkappa$ subtrahirt und jenem Parameter von μ dieselbe Grösse addirt, weil dadurch der virtuelle Coefficient beider Axen Null bleibt. Daher sind alle Axen vom Parameter $\varkappa$, welche mit den Axen μ zusammenfallen, reciprocal zur Axe α mit dem Parameter p_α und liegen mithin alle solche Axen in einer Ebene. Es bilden daher alle zu α mit dem Parameter α reciprocalen Axen einen

Liniencomplex ersten Grades. Umgekehrt kann in jeder Ebene ein Punkt A gefunden werden, dessen Stralen in der Ebene Axen vom Parameter $\varkappa$ sind, reciprocal zu α. Jedem Werthe $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ... des Parameters $\varkappa$ entspricht ein bestimmter Punkt A_1, A_2, ... der Ebene und alle solche Punkte A_1, A_2, ... liegen in einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt der Ebene mit α hindurchgeht und α rechtwinklig trifft. Denn die Gerade $A_1 A_2$ muss reciprocal zu α sein, sowohl für den Parameter $\varkappa_1$, als auch für $\varkappa_2$ und dies kann nur der Fall sein, wenn $A_1 A_2$ die Axe α rechtwinklig schneidet. Sämmtliche den verschiedenen Werthen von $\varkappa$ entsprechenden Liniencomplexe reciprocaler Axen zu α haben daher die Congruenz aller zu α senkrechten Geraden gemein.

Aus dem Vorstehenden folgt, dass jede Axe des Raumes die Axe einer Dyname vom bestimmten Parameter sein kann, welche einem an dem um α windbaren System im Gleichgewicht befindlichem Kräftesystem äquivalent ist.

Wird das Punktsystem blos von der Schwere afficirt, welche einer Dyname vom Parameter Null und der Verticalen des Massenmittelpunktes S_1 als Axe äquivalent ist, so folgt, dass diese Verticale für den Fall des Gleichgewichts in die Normalebene des Linienelements fallen muss, welches S in Folge der Windung um α beschreiben würde.

2. Kann ein unveränderliches System Windungen um zwei Axen mit bestimmten Parametern erleiden, so kann es um jede Axe des durch sie bestimmten Cylindroids gewunden werden. Ein unveränderliches System besitzt Freiheit zweiter Stufe, wenn es blos um die Axen eines gegebenen Cylindroids gewunden werden kann. Das Axensystem dieser Stufe besteht aus den Axen des Cylindroids. Acht Bedingungen genügen, um das Cylindroid zu bestimmen; nämlich 4 bestimmen die Doppellinie, 2 weitere die Endpunkte der Strecke, welche die Fläche auf ihr bestimmt, und von 2 ferneren liefert die eine die Richtung einer Erzeugungslinie, die andere den Parameter derselben. Die zwei das Cylindroid bestimmenden Axen mit ihren Parametern würden 10 Bedingungen erfordern, allein zwei Bedingungen hievon sind zuviel, da offenbar zwei beliebige, nicht zwei bestimmte Axenparameter zur Bestimmung des Cylindroids erfordert werden. (S. §. 14.) Alle Axen, welche zum Cylindroid reciprocal sind, bilden nach §. 12 einen Liniencomplex zweiten Grades. Jedes Kräftesystem, welches einer Dyname von gewissem Parameter dieses reciprocalen Axensystems äquivalent ist, befindet sich an dem unveränderlichen System, welches Freiheit zweiter Stufe besitzt, im Gleichgewicht. Der Parameter dieser Dyname muss entgegengesetzt gleich sein dem Parameter der beiden Axen des Cylindroids, welche von der Axe der Dyname geschnitten werden und gleichen Parameter besitzen.

Eine einzelne Kraft wird an dem System im Gleichgewicht gehalten, wenn sie die Axen des Cylindroids vom Parameter Null beide schneidet. Am System, welches der Schwere allein unterworfen ist, findet Gleichgewicht statt, wenn die Verticale des Massenmittelpunktes beide Axen des Cylindroids vom Parameter Null schneidet. Jede Dyname, deren Axe der Doppellinie des Cylindroids parallel ist, befindet sich am System im Gleichgewicht; so z. B. jede Dyname, deren Axe mit der Doppelllinie zusammenfällt.

Ein Punkt P des Systems mit Freiheit zweiter Stufe kann nur virtuelle Bewegungen nach allen Richtungen in der Tangentenebene einer Fläche haben. Denn es seien α, β zwei Axen des Cylindroids. Die unendlichkleine Windung um α führt P nach P', die um β nach P''. Die unendlichkleine Windung um irgend eine Axe γ des Cylindroids lässt sich aber in Windungen um α und β zerlegen und kann mithin nur Bewegungen geben, deren Componenten in die Richtungen PP', PP'' fallen, sodass sie selbst also nur der Ebene $PP'P''$ angehören können. Durch jeden Punkt des Raumes kann also eine Ebene gelegt werden, auf welche die Richtungen seiner Beweglichkeit beschränkt sind. Enthält das Cylindroid zwei Axen vom Parameter Null, so sind die virtuellen Bewegungen des Systems um sie blosse Rotationen; Ebenen durch P und diese Axen schneiden sich daher in einer Geraden, welche normal ist zu der Ebene aller möglichen Bewegungen. Die Punkte P auf einer Axe vom Parameter Null können nur einerlei Bewegungen haben, um welche Axe des Cylindroids das System auch gewunden werden möge. Denn eine Windung um eine Axe λ vom Parameter Null ist eine Rotation um diese Axe. Eine solche kann einem Punkt auf der Axe gar keine Bewegung ertheilen. Nun kann aber die Windung um λ in zwei Windungen um zwei andere Axen α, β des Cylindroids gespalten werden; folglich müssen diese dem Punkte entgegengesetzt gleiche Bewegungen ertheilen, d. h. Windungen um die Axen α und β verschieben den Punkt in derselben Richtungslinie.

3. Kann das unveränderliche System Windungen erleiden um drei Axen α, β, γ von bestimmten Parametern p_α, p_β, p_γ, welche nicht demselben Cylindroid angehören, so kann es um eine doppelte Mannigfaltigkeit von Axen gewunden werden. Denn da es um α, β Windungen erleiden kann, so ist es Windungen fähig um alle Axen des Cylindroids (α, β). Irgend eine Axe λ desselben bestimmt aber mit γ ein weiteres Cylindroid, um dessen sämmtliche Axen das System gewunden werden kann. Wählt man für λ nach und nach alle Axen des Cylindroids (α, β), so erhält man als Ort aller Axen, um welche das System gewunden werden kann, eine Schaar von Cylindroiden, also eine doppelte Mannigfaltigkeit von Axen. Das System besitzt Freiheit dritter Stufe, wenn es um keine anderen

Axen Windungen erleiden kann, als um die Axen einer durch drei Axen bestimmten Schaar von Cylindroiden. Alle Axen, welche zu diesen Axen reciprocal sind, bilden nach §. 14 eine Axensystem derselben Stufe und alle Kräftesysteme befinden sich an dem Punktsystem im Gleichgewicht, wenn sie einer um eine der reciprocalen Axen wirkenden Dyname äquivalent sind. Die Ordnung der Axen in dem Axensystem dritter Stufe und dem ihm reciprocalen Axensystem erhellt deutlich aus dem Satze: Alle Axen des Systems von demselben Parameter $\varkappa$ bilden die eine Schaar Erzeugungslinien eines einfachen Hyperboloids, während die Erzeugungslinien der andern Schaar desselben als Axen vom Parameter $-\varkappa$ dem reciprocalen Axensystem angehören. Denn sind p, q, r drei Axen des Systems vom Parameter $\varkappa$, so construire man drei Axen λ, μ, ν, welche sie alle drei schneiden und ertheile ihnen den Parameter $-\varkappa$. Da zwei Axen von entgegengesetzt gleichen Parametern, welche sich schneiden, reciprocal sind, so gehören λ, μ, ν dem reciprocalen System an. Jede andere Axe, welche λ, μ, ν schneidet und den Parameter $\varkappa$ besitzt, gehört demnach dem System an, zu welchem p, q, r gehören. Alle solche liegen aber mit p, q, r auf einem Hyperboloid. Lassen wir den Parameter $\varkappa$ variiren, so erhalten wir eine Schaar von Hyperboloiden, deren Erzeugungslinien der einen Art das eine Axensystem bilden, während die der andern Art das ihm reciprocale Axensystem zusammensetzen. Die Punkte des beweglichen Systems können im Allgemeinen nach jeder Richtung des Raumes sich bewegen. Denn nimmt man drei Axen des Axensystems und ertheilt dem System unendlichkleine Amplituden um sie, so entsprechen diesen drei verschiedene Elementarwege eines Systempunktes; da aber die drei Amplituden willkührlich sind, so kann aus der Zusammensetzung derselben jede Richtung für die resultirende Bewegung folgen.

Man kann zeigen, dass durch jeden Punkt des Raumes drei Axen des Axensystems hindurchgehen. — Ein unveränderliches, um einen Punkt drehbares System besitzt Freiheit dritter Stufe.

4. Ein unveränderliches System besitzt Freiheit vierter Stufe, wenn es Windungen erleiden kann um alle Axen eines Liniencomplexes 2. Grades, welcher einem Cylindroid reciprocal ist. Alle Kräftesysteme sind an einem Punktsystem mit Freiheit vierter Stufe im Gleichgewicht, wenn die Dynamen äquivalent sind, deren Axen dem Cylindroid angehören.

5. Ein unveränderliches System besitzt Freiheit fünfter Stufe, wenn es Windungen erleiden kann um alle Axen des Raumes, welche zu einer einzigen Axe reciprocal sind. Für jede Grösse des Parameters bilden die zugehörigen Axen einen Liniencomplex 1. Grades. Fünf Axen bestimmen das Axensystem 5. Stufe.

6. Ist das System um 6 Axen windbar, so kann es um jede Axe des

Raumes gewunden werden. Denn nach der Formel $\varkappa(6-\varkappa)$ für die Anzahl der Bedingungen des Axensystems $\varkappa^{ter}$ Stufe folgt für $\varkappa = 6$, dass das Axensystem 6ter Stufe keine Bedingung erfordert, also jede Axe des Raumes ihm angehört. Das System ist absolut frei. Das reciprocale Axensystem reducirt sich auf Null; es gibt keinen Zwang und keine Beschränkung der Beweglichkeit. Für blose Rotationen (Windungen vom Parameter Null) wurde dieser Satz bereits von Möbius aufgestellt (Ueber die Zusammensetzung unendlichkleiner Drehungen; Crelle, Journal B. XVIII, p. 189).

§. 16. Die in diesem Capitel entwickelte Theorie der Windungen und Dynamen kann auch auf veränderliche Systeme ausgedehnt werden. In dieser Hinsicht ist ein Satz von Wichtigkeit, der für Rotationen gleichfalls von Möbius (Crelle, Journal XVIII, p. 211) aufgestellt wurde. Es seien $A_1, A_2, \ldots A_7$ sieben unveränderliche Systeme (Körper) und sollen A_1 und A_2 um die gemeinsame Axe a_{12}, A_2, A_3 ebenso um a_{23}, A_3, A_4 um $a_{34}, \ldots A_6$ und A_7 um a_{67} gewunden werden können. Man winde, während A_1 ruht, $A_2, A_3, \ldots A_7$ zusammen, wie ein unveränderliches System unendlich wenig um a_{12}; hierauf, während A_1 und A_2 ruhen, A_3, $A_4, \ldots A_7$ als unveränderliches System, um a_{23} gleichfalls unendlich wenig; ebenso $A_4, \ldots A_7$ um a_{34} u. s. f., schliesslich A_7 um a_{67}. Nach allen diesen Windungen wird A_7 in eine Lage gelangt sein, welche es erreicht haben würde, wenn es der Reihe nach oder auch gleichzeitig um alle 6 Axen a_{12}, $a_{23}, \ldots a_{67}$ dieselben unendlichkleinen Windungen erlitten hätte. Da das System der Körper $A_2, A_3, \ldots A_7$ durch die sechs Windungen in jede von der ursprünglichen unendlich wenig verschiedene Lage gebracht werden kann und da ein um 6 Axen, welche nicht einem Axensysteme der 5ten Stufe angehören, windbares System in jede beliebige Lage gebracht werden kann, so ergibt sich der Satz:

Wenn von mehreren unveränderlichen Systemen, in bestimmter Ordnung genommen, je zwei aufeinanderfolgende um eine gemeinsame Axe gewunden werden können, so hat, wenn das erste derselben ruht, erst das siebente vollkommen freie Beweglichkeit und zwar auch nur dann, wenn die sechs Axen, welche die sieben Systeme mit einander verbinden, unabhängig von einander sind, d. h. keinem Axensystem fünfter Ordnung angehören.

Möbius führt als Beispiel hiezu an, dass die Fussgelenke der Krebse und ebenso die Körpertheile derselben, an welchen die Scheeren sitzen, sechs Glieder haben, welche unter sich und mit dem übrigen Körper durch sechs Axengelenke verbunden sind. Hiedurch wird es möglich, dass die

Endglieder der Füsse und die Scheeren vollkommen freie Beweglichkeit erlangen.

Wir können hier nicht tiefer auf die Beweglichkeit und das Gleichgewicht von Kräften an Gelenksystemen oder Ketten eingehen, deren Theorie heutzutage zu einem besondern Zweige sich herausgebildet hat und in den Anwendungen als theoretische Maschinenkinematik Gegenstand eines sorgfältigen Studiums ist. (Vgl. Reuleaux, theoretische Kinematik; Grashof, theoretische Maschinenlehre, B. II.)

§. 17. Die Ball'sche Theorie bestätigt und erweitert den Satz, dass dieselben Gesetze die Zusammensetzung und das Gleichgewicht der Winkelgeschwindigkeiten (einschl. der Translationsgeschwindigkeiten) und die Zusammensetzung und das Gleichgewicht der Kräfte beherrschen, welcher ein Ausfluss des Umstandes ist, dass beiden Lehren dieselbe Theorie, nämlich die der Strecken, als Grundlage dient. Man kann fast jedem Satze der Kinematik der Geschwindigkeiten einen analogen der Theorie der Kräfte gegenüberstellen, indem man „Winkelgeschwindigkeit" mit „Kraft" und „Translationsgeschwindigkeit" mit „Kräftepaar" vertauscht. Die Erweiterung betrifft einerseits die Verallgemeinerung der Kräfte zu Dynamen und der Rotationen zu Windungen, andererseits die Untersuchung der Bedingungen der Beweglichkeit unveränderlicher Systeme. Mit dem, was wir hier von dieser Theorie mitgetheilt haben, ist dieselbe nur in den Grundzügen dargestellt und auch nur soweit, als sie die Kinematik und die allgemeine Theorie der Kräfte betrifft; in der Kinetik werden wir auf sie zurückkommen. Auch die Statik verdankt ihr noch manche Entwickelung, welche an den Inhalt unseres Cap. III anknüpft.

Von Literatur führen wir als zunächst hieher gehörig an:

Ball, R. St., *Description of a Model of a Conoïdal Cubic Surface called the „Cylindroid", which is presented in the Theory of the geometrical freedom of a rigid body.* (*Abstract of a paper read before Section A of the British Association at its Meeting at Edinburgh*, August 1871.) *Philosophical Magazine* Vol. XLII, 4th Ser., p. 181 (1871).

Ball, R. St., *The Theory of Screws: A Geometrical Study of the Kinematics, Equilibrium, and small Oscillations of a rigid body.* (*Transactions of the Royal Irish Academy,* Vol. XXV, Science, p. 157—217), (1872). In erweiterter Fassung unter dem elben Titel erschienen, Dublin, Hodges, Forster & Co. 1876. 8°. Im Auszuge vom Verfasser in d. Mathem. Annalen, B. IX, p. 540—553.)

Ball, R. St., *Screw Co-ordinates and their applications to problems in the Dynamics of a rigid body.* (*Transactions of the R. Irish Academy*, Vol. XXV, p. 295—327.)

Ball, R. St., *Researches on the Dynamics of a rigid body by the aid of the Theory of Screws.* (*Philosoph. Transactions.* Vol. 164, p. 15—40 (1874).

Lewis, T. C., *On the Cylindroïd.* (*Messenger of Math.*, Vol. IX, p. 1—5 [1879].)

Plücker, *Fundamental views regarding mechanics. Phil. Transactions* (1866), Vol. 156, p. 361—380.

Klein, F., Notiz, betreffend den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper. (Mathem. Annalen B. IV, p. 403—415 [1871].)

Fiedler, Geometrie und Geomechanik. (Vierteljahrschr. d. Züricher naturf. Gesellsch. B. 21, S. 186—228.)

Die Ball'sche Theorie steht im innigen Zusammenhang mit der Entwickelung, welche die Theorie der Complexe, die Ausdehnungslehre (Grassmann), die Theorie der Quaternions und Biquaternions (Clifford, *Preliminary Sketch of Biquaternions; Proceed. of the London Math. Society.* Vol. IV [1873] p. 381—395) und die Anwendung derselben auf Statik und Kinematik (Everett, *On a new method in Statics and Kinematics*; *Messenger of Math.* 1874), sowie der nicht-euclidischen Geometrie (Cayley, Klein, Lindemann, Ball) in neuerer Zeit genommen hat.

XI. Capitel.

Astatisches Gleichgewicht und astatische Aequivalenz von Kräftesystemen am unveränderlichen Punktsystem.

§. 1. Für die bisherigen Untersuchungen waren die Angriffspunkte der Kräfte nichts Wesentliches; sie waren beliebig wählbar auf den Richtungen derselben, dagegen hatten die Kraftrichtungen eine ganz bestimmte Lage im Punktsystem, an welchem die Kräfte angriffen. Für die Untersuchungen des vorliegenden Capitels werden wir umgekehrt die Voraussetzung machen, dass die Angriffspunkte der Kräfte bestimmte Punkte seien, dass aber die Kräfte selbst ihre relative Lage gegen das Punktsystem ändern können, sei es dadurch, dass das Punktsystem eine Aenderung seiner Lage erleidet, während die Kräfte sich geometrisch nicht ändern, d. h. ihre Intensitäten, Richtungen und ihren Sinn beibehalten, während die Angriffspunkte sich bewegen oder auch dadurch, dass das Punktsystem ruht und dem Kräftesystem eine Lagenänderung ertheilt wird. Beide Arten der relativen Lagenänderung lassen sich auf einander reduciren. Erleidet nämlich das Punktsystem irgend eine Schraubenbewegung, während die Kräfte sich geometrisch nicht ändern, so wird dadurch eine Aenderung der relativen Lage der Kräfte gegen das Punktsystem eintreten; lässt man aber die Lage des Punktsystems ungeändert, während man allen Kräften die entgegengesetzte Schraubenbewegung um Axen ertheilt, welche, der Axe jener Schraubenbewegung parallel, durch die Angriffspunkte der Kräfte gelegt werden, so wird dadurch dieselbe Aenderung der relativen Lage beider, des Systems der Kräfte und des Systems ihrer Angriffspunkte, eintreten. Durch eine solche Aenderung der relativen Lage beider Systeme wird im Allgemeinen die Wirkung der Kräfte in Bezug auf das Punktsystem sich

ändern. War z. B. das Kräftesystem an dem Punktsystem in der ursprünglichen Lage im Gleichgewicht, so wird dies Gleichgewicht im Allgemeinen gestört werden und nur unter gewissen Bedingungen fortbestehen; war das Kräftesystem ursprünglich einer Einzelkraft äquivalent, so wird dies nachher nicht mehr der Fall sein u. s. w. Alle Untersuchungen, welche die Frage betreffen, wie die Wirkung eines Kräftesystems auf ein gegebenes Punktsystem sich ändert, wenn die relative Lage beider ohne Veränderung der Angriffspunkte eine Aenderung erleidet, kann man unter dem Namen der „Astatik" zusammenfassen. Besteht z. B. das Gleichgewicht trotz der Lagenänderung fort, so nennt man dasselbe astatisches Gleichgewicht; besteht die Aequivalenz eines Kräftesystems mit einem andern unter derselben Bedingung fort, so heisst dieselbe eine astatische Aequivalenz.

Eine Translation des Punktsystems vermag die relative Lage dieses und des Kräftesystems nicht zu ändern; es ist daher nur der Einfluss der Rotation auf die Wirkung des Kräftesystems zu prüfen. Da aber jede Rotation um eine Axe äquivalent ist einer Rotation um eine parallele Axe in Verbindung mit einer Translation, so braucht man blos die Rotation um die Axen eines, übrigens willkührlich wählbaren Punktes des Systems zu berücksichtigen.

§. 2. Von den Transformationen, welchen wir bisher die Kräftesysteme unterwarfen, besteht die Zusammensetzung der Kräfte, welche an ein und demselben Punkte angreifen, auch in der Astatik fort, falls der Angriffspunkt der Resultante derselbe Punkt ist; ebenso die Zusammensetzung der Parallelkräfte, wenn die Resultante am Mittelpunkte der Parallelkräfte angreift. Die Verlegung einer Kraft an einen andern Angriffspunkt bleibt aber ausgeschlossen, da sie auf der Zufügung zweier entgegengesetzt gleicher Kräfte beruht, welche bei der Lagenänderung des Systems in ein Kräftepaar übergehen, welches mit der an den neuen Angriffspunkt verlegten Kraft zusammen nicht mehr der ursprünglichen Kraft äquivalent ist.

Ein Kräftepaar ändert sich durch die Lagenänderung des Systems, seine Ebene und sein Arm werden anders. Wir wollen die Verbindungsstrecken der Angriffspunkte seiner Seitenkräfte seinen astatischen Arm nennen. Derselbe ist eine unveränderliche Länge, während seine Neigung gegen die Seitenkräfte nicht nothwendig $\frac{1}{2}\pi$ zu sein braucht, vielmehr mit der Lage des Systems wechselt. Fällt er mit der Richtung dieser zusammen, so verschwindet das Paar. Man sieht sofort, dass man den astatischen Arm eines Paares ohne dessen Wirkung zu ändern mit einer Zahl multipliciren oder dividiren darf, wenn man die Seitenkräfte desselben mit derselben Zahl dividirt oder multiplicirt. Denn das Moment, die Axe und der Sinn des Paares werden dadurch nicht geändert. Ebenso darf man den Arm des Paares parallel mit sich verlegen; drehen darf man denselben

jedoch nicht. Auch kann man ein Paar in mehrere andere zerlegen. Es ist hiezu nur nöthig, dass der astatische Arm des resultirenden Paares die geometrische Summe der astatischen Arme der Zerlegungspaare sei. Denn ist AB der astatische Arm eines Paares von den Seitenkräften P, $-P$, so nehme man irgend einen Punkt C an und betrachte ihn als Angriffspunkt zweier entgegengesetzt gleicher Kräfte von der Intensität und Richtung wie P, $-P$, so erhält man durch eine andere Gruppirung der Kräfte statt des ursprünglichen Paares zwei ihm äquivalente von den Armen AC und CB; es ist aber zugleich $[AC] + [CB] = [AB]$. Ebenso kann ein Paar in drei andere zerlegt werden. Man kann daher ein Paar auch ersetzen durch drei Paare, deren astatische Arme in die Richtungslinien dreier Axen OX, OY, OZ fallen, welche sich in O schneiden. Denn man verlege den Arm des Paares, so dass O dessen Anfangspunkt wird und projicire denselben auf die drei Axen, indem man die Projection auf eine Axe durch eine Ebene ausführt, parallel den beiden andern Axen. Die Projectionen des Armes werden die astatischen Arme der drei Paare sein, welche zusammen bei derselben Seitenkraft dem gegeben äquivalent sind. Auch kann man weiter diese Arme auf die Einheit reduciren, indem man die Seitenkräfte mit ihnen multiplicirt.

§. 3. Ein Kräftesystem $P, P', P'' \ldots P_i$ sei an einem freien unveränderlichen System im Gleichgewicht; man ertheilt diesem System eine Rotation um eine Axe μ von beliebiger Amplitude φ. Wir wollen die Bedingungen für das Fortbestehen des Gleichgewichts nach der Rotation aufsuchen. Wählen wir μ zur z-Axe eines rechtwinkligen, dem Punktsystem angehörigen und mit ihm beweglichen Coordinatensystems mit beliebigem Ursprung O auf μ und setzen

$$\begin{aligned} A &= \Sigma X, & a_{11} &= \Sigma x X, & a_{12} &= \Sigma x Y, & a_{13} &= \Sigma x Z, \\ B &= \Sigma Y, & a_{21} &= \Sigma y X, & a_{22} &= \Sigma y Y, & a_{23} &= \Sigma y Z, \\ C &= \Sigma Z, & a_{31} &= \Sigma z X, & a_{32} &= \Sigma z Y, & a_{33} &= \Sigma z Z, \end{aligned}$$

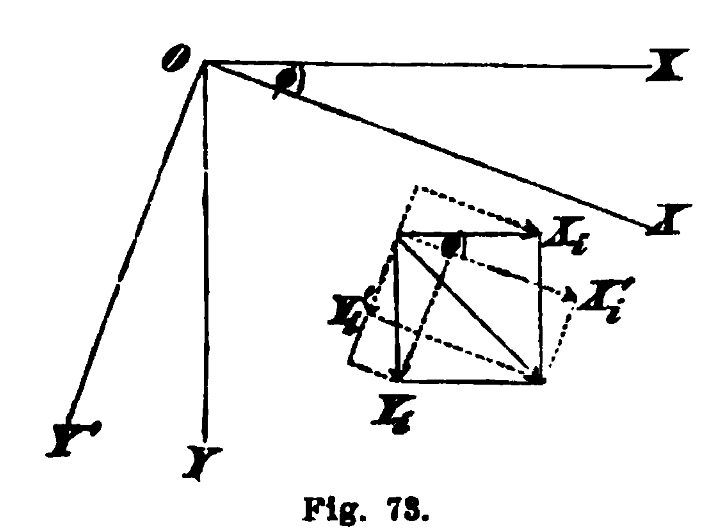


Fig. 73.

so sind

$$\begin{aligned} A &= 0, & a_{23} - a_{32} &= 0, \\ B &= 0, & a_{31} - a_{13} &= 0, \\ C &= 0, & a_{12} - a_{21} &= 0 \end{aligned}$$

die Bedingungen des Gleichgewichts vor der Rotation. Nach der Rotation sind die Componenten X_i, Y_i der Kräfte P_i andere X_i', Y_i' geworden, während die Componenten Z_i und Coordinaten der Angriffspunkte dieselben sind. Indem man die Componenten X_i, Y_i, Z_i nach den Coordinatenaxen in der neuen Lage zerlegt, ergibt sich (Fig. 73)

$$X_i' = X_i \cos\varphi + Y_i \sin\varphi,$$
$$Y_i' = -X_i \sin\varphi + Y_i \cos\varphi$$

und werden daher die Bedingungen des Gleichgewichts nach der Rotation
$\Sigma X' = 0$, $\Sigma Y' = 0$, $\Sigma Z' = 0$, $a_{23}' - a_{32}' = 0$, $a_{31}' - a_{13}' = 0$, $a_{12}' - a_{21}' = 0$,
oder entwickelt

$$\begin{array}{rl} A\cos\varphi + B\sin\varphi = 0, & a_{13}\sin\varphi + a_{23}(1-\cos\varphi) = 0, \\ -A\sin\varphi + B\cos\varphi = 0, & a_{13}(1-\cos\varphi) - a_{23}\sin\varphi = 0, \\ C = 0, & (a_{11} + a_{22})\sin\varphi = 0. \end{array}$$

Die drei ersten dieser Gleichungen sind von selbst erfüllt, da $A = B = C = 0$ ist; eliminirt man aus den drei letzten einmal a_{23}, das andere mal a_{13}, so erhält man statt ihrer

$$a_{13}(1-\cos\varphi) = 0, \quad a_{23}(1-\cos\varphi) = 0, \quad (a_{11} + a_{22})\sin\varphi = 0.$$

Sollen diese Gleichungen für alle Werthe von φ bestehen, so müssen $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{11} + a_{22} = 0$ sein. Dieselben sind für alle Werthe von φ erfüllt, sobald sie es für irgend einen von π verschiedenen Werth dieser Grösse sind. Die Bedingungen für das Fortbestehen des Gleichgewichts vor und nach der Rotation sind also

$$\begin{array}{lll} A = 0,\ a_{23} - a_{32} = 0,\ a_{13} = 0, & & A = 0,\ a_{23} = 0,\ a_{32} = 0 \\ B = 0,\ a_{31} - a_{13} = 0,\ a_{23} = 0 & \text{oder} & B = 0,\ a_{31} = 0,\ a_{13} = 0, \\ C = 0,\ a_{12} - a_{21} = 0,\ a_{11} + a_{22} = 0, & & C = 0,\ a_{12} = a_{21},\ a_{11} + a_{22} = 0. \end{array}$$

Man kann also den Satz aufstellen:

Ist ein Kräftesystem an einem unveränderlichen Punktsystem in zwei Lagen im Gleichgewicht, so besteht dasselbe für alle Lagen fort, welche es durch Rotation um die Axe erreichen kann, welche die Doppellinie der beiden Lagen ist, vorausgesetzt jedoch, dass jene beiden Lagen nicht symmetrisch zu der Axe sind.

Eine Axe, durch Rotation um welche das Gleichgewicht des Systems nicht gestört wird, heisst nach Möbius eine Gleichgewichtsaxe des Kräftesystems.

Dass die 9 Gleichungen die Bedingung enthalten, dass das Kräftesystem ausser der ursprünglichen Lage auch noch für eine andere Lage im Gleichgewichte sei, ist leicht zu sehen. Legt man nämlich durch alle Angriffspunkte Parallellinien zu μ und dreht sämmtliche Kräfte um $\frac{1}{2}\pi$ um sie als Axen um, so gehen die Componenten X, Y, Z über in $-Y$, X, Z. Stellt man für dies neue Kräftesystem die Bedingungen des Gleichgewichts auf, so lauten sie

$$\Sigma Y = 0, \qquad \Sigma X = 0, \qquad \Sigma Z = 0,$$

$$\Sigma \begin{vmatrix} y & z \\ X & Z \end{vmatrix} = 0, \quad \Sigma \begin{vmatrix} z & x \\ Z, & -Y \end{vmatrix} = 0, \quad \Sigma \begin{vmatrix} x & y \\ -Y, & X \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. $A=0,\ B=0,\ C=0,\ a_{23}-a_{31}=0,\ a_{32}+a_{13}=0,\ a_{11}+a_{22}=0,$

welche nichts anderes sind, als Combinationen jener 9 Gleichungen. Daher enthalten diese die Bedingungen des Gleichgewichtes für eine Drehung der Kräfte, oder des Punktsystems um $\frac{1}{2}\pi$ um Axen parallel μ, resp. um die Axe μ selbst.

Die drei zu den Bedingungen des ursprünglichen Gleichgewichts hinzutretenden Gleichungen $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{11} + a_{22} = 0$ drücken in Verbindung mit $A = 0$, $B = 0$ aus, dass die Kräfte $-Y$, X, 0, d. h. die Projectionen X, Y der Kräfte auf eine zur Axe senkrechte Ebene nach der Drehung um $\frac{1}{2}\pi$ für sich im Gleichgewicht sind; denn die Bedingungen hierfür sind

$$\Sigma Y = 0,\ \Sigma X = 0,\ \Sigma \begin{vmatrix} y & z \\ X & 0 \end{vmatrix} = 0,\ \Sigma \begin{vmatrix} z & x \\ 0, & -Y \end{vmatrix} = 0,\ \Sigma \begin{vmatrix} x & y \\ -Y, & X \end{vmatrix} = 0.$$

Da nun nach der Drehung das ganze Kräftesystem im Gleichgewicht ist, so kann man auch behaupten:

Die Fortdauer des Gleichgewichtes von Kräften an einem unveränderlichen Punktsystem, welches um eine Axe μ rotirt, ist gesichert, sobald das System der Kraftcomponenten parallel zur Axe μ für sich im Gleichgewicht ist und das Gleichgewicht der Projectionen der Kräfte auf eine zu μ senkrechte Ebene durch die Drehung nicht gestört wird.

Man kann diesen Satz ohne Rechnung so beweisen.

Zerlegt man alle Kräfte P in den Angriffspunkten A in Componenten Z, Q, parallel und senkrecht zu μ, projicirt das ganze Punktsystem auf eine zu μ senkrechte Ebene E und bringt in den Projectionen a der Punkte A zwei den Kräften Q parallele und entgegengesetzt gleiche Kräfte Q, $-Q$ an, so wird das Kräftesystem äquivalent dem ebenen, in E an den Punkten a angreifenden System (Q), dem System (Z) der zur Axe μ parallelen Kräfte und dem System (V) der Kräftepaare $(Q, -Q)$, deren Seitenkräfte in A und a angreifen. Nun seien ursprünglich das Kräftesystem und mithin auch die drei ihm äquivalenten Systeme (Q), (Z), (V) im Gleichgewicht. Das ebene System (Q) ist einer Einzelkraft oder einem Paare, (Z) und (V) zusammen sind einer Einzelkraft, parallel μ, oder einem Paare äquivalent, dessen Ebene mit μ parallel ist und da (Q) mit diesen Einzelkräften oder Paaren nicht im Gleichgewichte sein kann, so müssen (Q) für sich und (Z) und (V) zusammen im Gleichgewichte sein, d. h. es muss (Z) und (V) jedes besonders im Gleichgewichte sein oder beide müssen zwei entgegengesetzt gleiche Paare bilden. Dreht man nun das Punktsystem um die Axe μ, während die Kräfte des Systems ihre Richtungen beibehalten, so ist zum Fortbestehen des Gleichgewichtes

erforderlich, dass (Q) für sich im Gleichgewichte bleibe; (Z) erleidet keine Aenderung, ausser dass, wenn es sich auf ein mit (V) Gleichgewicht haltendes Paar reducirte, die Ebene dieses Paares um den Rotationswinkel des Systems gedreht wird. (V) aber ändert sich wegen des fortdauernden Parallelismus seiner Kräfte gar nicht; war es also im Gleichgewichte oder reducirte es sich auf ein Paar, so besteht sein Gleichgewicht fort und bleibt das Paar sich selbst äquivalent. Das Paar (Z) kann bei der Drehung mit dem unveränderlichen Paare (V) nicht fortwährend Gleichgewicht halten; daher muss (Z) für sich im Gleichgewichte sein und da dies das Gleichgewicht von (V) nach sich zieht, so ergibt sich der Satz.

§. 4. Die Kraft U, deren Componenten $-Y$, X, 0 sind, ist proportional und von gleicher Richtung mit der Geschwindigkeit v des Endpunktes der Kraft P, wenn das Punktsystem aus der Gleichgewichtslage um die Axe μ herausgedreht, oder sämmtliche Kräfte um Axen parallel zu μ, welche durch deren Angriffspunkte gehen, gedreht werden. Denn ist ω die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung, so ist $v = \omega\,(X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}}$ und sind $-Y:(X^2+Y^2)^{\frac{1}{2}}$, $X:(X^2+Y^2)^{\frac{1}{2}}$, 0 ihre Richtungscosinusse gegen die Axen, da sie senkrecht zu dem Abstande $(X^2+Y^2)^{\frac{1}{2}}$ des Endpunktes von der Axe ist. Diese Bemerkung kann man benutzen, um ohne alle Rechnung die Bedingungen für den Fortbestand des Gleichgewichtes bei der Drehung des Systems um irgend eine Axe des Punktes O darzustellen. Denn ist ω die Winkelgeschwindigkeit um sie und sind p, q, r ihre Componenten, oder, was dasselbe ist, sind diese Grössen im umgekehrten Sinne genommen die Winkelgeschwindigkeit und ihre Componenten für die Drehung um die parallelen Axen für die einzelnen Kräfte, so sind nach B. I, S. 273

$$v_x = \begin{vmatrix} q & r \\ Y & Z \end{vmatrix}, \quad v_y = \begin{vmatrix} r & p \\ Z & X \end{vmatrix}, \quad v_z = \begin{vmatrix} p & q \\ X & Y \end{vmatrix}$$

die Componenten der Geschwindigkeit v des Endpunktes der Kraft U und ist U proportional v, sind ihre Componenten proportional den Grössen v_x, v_y, v_z und stimmen die Richtungen der Kraft und ihrer Componenten mit den Richtungen von v und v_x, v_y, v_z überein. Sind X', Y', Z' die Componenten von U, so ist also

$$\frac{X'}{qZ - rY} = \frac{Y'}{rX - pZ} = \frac{Z'}{pY - qX}.$$

Nun drückt das Gleichgewicht der Kräfte U (X', Y', Z'), an den Punkten x, y, z angreifend, den Fortbestand des Gleichgewichts der Kräfte P aus. Man hat daher zunächst

$$\Sigma X' = q\Sigma Z - r\Sigma Y = 0, \quad \Sigma Y' = r\Sigma X - p\Sigma Z = 0, \quad \Sigma Z' = r\Sigma Y - p\Sigma X = 0,$$

welche Gleichungen vermöge $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$ von selbst erfüllt sind, sowie die weiteren drei Gleichungen

$$\Sigma(yZ' - zY') = 0, \quad \Sigma(zX' - xZ') = 0, \quad \Sigma(xY' - yX') = 0,$$

welche die eigentlichen Bedingungen des Fortbestandes des Gleichgewichts sind. Sie gehen, wenn man die X', Y', Z' proportionalen Grössen einfügt und mit Hülfe von $\frac{p}{\alpha} = \frac{q}{\beta} = \frac{r}{\gamma}$ für p, q, r die Richtungscosinusse α, β, γ der Axe μ einführt, über in:

$$\begin{aligned} -(a_{22} + a_{33})\,\alpha + a_{12}\,\beta + a_{13}\,\gamma &= 0, \\ a_{21}\,\alpha - (a_{33} + a_{11})\,\beta + a_{22}\,\gamma &= 0, \\ a_{31}\,\alpha + a_{32}\,\beta - (a_{11} + a_{22})\,\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Aus ihnen folgt, dass zur Existenz einer Gleichgewichtslage zwischen den Kräften P die Bedingung erfüllt sein muss:

$$\begin{vmatrix} -(a_{22} + a_{33}), & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & -(a_{33} + a_{11}), & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & -(a_{11} + a_{22}) \end{vmatrix} = 0.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so ergibt sich für die Richtung der Gleichgewichtsaxe

$$\frac{\alpha}{a_{12}a_{23} + a_{13}(a_{33} + a_{11})} = \frac{\beta}{a_{13}a_{21} + a_{23}(a_{22} + a_{33})}$$
$$= \frac{\gamma}{(a_{22} + a_{33})(a_{33} + a_{11}) - a_{12}^2}.$$

Ist eine Axe Gleichgewichtsaxe, so ist es auch jede ihr parallele Axe. Denn die Rotation um sie ist äquivalent derselben Rotation um jene Axe in Verbindung mit einer Translation. Eine Translation stört aber den Fortbestand des Gleichgewichts nicht.

§. 5. Sollen die Bedingungen, dass eine Axe von der Richtung $(\alpha\beta\gamma)$ eine Gleichgewichtsaxe sei, für alle Richtungen bestehen, soll also das Kräftesystem für alle Lagen des Punktsystems im Gleichgewicht sein, so müssen die Gleichungen erfüllt sein:

$$a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = 0,$$
$$a_{11} + a_{22} = 0, \quad a_{22} + a_{33} = 0, \quad a_{33} + a_{11} = 0,$$

wozu noch kommen

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

Daher sind die 12 Bedingungen des astatischen Gleichgewichts eines Kräftesystems an einem freien Punktsystem:

$$\begin{aligned} A &= 0, & a_{11} &= 0, & a_{12} &= 0, & a_{13} &= 0, \\ B &= 0, & a_{21} &= 0, & a_{22} &= 0, & a_{23} &= 0, \\ C &= 0, & a_{31} &= 0, & a_{32} &= 0, & a_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Sind sie erfüllt, so besteht zwischen den Kräften für jede Lage des Punktsystems Gleichgewicht.

Man erkennt leicht, dass im Falle des astatischen Gleichgewichts das Kräftesystem auf unzählige Arten in drei Systeme von Parallelkräften zerlegt werden kann, von denen jedes für sich im Gleichgewicht ist. Zerlegt man nämlich jede Kraft P (X, Y, Z) nach irgend drei Richtungen, so sind ihre Componenten nach diesen Richtungen von der Form

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z, \quad \lambda' X + \mu' Y + \nu' Z, \quad \lambda'' X + \mu'' Y + \nu'' Z,$$

wo die Coefficienten λ, μ, ν, ... gewisse Projectionsconstanten sind. Für die Componenten der ersten Richtung z. B. ist nun ihre Summe oder Resultante

$$\lambda \Sigma X + \mu \Sigma Y + \nu \Sigma Z = \lambda A + \mu B + \nu C = 0$$

und die Summe der Momente für die Ebene der yz gleich

$$\lambda \Sigma x X + \mu \Sigma x Y + \nu \Sigma x Z = \lambda a_{11} + \mu a_{12} + \nu a_{13} = 0.$$

Dasselbe gilt von allen übrigen und zwar gilt es für alle Richtungen und für alle Lagen des Systems. Man erhält auf diese Weise auch 12 Gleichungen, welche erfüllt sind, wenn die 12 obigen erfüllt sind. Die obigen drücken in der That dasselbe für die rechtwinklige Zerlegung aus. Man schliesst hieraus, dass die Bedingungen des astatischen Gleichgewichts auch für schiefe Coordinatenaxen gelten.

§. 6. Für die Untersuchungen der Astatik ist die folgende Reduction der Kräfte auf eine Resultante und drei Paare von Werth. In Bezug auf ein beliebiges Coordinatensystem der x, y, z irgend eines Ursprunges O seien X, Y, Z die Componenten der am Punkte A (xyz) angreifenden Kraft P. Diese Kraft ist äquivalent der ihr geometrisch gleichen Kraft P, an O angreifend, in Verbindung mit einem Paare (P, $-P$) von dem astatischen Arme OA. Indem wir auf den Coordinatenaxen von O aus die Längen x, y, z auftragen und in ihren Endpunkten zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte P anbringen, zerfällt das Paar mit dem astatischen Arme OA in drei Paare von derselben Seitenkraft P und den astatischen Armen x, y, z. Reduciren wir das Paar vom Arme x auf den Arm gleich der Einheit, so wird die Seitenkraft gleich xP. Führen wir dasselbe mit den beiden andern Paaren aus, so haben wir statt der Kraft P an A die Kraft P an O und drei Paare von den astatischen Armen 1 und den Seitenkräften xP, yP, zP, deren Arme in den Coordinatenaxen liegen und in O anfangen. Zerlegen wir nun die Seitenkraft xP des ersten dieser Paare in xX, xY, xZ, so liefert diese Zerlegung statt xP drei Paare vom Arme 1 auf der x-Axe und den Seitenkräften xX, xY, xZ parallel den Coordinatenaxen und indem wir ebenso bei allen Kräften P des Systems verfahren, erlangen wir drei Paare vom Arme 1 auf der x-Axe, welche die Summe $\Sigma x X$, $\Sigma x Y$, $\Sigma x Z$ zu Seitenkräften haben, nämlich

$$a_{11} = \Sigma x X, \quad a_{12} = \Sigma x Y, \quad a_{13} = \Sigma x Z,$$

sodass der erste Index in a_{11}, a_{12}, a_{13} die Coordinatenaxe angibt, in welche der gemeinschaftliche Arm 1 der Paare hineinfällt. Indem wir ebenso mit yP verfahren, ergeben sich drei Paare mit den Seitenkräften

$$a_{21} = \Sigma y X, \quad a_{22} = \Sigma y Y, \quad a_{23} = \Sigma y Z$$

vom gemeinsamen Arme 1 auf der y-Axe und desgleichen

$$a_{31} = \Sigma z X, \quad a_{32} = \Sigma z Y, \quad a_{33} = \Sigma z Z,$$

herrührend von den Kräften zP mit Armen gleich 1 auf der z-Axe. Man erkennt in den Kräften dieser 9 Paaren die geometrische Interpretation der 9 Grössen $a_{11}, a_{12}, a_{13}; a_{21}, a_{22}, a_{23}; a_{31}, a_{32}, a_{33}$, welche im Falle des astatischen Gleichgewichts in Verbindung mit den Componenten A, B, C der Reductionsresultanten verschwinden müssen. Indem man die Seitenkräfte a_{11}, a_{12}, a_{13} in eine Kraft K_x, ebenso a_{21}, a_{22}, a_{23} in eine andere K_y, sowie a_{31}, a_{32}, a_{33} in eine dritte K_z zusammensetzt und die Resultante aller P in O bildet, erhält man das Resultat, dass das ganze Kräftesystem äquivalent ist einer Reductionsresultanten (A, B, C), angreifend an irgend einem Punkte O in Verbindung mit drei Paaren, deren astatische Arme die Länge 1 haben und in drei sich in O schneidende Axen fallen, während die Seitenkräfte K_x, K_y, K_z derselben die geometrischen Summen

$$[a_{11}] + [a_{12}] + [a_{13}]; \quad [a_{21}] + [a_{22}] + [a_{23}]; \quad [a_{31}] + [a_{32}] + [a_{33}]$$

darstellen.

Auch kann man das System reduciren auf vier Kräfte, welche in vier gegebenen Punkten O, A, B, C angreifen. Man reducire nämlich dasselbe auf eine Reductionsresultante, welche durch O geht und drei Paare mit den astatischen Armen OA, OB, OC und setze alle in O angreifenden Seitenkräfte der drei Paare mit der Reductionsresultanten zusammen.

§. 7. Die Reduction der Kräfte des vor. §. kann für denselben Punkt O auf unzählige Arten ausgeführt werden, indem die Axen der x, y, z, welche die Richtungen der astatischen Arme angeben, willkührlich wählbar sind. Nehmen wir dieselben rechtwinklig an und suchen wir zu bestimmen, wie die Seitenkräfte der drei Paare sich ändern, wenn an die Stelle der Axen OX, OY, OZ drei andere gleichfalls rechtwinklige Axen OX_1, OY_1, OZ_1 treten, für welche α, β, γ die Richtungscosinusse von OX_1, α', β', γ' die von OY_1 und α'', β'', γ'' die von OZ_1 gegen die Axen OX, OY, OZ sind.

Es seien K_x, K_y, K_z die Seitenkräfte der Paare vom Arme 1 längs OX, OY, OZ. Die Projectionen des Armes von K_x auf die Axen OX_1, OY_1, OZ_1 sind α, α', α'' und ist das Paar von der Seitenkraft K_x äquivalent dreien Paaren mit den Armen α, α', α'' längs OX_1, OY_1, OZ_1 und der Seitenkraft K_x oder den Armen 1 und den Seitenkräften αK_x, $\alpha' K_x$, $\alpha'' K_x$. Ebenso ist das Paar von der Seitenkraft K_y und dem Arme 1 längs OY äquivalent dreien Paaren von den Armen 1 längs OX_1, OY_1, OZ_1 und den Seitenkräften βK_y, $\beta' K_y$, $\beta'' K_y$. Aehnliches gilt von K_z, welches die drei Paare γK_z, $\gamma' K_z$, $\gamma'' K_z$ liefert. Die Paare, deren Arme die Rich-

tung von OX_1 haben, besitzen die Seitenkräfte αK_x, βK_y, γK_z und indem man K_x, K_y, K_z nach den Richtungen der OX, OY, OZ zerlegt, liefern sie Seitenkräfte parallel zu OX, OY, OZ resp. gleich

$$a_{11}\alpha + a_{21}\beta + a_{31}\gamma,$$
$$a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{32}\gamma,$$
$$a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma$$

und ist daher die Seitenkraft K_{x_1} des Paares vom Arme 1 längs OX_1 gegeben durch

$$\begin{aligned} K_{x_1}^2 &= (a_{11}\alpha + a_{21}\beta + a_{31}\gamma)^2 + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{32}\gamma)^2 + (a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma)^2 \\ &= A_x\alpha^2 + A_y\beta^2 + A_z\gamma^2 + 2B_x\beta\gamma + 2B_y\gamma\alpha + 2B_z\alpha\beta, \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} A_x &= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2, & B_x &= a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33}, \\ A_y &= a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2, & B_y &= a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13}, \\ A_z &= a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2, & B_z &= a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} \end{aligned}$$

ist. Aehnliche Gleichungssysteme erhält man für die Seitenkräfte K_{y_1}, K_{z_1} der Paare, deren Arme längs OY_1 und OZ_1 gerichtet sind, indem man blos α', β', γ'; α'', β'', γ'' für α, β, γ setzt.

Tragen wir auf der Axe OX_1 von O aus nach beiden Seiten eine Länge ϱ auf, so dass $\varrho . K_{x_1} = 1$ wird, multipliciren die Gleichung für $K_{x_1}^2$ mit ϱ^2 und bezeichnen die Coordinaten $\varrho\alpha$, $\varrho\beta$, $\varrho\gamma$ des Endpunktes von ϱ in Bezug auf die Axen OX, OY, OZ mit x, y, z, so ergibt sich

$$A_x x^2 + A_y y^2 + A_z z^2 + 2B_x yz + 2B_y zx + 2B_z xy = 1$$

als die Gleichung der Fläche, welche die Endpunkte von ϱ enthält. Dieselbe Fläche erhält man, indem man auf den Axen OY_1, OZ_1 Längen ϱ', ϱ'' aufträgt, für welche $\varrho' K_{y_1} = 1$ und $\varrho'' K_{z_1} = 1$ wird. Die so construirte Fläche ist im Allgemeinen ein Ellipsoid, welches aber in einen Cylinder degeneriren kann, wie man aus der Form

$$(a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z)^2 + (a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z)^2 + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z)^2 = 1$$

ersieht, in welcher die Gleichung derselben dargestellt werden kann. Die Fläche nennen wir mit Darboux, der sie eingeführt hat, das **astatische Centralellipsoid** des Punktes O. Sie liefert durch die reciproken Werthe ihrer vom Mittelpunkt ausgehenden Radienvectoren die Intensitäten der Seitenkräfte der Reductionspaare, deren Arme in die Richtung der Radienvectoren fallen.

Nach einem bekannten Satze ist die Quadratsumme der reciproken Werthe dreier zu einander senkrechter Semidiameter des Ellipsoids constant. Daher folgt: **Für alle Reductionen eines Kräftesystems auf eine durch einen Punkt O gehende Reductionsresultante und drei Paare, deren astatische Arme die Richtungen von drei zu einander senkrechten Stralen von O haben, ist die Quadratsumme**

der auf den astatischen Arm gleich der Einheit reducirten Seitenkräfte constant.

Die Seitenkräfte der drei Paare werden im Allgemeinen unter schiefen Winkeln gegen einander geneigt sein. Es fragt sich aber, ob man nicht drei solche rechtwinklige Stralen OX_1, OY_1, OZ_1 finden könne, für welche als astatische Arme die drei zugehörigen Seitenkräfte K_{x_1}, K_{y_1}, K_{z_1} gleichfalls zu einander senkrecht sind. Nun sind die Componenten dieser Kräfte

$$\begin{array}{lll} a_{11}\alpha + a_{21}\beta + a_{31}\gamma, & a_{11}\alpha' + a_{21}\beta' + a_{31}\gamma', & a_{11}\alpha'' + a_{21}\beta'' + a_{31}\gamma'', \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{32}\gamma, & a_{12}\alpha' + a_{22}\beta' + a_{32}\gamma', & a_{12}\alpha'' + a_{22}\beta'' + a_{32}\gamma'', \\ a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma, & a_{13}\alpha' + a_{23}\beta' + a_{33}\gamma', & a_{13}\alpha'' + a_{23}\beta'' + a_{33}\gamma''; \end{array}$$

daher ist die Bedingung des Senkrechtstehens der Kräfte K_{x_1} und K_{y_1} auf einander:

$$\begin{aligned} &(a_{11}\alpha + a_{21}\beta + a_{31}\gamma)\,(a_{11}\alpha' + a_{21}\beta' + a_{31}\gamma') \\ &+ (a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{32}\gamma)\,(a_{12}\alpha' + a_{22}\beta' + a_{32}\gamma') \\ &+ (a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma)\,(a_{13}\alpha' + a_{23}\beta' + a_{33}\gamma') = 0 \end{aligned}$$

oder entwickelt:

$$A_x\alpha\alpha' + A_y\beta\beta' + A_z\gamma\gamma' + B_x(\beta\gamma' + \beta'\gamma) + B_y(\gamma\alpha' + \gamma'\alpha) + B_z(\alpha\beta' + \alpha'\beta) = 0$$

und ebenso sind

$$\begin{aligned} &A_x\alpha'\alpha'' + A_y\beta'\beta'' + A_z\gamma'\gamma'' + B_x(\beta'\gamma'' + \beta''\gamma') + B_y(\gamma'\alpha'' + \gamma''\alpha') \\ &+ B_z(\alpha'\beta'' + \alpha''\beta') = 0, \\ &A_x\alpha''\alpha + A_y\beta''\beta + A_z\gamma''\gamma + B_x(\beta''\gamma + \beta\gamma'') + B_y(\gamma''\alpha + \gamma\alpha'') \\ &+ B_z(\alpha''\beta + \alpha\beta'') = 0 \end{aligned}$$

die Bedingungen der Rechtwinkligkeit der Kräfte K_{y_1} und K_{z_1}, sowie K_{z_1} und K_{x_1}.

Diese drei Gleichungen sind aber bekanntlich die Bedingungen dafür, dass OX_1, OY_1, OZ_1 die Hauptaxen der Fläche

$$A_x x^2 + A_y y^2 + A_z z^2 + 2B_x yz + 2B_y zx + 2B_z xy - 1 = 0$$

sind. Daher der Satz:

Unter allen Reductionen eines Kräftesystems auf eine Resultante und drei Paare mit zu einander rechtwinkligen astatischen Armen für einen Punkt O gibt es eine einzige, für welche die drei Seitenkräfte der Paare zu einander senkrecht sind. Für sie haben die astatischen Arme die Richtungen der Hauptaxen des Centralellipsoides des Punktes O.

§. 8. Wählen wir die Reduction des Kräftesystems für die Hauptaxen des Centralellipsoids als Richtungen der astatischen Arme, so bilden diese Axen und die Seitenkräfte der drei Paare in O zwei Systeme rechtwinkliger Axen. Nun gibt es eine durch O gehende Axe, durch Rotation um welche das System der Axen zur Coincidenz mit dem System der Seiten-

kräfte gebracht werden kann, so dass jede Seitenkraft in die Richtung ihres Armes fällt und das betreffende Paar verschwindet. Ist diese Lage erreicht, so ergeben sich aus ihr noch drei andere Lagen, in welchen dasselbe stattfindet, indem man das Kräftesystem um eine der drei Axen um π umdreht. Hieraus folgt:

Für jedes freie, unveränderliche Punktsystem, an welchem ein Kräftesystem angreift, gibt es vier Lagen, in welchen sich das Kräftesystem auf eine durch einen gegebenen Punkt des Systems gehende Einzelresultante reducirt.

Ist die Reductionsresultante des Kräftesystems Null, so liefert die Reduction für jeden Punkt O dasselbe resultirende Paar und dasselbe Centralellipsoid mit gleichgerichteten Hauptaxen; daher:

Reduciren sich die Kräfte eines an einem freien unveränderlichen Punktsystem angreifenden Kräftesystems auf ein Paar, so gibt es vier Lagen des Punktsystems, in welchen das Kräftesystem im Gleichgewicht ist.

Ob es nur vier Lagen der Reduction auf eine Einzelresultante oder des Gleichgewichts gibt, bedarf einer sorgfältigen Untersuchung, die wir jetzt führen wollen.

In Betreff des Gleichgewichts sollen a_{11}, a_{22}, a_{33} die Seitenkräfte der drei Paare darstellen, welche die Richtungen der Hauptaxen OX, OY, OZ des Centralellipsoids haben, in welche auch ihre Arme fallen, so dass die Paare verschwinden. Die Gleichung des Centralellipsoids in Bezug auf seine Hauptaxen ist, weil A_x, A_y, A_z sich auf a_{11}, a_{22}, a_{33} reduciren und B_x, B_y, B_z Null sind:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 1.$$

Lässt man nun die Kräfte sich drehen, so werden die Componenten der Seitenkräfte

$$a_{11}\alpha,\ a_{11}\beta,\ a_{11}\gamma;\ \ a_{22}\alpha',\ a_{22}\beta',\ a_{22}\gamma';\ \ a_{33}\alpha'',\ a_{33}\beta'',\ a_{33}\gamma'',$$

wo α, β, γ; α', β', γ; $\alpha'', \beta'', \gamma''$ die Richtungscosinusse der gedrehten Kräfte gegen die Axen sind. Für die neue Lage erhält man die den $a_{11}, a_{22}, \ldots$ analogen Grössen a'_{11}, $a'_{22}, \ldots$ durch Projection derselben auf die neuen Axen, nämlich:

$$\begin{array}{lll} a'_{11} = a_{11}\alpha, & a'_{21} = a_{22}\alpha', & a'_{31} = a_{33}\alpha'', \\ a'_{12} = a_{11}\beta, & a'_{22} = a_{22}\beta', & a'_{32} = a_{33}\beta'', \\ a'_{13} = a_{11}\gamma, & a'_{23} = a_{22}\gamma', & a'_{33} = a_{33}\gamma''. \end{array} \quad (1)$$

Zwischen diesen 9 Grössen bestehen vermöge der Relationen

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \ldots \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \ldots \quad \alpha = \beta'\gamma'' - \beta''\gamma', \ldots$$

die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a'^2_{11}+a'^2_{12}+a'^2_{13}=a^2_{11},\ \ a'_{11}a'_{21}+a'_{12}a'_{22}+a'_{13}a'_{23}=0, \\ a'^2_{21}+a'^2_{22}+a'^2_{23}=a^2_{22},\ \ a'_{21}a'_{31}+a'_{22}a'_{32}+a'_{23}a'_{33}=0, \\ a'^2_{31}+a'^2_{32}+a'^2_{33}=a^2_{33},\ \ a'_{31}a'_{11}+a'_{32}a'_{12}+a'_{33}a'_{13}=0, \end{array}\left|\begin{array}{ccc} a'_{11} & a'_{21} & a'_{31} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{32} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{array}\right| = a_{11}a_{22}a_{33},\right\} \quad (2)$$

$$\frac{a_{22}a_{23}}{a_{11}}\, a'_{11} = a'_{22}a'_{33} - a'_{32}a'_{23}.$$

Damit nun das Gleichgewicht nach der Drehung fortbestehe, müssen die Bedingungen erfüllt sein

$$a'_{12} = a'_{21}, \quad a'_{13} = a'_{31}, \quad a'_{23} = a'_{32}. \qquad (3)$$

Indem wir sie mit den mittleren Gleichungen (2) combiniren, ergibt sich:

$$\begin{aligned} a'_{11}a'_{12} + a'_{12}a'_{22} + a'_{13}a'_{23} &= 0, \\ a'_{11}a'_{13} + a'_{12}a'_{23} + a'_{13}a'_{33} &= 0, \qquad (4) \\ a'_{12}a'_{13} + a'_{22}a'_{23} + a'_{23}a'_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Eliminirt man a'_{11} aus der ersten und zweiten derselben und schreibt die dritte etwas anders, so erhält man:

$$a'_{12}a'_{13}\,(a'_{22} - a'_{33}) = a'_{23}\,(a'^2_{12} - a'^2_{13}), \quad (a'_{22} + a'_{33})\,a'_{23} = -\,a'_{13}a'_{12}$$

und indem man diese Gleichungen mit einander multiplicirt

$$a'_{12}a'_{13}a'_{23}\,(a'^2_{22} - a'^2_{33} + a'^2_{12} - a'^2_{13}) = 0,$$

oder mit Rücksicht auf das erste Gleichungssystem (2) und die Gleichungen (3):

$$a'_{12}a'_{13}a'_{23}\,(a^2_{22} - a^2_{33}) = 0$$

und ebenso

$$\begin{aligned} a'_{12}a'_{13}a'_{23}\,(a^2_{33} - a^2_{11}) &= 0, \qquad (5) \\ a'_{12}a'_{13}a'_{23}\,(a^2_{11} - a^2_{22}) &= 0. \end{aligned}$$

Nun sind mehrere Fälle zu unterscheiden. Entweder sind nämlich die drei Halbaxen des Centralellipsoids alle drei von einander verschieden, d. h. das Centralellipsoid ist ein dreiaxiges, oder es sind zwei derselben gleich, d. h. es ist ein Rotationsellipsoid oder sie sind alle drei einander gleich, in welchem Falle dasselbe eine Kugel ist.

Im Falle eines dreiaxigen Centralellipsoids können die Gleichungen (5) nur durch die Voraussetzung $a'_{12}a'_{13}a'_{23} = 0$ erfüllt werden. Gesetzt es sei z. B. $a'_{13} = 0$. Dann liefert die zweite Gleichung (4) weiter $a'_{12}a'_{23} = 0$ und sieht man, dass zwei der drei Grössen a'_{12}, a'_{13}, a'_{23} verschwinden müssen. Nehmen wir z. B. an, es seien $a'_{13} = 0$ und $a'_{23} = 0$ Dann reduciren sich die Gleichungen (4) auf die erste von ihnen, nämlich $a'_{12}\,(a'_{11} + a'_{22}) = 0$ und wird das erste Gleichungssystem (2) mit Rücksicht auf (3) zu

$$a'^2_{11} + a'^2_{12} = a^2_{11}, \quad a'^2_{12} + a'^2_{22} = a^2_{22}, \quad a'^2_{33} = a'^2_{33}.$$

Aus ihm folgt unter Rücksicht auf (3) weiter $a'^2_{11} - a'^2_{22} = a^2_{11} - a^2_{22}$ und da die rechte Seite dieser Gleichung nicht Null ist, so kann auch kein Factor der linken Seite verschwinden; insbesondere ist also $a'_{11} + a'_{22}$ von Null verschieden. Hieraus folgt, dass die Gleichung $a'_{12}(a'_{11} + a'_{22}) = 0$ nur durch $a'_{12} = 0$ erfüllt wird. Demnach müssen a'_{12}, a'_{13}, a'_{23} alle drei Null sein, wenn zwei von ihnen es sind. Wir erhalten hiermit weiter

$$a'^2_{11} = a^2_{11}, \quad a'^2_{22} = a^2_{22}, \quad a'^2_{33} = a^2_{33},$$
$$a'_{21} = a'_{31} = a'_{32} = a'_{12} = a'_{13} = a'_{23} = 0$$

und wenn wir ± 1 mit ε, ε', ε'' bezeichnen, so wird

$$a'_{11} = \varepsilon a_{11}, \quad a'_{22} = \varepsilon' a_{22}, \quad a'_{33} = \varepsilon'' a_{33}.$$

Nun reducirt sich die Determinante (2) auf $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' = 1$, welches nur vier Zeichencombinationen zulässt. Demnach kann es nur vier Gleichgewichtslagen geben. Die Richtungscosinusse der Hauptaxen des Centralellipsoids mit den Coordinatenaxen, d. h. mit den Hauptaxen in einer Gleichgewichtslage sind

$$\alpha = \varepsilon, \quad \alpha' = 0, \quad \alpha'' = 0,$$
$$\beta = 0, \quad \beta' = \varepsilon', \quad \beta'' = 0,$$
$$\gamma = 0, \quad \gamma' = 0, \quad \gamma'' = \varepsilon''.$$

Ist eine der vier Lagen gegeben, so folgen die andern durch Rotation um eine der drei Axen um π. Daher also:

Ist das Centralellipsoid kein Rotationsellipsoid, so gibt es blos vier Gleichgewichtslagen des Punktsystems.

Ist das Centralellipsoid ein Rotationsellipsoid, so folgt, weil zwei der Grössen a^2_{11}, a^2_{22}, a^2_{33} gleich sind, dass die Gleichungen (5) erfüllt werden, wenn eine der drei Grössen a'_{12}, a'_{13}, a'_{23} Null wird. Ist diese a'_{13}, so ergibt sich weiter aus der zweiten Gleichung (4) $a'_{12}a'_{23} = 0$. Daher müssen zwei der drei Grössen a'_{12}, a'_{13}, a'_{23} verschwinden. Sie seien a'_{13} und a'_{23}. Hiemit reduciren sich die Gleichungen (4) auf $a'_{12}(a'_{11} + a'_{22}) = 0$ und liefern die ersten Gleichungen (2) mit Rücksicht auf (3)

$$a'^2_{11} + a'^2_{12} = a^2_{11}, \quad a'^2_{21} + a'^2_{22} = a^2_{22}, \quad a'^2_{33} = a^2_{33}, \qquad (6)$$

daher ist $a'^2_{11} - a'^2_{22} = a^2_{11} - a^2_{22}$ und da a'_{12} nicht Null ist, so folgt aus $a'_{12}(a'_{11} + a'_{22}) = 0$, dass $a'_{11} = - a'_{22}$, also dass $a^2_{11} = a^2_{22}$, d. h. dass wenn a'_{13} und a'_{23} verschwinden, das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid um die z-Axe ist. Die Gleichung $a^2_{11} = a^2_{22}$ kann aber auf zwei Arten erfüllt werden, nämlich durch $a_{11} = a_{22}$ oder $a_{11} = - a_{22}$. Durch eine Rotation um π um die z-Axe geht aber a_{22} in seinen entgegengesetzten Werth über, daher ist blos der eine dieser beiden Fälle zu berücksichtigen. Die Gleichungen (6) liefern uns

$$\begin{array}{lll} a'_{11}, & a'_{21} = a'_{12} = \sqrt{a_{11}^2 - a'^2_{11}}, & a'_{31} = 0, \\ a'_{12} = \sqrt{a_{11}^2 - a'^2_{11}}, & a'_{22} = - a'_{11}, & a'_{32} = 0, \\ a'_{13} = 0, & a'_{23} = 0, & a'_{33} = \varepsilon a_{33} \end{array}$$

und hiermit werden nach (1) die Richtungscosinusse $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$

$$\begin{array}{lll} \alpha = \cos\varphi, & \alpha' = \sin\varphi, & \alpha'' = 0, \\ \beta = \sin\varphi, & \beta' = \cos\varphi, & \beta'' = 0, \\ \gamma = 0, & \gamma' = 0, & \gamma'' = -1. \end{array}$$

Weil nämlich a'_{11} willkürlich bleibt und $c = 0$ wird, so bildet die x-Axe der neuen Lage in der xy-Ebene alter Lage mit der x-Axe einen beliebigen Winkel φ und weiter zeigt die Determinante (2), dass $\varepsilon = -1$ sein muss. Diese Werthe entsprechen zugleich bei jedem Werthe von φ einer zweiten Lage des Systems, welche durch Rotation um den Winkel π um den Durchmesser der Aequatorebene des Ellipsoids herbeigeführt werden kann, welcher den Winkel φ mit der x-Axe bildet.

Die Untersuchung zeigt, dass, wenn das Centralellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, die Rotationsaxe eine Gleichgewichtsaxe ist und alle Lagen, welche durch Rotation des Systems um sie herbeigeführt werden können, so wie auch alle, welche aus dieser durch Rotation um einen Diameter der Aequatorebene abgeleitet werden können, Gleichgewichtslagen des Systems sind.

Für den Fall, dass das Centralellipsoid eine Kugel ist, sind alle Axen des Mittelpunktes Gleichgewichtsaxen. Das System befindet sich im astatischen Gleichgewicht. Denn weil die z-Axe Gleichgewichtsaxe ist, sind $a'_{13} = a'_{23} = 0$, $a'_{11} + a'_{22} = 0$, weil es die x- und y-Axe ist,

$$a'_{21} = a'_{31} = 0, \; a'_{22} + a'_{33} = 0, \; a'_{32} = a'_{12} = 0, \; a'_{33} + a'_{11} = 0,$$

woraus die 12 Bedingungen des astatischen Gleichgewichts folgen.

Auch für das nicht freie System mit festem Punkte O gelten die Betrachtungen dieses Paragraphen.

§. 9. Aus der Reduction des Kräftesystems auf Resultante und drei Paare für irgend einen Punkt O kann man die analoge Reduction für jeden Punkt O' ableiten. Damit wird zugleich die Beziehung gefunden, welche zwischen den Centralellipsoiden beider Punkte besteht. Bringen wir in O' die Reductionsresultante in ihrem und im entgegengesetzten Sinne an, so combinirt sich das hierdurch eingeführte Paar mit den 3 Paaren des Punktes O zu dem Tripel von Paaren für den Punkt O'. Sind x', y', z' die Coordinaten von O' in Bezug auf das Coordinatensystem OX, OY, OZ, so werden, da die Paare parallel mit sich verlegt werden können, wenn die

Grössen für den Punkt O' mit Accenten behaftet werden:

$$a'_{11} = a_{11} - x'A, \quad a'_{21} = a_{21} - y'A, \quad a'_{31} = a_{31} - z'A,$$
$$a'_{12} = a_{12} - x'B, \quad a'_{22} = a_{22} - y'B, \quad a'_{32} = a_{32} - z'B,$$
$$a'_{13} = a_{13} - x'C, \quad a'_{23} = a_{23} - y'C, \quad a'_{33} = a_{33} - z'C.$$

Bildet man mit diesen Grössen die Ausdrücke A'_x, A'_y, A'_z; B'_x, B'_y, B'_z, welche die Coefficienten von x^2, y^2, z^2, $2yz$, $2zx$, $2xy$ in der Gleichung des Centralellipsoids für den Punkt O' bedeuten und den Coefficienten A_x, A_y, A_z; B_x, B_y, B_z in der Gleichung des Centralellipsoids für O entsprechen, so findet man leicht als Gleichung des Centralellipsoids für den Punkt O' in Bezug auf ein Coordinatensystem dieses Punktes parallel dem Coordinatensystem des Punktes O:

$$\begin{aligned} A_x x^2 + A_y y^2 + A_z z^2 + 2B_x yz + 2B_y zx + 2B_z xy \\ - 2(a_0 x + b_0 y + c_0 z)(x'x + y'y + z'z) \\ + (A^2 + B^2 + C^2)(x'x + y'y + z'z)^2 = 1, \end{aligned}$$

wo

$$a_0 = a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C,$$
$$b_0 = a_{21}A + a_{22}B + a_{23}C,$$
$$c_0 = a_{31}A + a_{32}B + a_{33}C$$

gesetzt ist. Ist die Reductionsresultante, also auch $A = B = C = 0$, so ist das Centralellipsoid für alle Punkte O' gleich dem des Punktes O in Parallellage, wie vermöge der Parallelverlegung der Paare sich von selbst versteht.

Die Grössen a_0, b_0, c_0, welche aus den Reductionselementen des Punktes O gebildet sind, spielen in astatischen Untersuchungen eine wichtige Rolle. Sie ändern sich von Punkt zu Punkt, weil a_{11}, a_{12}, a_{13}, ... sich ändern. Im Punkte $(x'y'z')$ werden sie

$$a'_0 = a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C - x'(A^2 + B^2 + C^2),$$
$$b'_0 = a_{21}A + a_{22}B + a_{23}C - y'(A^2 + B^2 + C^2),$$
$$c'_0 = a_{31}A + a_{32}B + a_{33}C - z'(A^2 + B^2 + C^2).$$

Es gibt einen Punkt x, y, z, für welchen sie verschwinden; seine Coordinaten folgen aus den Gleichungen $a'_0 = 0$, $b'_0 = 0$, $c'_0 = 0$, nämlich

$$x_1 = \frac{a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C}{R^2}, \quad y_1 = \frac{a_{21}A + a_{22}B + a_{23}C}{R^2},$$

$$z_1 = \frac{a_{31}A + a_{32}B + a_{33}C}{R^2}, \quad \text{wo } R^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

Dieser Punkt ändert sich nicht, wenn das System gedreht wird; er ist ein bestimmter Systempunkt und heisst der **Centralpunkt des Kräftesystems**. Seine Lage hängt nur von den Kräften und ihren Neigungen gegen ein-

ander ab. Es ist nämlich

$$(a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C) : R = K_x \cos(K_x R),$$

also

$$Rx_1 = K_x \cos(K_x R), \quad Ry_1 = K_y \cos(K_y R), \quad Rz_1 = K_z \cos(K_z R).$$

Würde man von vornherein den Centralpunkt zum Coordinatenursprung gewählt haben, so wäre die Gleichung des Centralellipsoids im Punkte $(x'y'z')$ geworden

$$A_x x^2 + A_y y^2 + A_z z^2 + 2B_x yz + 2B_y zx + 2B_z xy + R^2(x'x + y'y + z'z)^2 = 1$$

und wenn man das Ellipsoid des Centralpunktes auf seine Hauptaxen bezieht, so werden $B_x = B_y = B_z = 0$, d. h.

$$\begin{aligned} a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, & & a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C = 0, \\ a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0, & \text{und zugleich ist } & a_{21}A + a_{22}B + a_{23}C = 0, \\ a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0, & & a_{31}A + a_{32}B + a_{33}C = 0, \end{aligned}$$

weil x_1, y_1, z_1 Null sind. Von diesen beiden Gleichungssystemen drückt das erste aus, dass die Seitenkräfte der drei Paare paarweise zu einander rechtwinklig sind, das zweite, dass sie alle drei auf der Reductionsresultanten senkrecht stehen. Sie können aber nicht alle drei gleichzeitig auf einander und auf ein und derselben Geraden senkrecht stehen. Da R nicht verschwindet, so muss daher eine der drei Seitenkräfte der Paare Null sein. Daher:

Das Kräftesystem ist immer äquivalent einer durch den Centralpunkt des Kräftesystems gehenden Reductionsresultanten in Verbindung mit zwei Paaren von zu einander rechtwinkligen astatischen Armen, deren Seitenkräfte unter sich und zur Resultanten rechtwinklig sind.

Indem man die Kräfte dreht, dreht sich die Resultante zugleich mit und gibt es also immer eine Lage des Systems, in welcher die Seitenkräfte der Paare mit ihren Armen zusammenfallen und die Resultante senkrecht auf diesen Armen steht, d. h. mit dem Arme des Paares, dessen Seitenkraft verschwindet, zusammenfällt. Die Ebene des Centralpunktes, welche senkrecht ist zum Arme des Paares von verschwindender Seitenkraft, heisst die Centralebene des Kräftesystems.

Wählen wir die Hauptaxen des Centralellipsoids für den Centralpunkt der Kräfte zu Axen der x, y, 0 d. h. die Centralebene zur xy-Ebene und die Richtung der Resultanten oder des Armes der verschwindenden Seitenkraft zur z-Axe, so sind $A = 0$, $B = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{31} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$, $A_x = a_{11}^2$, $A_y = a_{22}^2$, $A_z = 0$ und wird die Gleichung des Centralellipsoids in irgend einem Punkte $(x'y'z')$ in Bezug

auf Axen parallel zu den Coordinatenaxen des Centralpunktes der Kräfte

$$a_{11}^2 x^2 + a_{22}^2 y^2 + C^2 (x'x + y'y + z'z)^2 = 1.$$

Für den Centralpunkt sind x', y', z' Null und wird das Centralellipsoid für ihn ein Cylinder $a_{11}^2 x^2 + a_{22}^2 y^2 = 1$, ebenso für alle Punkte $(z' = 0)$ der Centralebene ein Cylinder $a_{11}^2 x^2 + a_{22}^2 y^2 + C^2 (x'x + y'y)^2 = 1$. Die Erzeugungslinien der Cylinder sind senkrecht zur Centralebene. Man sieht, dass das Kräftesystem auf drei zu einander rechtwinklige Kräfte reducirbar ist, welche in drei Punkten der Centralebene angreifen und von denen zwei in diese Ebene fallen, während die dritte zu ihr senkrecht ist.

Um die Richtungen der Hauptaxen des Centralellipsoids im Punkte $(x'y'z')$ zu finden, suchen wir die Richtungen der grössten und kleinsten Semidiameter ϱ desselben. Indem wir in der vorigen Gleichung $x = \varrho\alpha$, $y = \varrho\beta$, $z = \varrho\gamma$ setzen, erhalten wir

$$\frac{1}{\varrho^2} = a_{12}^2 \alpha^2 + a_{22}^2 \beta^2 + C^2 (\alpha x' + \beta y' + \gamma z')^2$$

und wenn wir $-\mu(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1) = 0$ addiren, wo μ einen unbestimmten Factor bedeutet und die Derivirten nach α, β, γ gleich Null setzen, folgt:

$$\begin{aligned}
(a_{11}^2 - \mu)\,\alpha + C^2 x' (\alpha x' + \beta y' + \gamma z') &= 0,\\
(a_{22}^2 - \mu)\,\beta + C^2 y' (\alpha x' + \beta y' + \gamma z') &= 0,\\
-\mu\gamma + C^2 z' (\alpha x' + \beta y' + \gamma z') &= 0.
\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit α, β, γ und addirt sie, so folgt $\mu = \frac{1}{\varrho^2}$, nämlich gleich dem reciproken Werthe des gesuchten Maximums oder Minimums von ϱ^2; multiplicirt man sie dagegen mit x', y', z' und addirt sie nach der Division mit $a_{11}^2 - \mu$, $a_{22}^2 - \mu$, $-\mu$, so erhält man zur Bestimmung von μ die cubische Gleichung

$$\frac{x'^2}{a_{11}^2 - \mu} + \frac{y'^2}{a_{22}^2 - \mu} - \frac{z'^2}{\mu} + \frac{1}{C^2} = 0$$

und zugleich für die Richtungscosinusse der Hauptaxen im Punkte $(x'y'z')$:

$$\frac{\alpha}{x' : (a_{11}^2 - \mu)} = \frac{\beta}{y' : (a_{22} - \mu)} = \frac{\gamma}{-\mu}.$$

Die Wurzeln der cubischen Gleichung in μ sind die Parameter eines Systems von confocalen Flächen zweiter Ordnung; confocal mit der ideellen Ellipse

$$z' = 0, \quad \frac{x'^2}{a_{11}^2} + \frac{y'^2}{a_{22}^2} + \frac{1}{C^2} = 0$$

und die Richtungscosinusse sind die der Normalen der drei confocalen Flächen, welche durch den Punkt $(x'y'z')$ hindurchgehen. Daher:

Die Hauptaxen der Centralellipsoide aller Systempunkte sind die Normalen dreier confocaler Flächen zweiter Ordnung, welche sich in diesen Punkten schneiden und confocal sind mit der ideellen Ellipse in der Centralebene, deren Mittelpunkt der Centralpunkt und deren Halbaxen $a_{11}i$, $a_{22}i$ sind (ideelle Centralcurve).

Wir wollen noch die Frage behandeln, welches der geometrische Ort aller Systempunkte sei, in welchen das Centralellipsoid ein Rotationsellipsoid wird. Da jeder Diameter des Centralellipsoids, welcher in die Ebene der beiden gleichen Axen fällt, als eine Hauptaxe anzusehen ist, so muss in der Bestimmung der Richtungscosinusse derselben eine Willkührlichkeit eintreten, d. h. es muss eine der Gleichungen, welche oben für α, β, γ aufgestellt wurden, unabhängig von diesen Grössen erfüllt werden. Dies liefert entweder: $a_{11}^2 - \mu = 0$ und $x' = 0$ oder $a_{22}^2 - \mu = 0$ und $y' = 0$ oder $\mu = 0$ und $z' = 0$. Die fraglichen Punkte $(x'y'z')$ genügen daher den Bedingungen:

$$x' = 0, \quad \frac{y'^2}{a_{22}^2 - a_{11}^2} - \frac{z'^2}{a_{11}^2} + \frac{1}{C^2} = 0 \text{ oder } y' = 0, \quad \frac{x'^2}{a_{11}^2 - a_{22}^2} - \frac{z'^2}{a_{22}^2} + \frac{1}{C^2} = 0$$

$$\text{oder } z' = 0, \quad \frac{x'^2}{a_{11}^2} + \frac{y'^2}{a_{22}^2} + \frac{1}{C^2} = 0.$$

Von diesen drei Ortscurven ist die dritte ideell. Von den beiden andern ist eine eine Ellipse, die andere eine Hyperbel. Ist $a_{11} > a_{22}$, so ist die erste elliptisch. Man nennt sie die Focalkegelschnitte; sie enthalten die Brennpunkte des confocalen Flächensystems und jede geht durch die Brennpunkte der andern hindurch. Die Rotationsaxe des Centralellipsoids ist Tangente an den Focalkegelschnitt, auf welchem der Punkt $(x'y'z')$ liegt, weil sie Normale einer der drei durch diesen Punkt gehenden confocalen Flächen sein muss.

§. 10. Wir wollen das Kräftesystem auf eine Resultante und drei Paare für einen Punkt O reduciren und zwar die drei Paare wählen, deren astatische Arme die Hauptaxen des Centralellipsoids von O sind, welches wir als ein dreiaxiges annehmen. Dass die Paare verschwinden und das Kräftesystem einer blosen Reductionsresultanten äquivalent werde, ist nach dem Vorigen nur für vier Lagen des Systems möglich, in welchen nämlich die Seitenkräfte der Paare in die Axen des Centralellipsoids hineinfallen. Daher:

Es gibt im Allgemeinen nur vier Lagen eines Punktsystems, an welchem ein Kräftesystem angreift, so dass für dieselben

das letztere einer Einzelkraft äquivalent wird, welche durch einen gegebenen Punkt des Systems hindurchgeht. Die Richtungslinien dieser vier gleichen Einzelkräfte von demselben Sinne sind paarweise symmetrisch gegen die Hauptaxen des Centralellipsoids des gegebenen Punktes.

Ist das Centralellipsoid des Punktes O ein Rotationsellipsoid, wozu erfordert wird, dass O auf einem der Focalkegelschnitte des confocalen Flächensystems des Centralpunktes der Kräfte liege, wodurch die Tangente an den Focalkegelschnitt in O die Rotationsaxe wird, so sind alle Axen senkrecht zur Rotationsaxe Hauptaxen von O, tilgen sich die Paare für alle Lagen des Systems, welche durch Rotation um die Rotationsaxe des Centralellipsoids erreichbar sind und bilden die Lagen der Einzelresultanten eine Rotationskegelfläche um diese Axe. Daher:

Ist das Centralellipsoid eines Punktes ein Rotationsellipsoid, d. h. liegt derselbe auf einem der beiden Focalkegelschnitte des Systems, so gibt es unzählige Lagen des Systems, in welchen das Kräftesystem einer durch den Punkt gehenden Einzelkraft äquivalent ist. Alle diese Lagen sind durch Rotation des Systems um die Tangente des Focalkegelschnitts in jenem Punkte erreichbar und alle ihnen entsprechenden Einzelkräfte bilden eine Rotationskegelfläche um diese Tangente.

Nehmen wir jetzt an, der Punkt O liege in der Ebene eines Focalkegelschnittes, z. B. in der Ebene der yz, aber nicht gerade auf dem Kegelschnitte selbst. Es sei ferner das Kräftesystem reducirt für den Centralpunkt der Kräfte auf die Resultante in der Richtung der z-Axe und zwei Paare von den astatischen Armen in der x-Axe und y-Axe; endlich sei das System so gedreht, dass diese Paare verschwinden, d. h. dass ihre Seitenkräfte in die Hauptaxen OX, OY fallen. Uebertragen wir jetzt die Reduction auf den Punkt O, indem wir in O zwei der Reductionsresultanten gleiche und entgegengesetzte Kräfte zufügen. Es tritt dann zu den beiden verschwindenden Paaren noch das Paar hinzu, dessen astatischer Arm der Abstand des Punktes O vom Centrallpunkt der Kräfte ist und dessen Seitenkräfte gleich der Reductionsresultanten sind. Die Resultante für O und dies Paar fallen in die Ebene der yz. Indem man die Paare transformirt für die Hauptaxen des Punktes O, erkennt man leicht, dass zum Verschwinden derselben blos Rotationen erforderlich sind um Axen senkrecht zur yz-Ebene, welche also die Resultante der Reduction für den Punkt O nicht aus der Ebene der yz herausheben. Daher:

Für jeden Punkt in der Ebene eines der beiden Focalkegelschnitte, welcher nicht diesem Kegelschnitt selbst angehört,

fällt die Einzelresultante, auf welche das Kräftesystem reducirt werden kann, in die Ebene dieses Focalkegelschnittes hinein.

Liegt nun der Punkt O nicht in der Ebene eines Focalkegelschnittes und reducirt man für ihn das Kräftesystem auf eine Einzelresultante, so wird die Richtung derselben jede Focalebene schneiden. Sie kann sie aber nur in einem Punkte des in ihr enthaltenen Focalkegelschnittes treffen. Denn träfe sie in irgend einem andern Punkte diese Ebene und man reducirte die Kräfte für ihn, so müsste die Resultante nach dem vorigen Satze in diese Ebene hineinfallen. Diese Resultante könnte daher nicht durch O gehen. Daher:

Für alle Lagen des Punktsystems, in welchen das Kräftesystem äquivalent einer Einzelresultanten ist, schneiden die Richtungslinien der Einzelresultanten zwei bestimmte Kegelschnitte, eine Ellipse und eine Hyperbel, welche eine Hauptaxe gemein haben und deren Ebenen auf einander senkrecht stehen. Die Ebenen beider Kegelschnitte stehen senkrecht auf der Centralebene, der gemeinsame Mittelpunkt beider Curven ist der Centralpunkt der Kräfte und sie sind die Focalcurven des Systems confocaler Flächen 2. Ordnung, deren Normalen die Hauptaxen der Centralellipsoide des Punktsystems bestimmen.

Diesen Satz verdankt man Minding (Crelle, Journ. B. XV, S. 27 und Handbuch der theoretischen Mechanik, Berlin 1838, S. 97).

§. 11. Der Minding'sche Satz ist ein specieller Fall eines allgemeinen, von Darboux entwickelten Satzes, nämlich:

Ertheilt man dem Punktsystem alle möglichen Lagen um den Centralpunkt der Kräfte, so bilden die den verschiedenen Lagen entsprechenden Lagen der Centralaxe des Kräftesystems einen Complex zweiten Grades, welcher gebildet wird von den Schnittlinien der zu einander rechtwinkligen Paare von Berührungsebenen der Minding'schen Focalkegelschnitte.

Gehen wir von der Lage aus, bei welcher für die Reduction für den Centralpunkt der Kräfte die Resultante senkrecht auf der Centralebene steht und die Seitenkräfte der beiden Paare in die Hauptaxen des Centralellipsoids (Centralcylinders) fallen, welche in der Centralebene enthalten sind (§. 9). Letztere Axen seien wieder die Axen der x und y. Dann sind die Grössen a_{11}, a_{22}, C allein von allen zwölf Grössen a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, A, B, C nicht Null. Aendert man nun die Lage des Systems, so dass die Coordinatenaxen in der geänderten Lage mit den ursprünglichen die Richtungscosinusse α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' und jene mit ihnen also die Richtungscosinusse $\alpha\alpha'\alpha''$, $\beta\beta'\beta''$, $\gamma\gamma'\gamma''$ bestimmen, so erhält

man als Projectionen der Resultanten und der Seitenkräfte der beiden Paare auf die neuen Axen:

$$\begin{aligned} A' &= \gamma C, & a'_{11} &= \alpha a_{11}, & a'_{21} &= \beta a_{22}, & a'_{31} &= 0, \\ B' &= \gamma' C, & a'_{12} &= \alpha' a_{11}, & a'_{22} &= \beta' a_{22}, & a'_{32} &= 0, \\ C' &= \gamma'' C, & a'_{13} &= \alpha'' a_{11}, & a'_{23} &= \beta'' a_{22}, & a'_{33} &= 0 \end{aligned}$$

und wenn wir diese Reduction auf irgend einen Punkt xyz des Systems (in der neuen Lage) übertragen, so erhält man für diesen, wie in §. 9:

$$\begin{aligned} A'' &= \gamma C, & a''_{11} &= \alpha a_{11} - \gamma x C, & a''_{21} &= \beta a_{22} - \gamma y C, & a''_{31} &= -\gamma z C, \\ B'' &= \gamma' C, & a''_{12} &= \alpha' a_{11} - \gamma' x C, & a''_{22} &= \beta' a_{22} - \gamma' y C, & a''_{32} &= -\gamma' z C, \\ C'' &= \gamma'' C, & a''_{13} &= \alpha'' a_{11} - \gamma'' x C, & a''_{23} &= \beta'' a_{22} - \gamma'' y C, & a''_{33} &= -\gamma'' z C. \end{aligned}$$

Nun sind die Componenten des resultirenden Kräftepaares

$$\begin{aligned} L'' &= a''_{23} - a''_{32} = \beta'' a_{22} - (\gamma'' y - \gamma' z)\, C, \\ M'' &= a''_{31} - a''_{13} = -\alpha'' a_{11} + (\gamma'' x - \gamma z)\, C, \\ N'' &= a''_{12} - a''_{21} = \alpha' a_{11} - \beta a_{22} + (\gamma y - \gamma' x)\, C; \end{aligned}$$

soll daher der Punkt xyz der Centralaxe der Kräfte angehören, so müssen die Gleichungen

$$\frac{L''}{A''} = \frac{M''}{B''} = \frac{N''}{C''}$$

bestehen. Es ist aber zugleich

$$\begin{aligned} \frac{L''}{\gamma} = \frac{M''}{\gamma'} = \frac{N''}{\gamma''} &= \frac{\gamma L'' + \gamma' M'' + \gamma'' N''}{\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2} \\ &= (\gamma\beta'' - \gamma''\beta)\, a_{22} - (\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha')\, a_{11} = \alpha' a_{22} - \beta a_{11}. \end{aligned}$$

Daher werden

$$L'' = \gamma\,(\alpha' a_{22} - \beta a_{11}), \quad M'' = \gamma'\,(\alpha' a_{22} - \beta a_{11}), \quad N'' = \gamma''\,(\alpha' a_{22} - \beta a_{11})$$

oder, wenn man die vorhin entwickelten Ausdrücke diesen gleichsetzt:

$$\begin{aligned} (\gamma' z - \gamma'' y)\, C &= -\beta'' a_{22} + \gamma\,(\alpha' a_{22} - \beta a_{11}), \\ (\gamma'' x - \gamma z)\, C &= \alpha'' a_{11} + \gamma'\,(\alpha' a_{22} - \beta a_{11}), \\ (\gamma y - \gamma' x)\, C &= \beta a_{22} - \alpha' a_{11} + \gamma''\,(\alpha' a_{22} - \beta a_{11}). \end{aligned}$$

Die Lage der Centralaxe ist durch die Coordinaten x, y, z eines ihrer Punkte und durch $\gamma, \gamma', \gamma''$, nämlich ihre Richtungscosinusse gegen die Axen bestimmt. Die drei letzten Gleichungen sind nicht unabhängig von einander und sind daher äquivalent zweien von ihnen. Man kann aus ihnen wegen $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$, $\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1$ die Grössen $\alpha, \beta;\ \alpha', \beta';\ \alpha'', \beta''$ eliminiren und erhält dann eine Gleichung zwischen $x, y, z, \gamma, \gamma', \gamma''$ für die Lage der Centralaxe, welches die Gleichung eines Complexes zweiten Grades sein wird.

Zur Ausführung dieser Elimination genügt es, die drei Gleichungen

zu quadriren und zu addiren. Man findet mit Rücksicht auf die bekannten Relationen zwischen den 9 Cosinussen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

$$(\gamma' z - \gamma'' y)^2 + (\gamma'' x - \gamma z)^2 + (\gamma y - \gamma' x)^2 = \frac{a_{11}^2}{C^2} \gamma^2 + \frac{a_{22}^2}{C^2} \gamma'^2.$$

Man kann zeigen, dass er gebildet wird durch die Schnittlinien der zu einander rechtwinkligen Berührungsebenen der beiden oben erwähnten Focalkegelschnitte Mindings.

Setzt man $L'' = M'' = N'' = 0$, so reducirt sich das Kräftesystem auf eine Einzelresultante und erscheint der Minding'sche Satz wieder. Man hat nämlich den drei Gleichungen, aus welchen durch Elimination von α, β; α', β'; α'', β'' die Gleichung des Complexes hervorging, dann noch zuzusetzen die Gleichung $\alpha' a_{22} - \beta a_{11} = 0$, welche ausdrückt, dass das resultirende Axenmoment Null ist. Hiemit reduciren sich die beiden ersten dieser Gleichungen auf

$$C(\gamma' z - \gamma'' y) = -\beta'' a_{22}, \quad C(\gamma'' x - \gamma z) = \alpha'' a_{11},$$

woraus folgt

$$a_{11}^2 (\gamma' z - \gamma'' y)^2 + a_{22}^2 (\gamma'' x - \gamma z)^2 = \frac{a_{11}^2 a_{22}^2}{C^2} (\gamma^2 + \gamma'^2),$$

indem $\alpha''^2 + \beta''^2 = 1 - \gamma''^2 = \gamma^2 + \gamma'^2$ ist. Diese Gleichung stellt zusammen mit der Gleichung des Complexes die Congruenz dar, welche von den Richtungslinien aller Einzelresultanten gebildet wird. Dieselbe ist von der 4. Ordnung und 4. Classe, d. h. durch jeden Punkt des Raumes gehen 4 Stralen und jede Ebene enthält deren 4. Eliminirt man aus den Gleichungen der Congruenz $(\gamma' z - \gamma'' y)^2$, so kommt

$$(a_{22}^2 - a_{11}^2)(\gamma'' x - \gamma z)^2 - a_{11}^2 (\gamma y - \gamma' x)^2 = \frac{1}{C^2} a_{11}^2 (a_{22}^2 - a_{11}^2) \gamma^2.$$

Für den Schnittpunkt des Congruenzstrales mit der yz-Ebene ist $x = 0$, d. h. dieser Schnittpunkt liegt auf der Curve

$$\frac{y^2}{a_{22}^2 - a_{11}^2} - \frac{z^2}{a_{11}^2} + \frac{1}{C^2} = 0,$$

nämlich der Focallinie in der yz-Ebene. Ebenso für die andere Focallinie. Die Tangentenebenen, welche in beiden Schnittpunkten an die Focallinie gelegt werden können, sind rechtwinklig zu einander.

§. 12. Ist ein Kräftesystem nicht im Gleichgewicht, so kann es auf unendlich viele Arten durch Zufügung zweier Kräfte oder einer Einzelkraft in Verbindung mit einem Paare ins Gleichgewicht gebracht werden. Wir wollen suchen, diese beiden Kräfte so zu bestimmen, dass die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte eine Gleichgewichtsaxe werde. **Möbius** hat zuerst gezeigt, dass es zwei solcher Axen gebe; er nennt sie **Hauptaxen**

des **Gleichgewichts**. Statt der beiden Kräfte nehmen wir lieber eine Einzelkraft, welche dann nothwendig der Reductionsresultanten des Systems entgegengesetzt gleich sein muss und ein Paar, dessen Arm der Gleichgewichtsaxe parallel sein wird.

Es seien p, q, r die Projectionen des Armes des Paares auf die Coordinatenaxen; dieselben sind proportional den Richtungscosinussen der Hauptaxe. Indem wir im Punkte x_0, y_0, z_0 der gesuchten Axe die Kraft $(-A, -B, -C)$ und ein Paar von den Componenten ξ, η, ζ der Seitenkraft und einem Arme, dessen Projectionen auf die Axen p, q, r sind, einführen, tritt Gleichgewicht ein und sind in Folge dessen die Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} a_{23} - a_{32} + y_0 C - z_0 B + \eta r - \zeta q &= 0, \\ a_{31} - a_{13} + z_0 A - x_0 C + \zeta p - \xi r &= 0, \qquad (1) \\ a_{12} - a_{21} + x_0 B - y_0 A + \xi q - \eta p &= 0. \end{aligned}$$

Damit das Gleichgewicht während der Rotation um die gesuchte Axe fortbestehe, müssen die drei Gleichungen §. 4 erfüllt sein, wenn die dortigen Grössen a_{11}, a_{21}, ... so gebildet werden, dass den Kräften des Systems die Kräfte $-A$, $-B$, $-C$ und das Paar (ξ, η, ζ) mit den Projectionen p, q, r seines Armes zugefügt wird. Diese Grössen werden dann

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11} + \xi p - A x_0, & a'_{21} &= a_{21} + \xi q - A y_0, & a'_{31} &= a_{31} + \xi r - A z_0, \\ a'_{12} &= a_{12} + \eta p - B x_0, & a'_{22} &= a_{22} + \eta q - B y_0, & a'_{32} &= a_{32} + \eta r - B z_0, \\ a'_{13} &= a_{13} + \zeta p - C x_0, & a'_{23} &= a_{23} + \zeta q - C y_0, & a'_{33} &= a_{33} + \zeta r - C z_0 \end{aligned}$$

und hiemit gehen die Gleichungen des §. 4 über in:

$$\begin{aligned} &H + p(Ax_0 + By_0 + Cz_0) - A(px_0 + qy_0 + rz_0) + q(\xi q - \eta p) - r(\zeta p - \xi r) = 0, \\ &H' + q(Ax_0 + By_0 + Cz_0) - B(px_0 + qy_0 + rz_0) + r(\eta r - \zeta q) - p(\xi q - \eta p) = 0, \quad (2) \\ &H'' + r(Ax_0 + By_0 + Cz_0) - C(px_0 + qy_0 + rz_0) + p(\zeta p - \xi r) - q(\eta r - \zeta q) = 0, \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} H &= p a_{11} + q a_{21} + r a_{31} - p(a_{11} + a_{22} + a_{33}), \\ H' &= p a_{12} + q a_{22} + r a_{32} - q(a_{11} + a_{22} + a_{33}), \qquad (3) \\ H'' &= p a_{13} + q a_{23} + r a_{33} - r(a_{11} + a_{22} + a_{33}) \end{aligned}$$

ist. Indem man die drei Gleichungen (1) mit p, q, r multiplicirt und addirt, eliminirt man ξ, η, ζ und erhält

$$A(y_0 r - z_0 q) + B(z_0 p - x_0 r) + C(x_0 q - y_0 p) - L = 0, \qquad (4)$$

wo

$$L = (a_{23} - a_{32}) p + (a_{31} - a_{13}) q + (a_{12} - a_{21}) r. \qquad (5)$$

Sucht man aus (1) die Grössen $\eta r - \zeta q$, ... und setzt sie in (2) ein, so folgt

$$\left.\begin{aligned}
&K \;\;\, - B\,(x_0 q - y_0 p) + C\,(z_0 p - x_0 r) = 0,\\
&K' \;\, - C\,(y_0 r - z_0 q) + A\,(x_0 q - y_0 p) = 0,\\
&K'' - A\,(z_0 p - x_0 r) + B\,(y_0 r - z_0 q) = 0,\\
\text{wo}\quad &K = -p\,(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + p a_{11} + q a_{12} + r a_{13},\\
&K' = -q\,(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + p a_{21} + q a_{22} + r a_{23},\\
&K'' = -r\,(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + p a_{31} + q a_{32} + r a_{33}.
\end{aligned}\right\}\quad (6)$$

Die Gleichungen (4) und (6) enthalten die Lösung des Problems. Sie liefern $p, q, r, y_0 r - z_0 q, z_0 p - x_0 r, x_0 q - y_0 p$ und hiemit p, q, r, x_0, y_0, z_0, wodurch die gesuchte Hauptaxe des Gleichgewichts bestimmt ist. Die ersteren 6 Grössen sind die Plücker'schen Coordinaten einer Geraden und die 4 Gleichungen (4) und (6) zwischen diesen Grössen sind die Gleichungen von vier Complexen ersten Grades, deren gemeinsame Stralen die gesuchten Hauptaxen sind. Um p, q, r, x_0, y_0, z_0 bequem zu finden, multipliciren wir (6) mit A, B, C und addiren; dies liefert für p, q, r die Gleichung ersten Grades

$$AK + BK' + CK'' = 0. \qquad (7)$$

Ferner multipliciren wir die (4) und die beiden ersten von (6) mit $-C$, B, $-A$ und erhalten durch Addition derselben

$$(x_0 q - y_0 p)\,(A^2 + B^2 + C^2) = AK' - BK + CL,$$

und analog

$$\begin{aligned}
(y_0 r - z_0 q)\,(A^2 + B^2 + C^2) &= BK'' - CK' + AL, \qquad (8)\\
(z_0 p - x_0 r)\,(A^2 + B^2 + C^2) &= CK - AK'' + BL.
\end{aligned}$$

Setzt man die Werthe von $x_0 q - y_0 p, \ldots$ in (4) ein, so kommt für p, q, r die Gleichung 2. Grades

$$\begin{vmatrix} K & K' & K'' \\ A & B & C \\ p & q & r \end{vmatrix} = L\,(Ap + Bq + Cr),$$

welche mit (7) zwei Werthsysteme für p, q, r liefert. Zu jedem folgen aus (8) die Werthe von x_0, y_0, z_0. Die Werthe von ξ, η, ζ bleiben aber zum Theil unbestimmt (Gl. 1), wie auch von selbst als nothwendig einleuchtet, da man längs der Axe entgegengesetzt gleiche Kräfte zufügen und mit ξ, η, ζ verbinden kann.

Man erkennt leicht die geometrischen Bedingungen, unter welchen eine gegebene Gerade h eine Hauptaxe des Gleichgewichts werden kann. Reduciren wir nämlich das Kräftesystem für einen Punkt O der Geraden h auf die Resultante, angreifend in O und drei Paare mit astatischen Armen, welche zu einander rechtwinklig sind, von denen einer in h fällt

und fügen wir demselben eine der Resultanten entgegengesetzt gleiche, sie tilgende Kraft, so wie ein Paar zu, dessen Arm parallel h ist, so muss es möglich sein, das Punktsystem in eine Lage zu bringen, von welcher aus ungeachtet einer Rotation um h das Gleichgewicht fortbesteht. Es muss daher nach Einführung des Paares das Centralellipsoid des Punktes O ein Rotationsellipsoid um die Axe h werden. Nimmt man das zugefügte Paar entgegengesetzt gleich dem Rotationspaare, dessen Arm in h fällt, so folgt, dass die beiden andern Paare sich fortwährend Gleichgewicht halten müssen. Ihre Seitenkräfte, welche umgekehrt proportional den Radienvectoren des neuen Centralellipsoids sein müssen, werden einander gleich, da dieses ein Rotationsellipsoid ist. Da sie aber auch mit Hülfe des ursprünglichen Centralellipsoids bestimmt werden können, so folgt, dass der Schnitt dieses letzteren senkrecht auf h ein Kreisschnitt desselben sein muss. Daher:

Jede Gerade, welche eine Hauptaxe des Gleichgewichts werden kann, ist senkrecht zu einem Kreisschnitte des Centralellipsoids irgend eines ihrer Punkte. Durch einen Punkt des Systems gehen im Allgemeinen nur zwei solche Hauptaxen da das Centralellipsoid in demselben im Allgemeinen nur zwei Kreisschnitte besitzt. Die sämmtlichen Hauptaxen des Gleichgewichts sind daher die Erzeugungslinien der einfachen Hyperboloide, welche dem System der confocalen Flächen angehören, deren Normalen die Hauptaxen der Centralellipsoide bestimmen. Sie bilden eine Liniencongruenz.

§. 13. Die Entwickelungen dieses Capitels in der vorgeführten Allgemeinheit verdankt man Darboux. Durch die Einführung der astatischen Paare und des Centralellipsoids hat er denselben einen hohen Grad geometrischer Durchsichtigkeit gegeben, ähnlich derjenigen, welche Binet, Cauchy und Poinsot in der Theorie der Trägheitsmomente durch die Einführung der Trägheitsellipsoide erreicht haben. Indessen kann man auch von einer anderen Seite die Probleme der Astatik behandeln, welche gleichfalls verdient gekannt zu werden. Wir fügen in dieser Hinsicht einiges hinzu, was auf den Methoden von Minding und Möbius beruht.

Aus B. I, S. 18 ergibt sich, dass die Resultante zweier an einem ebenen System angreifenden Kräfte stets durch einen bestimmten Punkt hindurchgeht, wenn das System um irgend einen seiner Punkte rotirt, während die Kräfte geometrisch sich nicht ändern, oder bei ruhendem System die Kräfte um ihre Angriffspunkte alle in demselben Sinne und um denselben Winkel gedreht werden. Dieser Punkt, der Mittelpunkt der beiden Kräfte, liegt auf dem Kreise, welcher den Ort des Schnittpunktes der Kraftrichtungen während dieser Drehung bildet. Werden die beiden Kräfte parallel, so fällt ihr Mittelpunkt in die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte und theilt deren Entfernung im umgekehrten Verhältniss der Kräfte. So lange die Resultante der Kräfte nicht verschwindet, existirt dieser Mittelpunkt stets im Endlichen. B. I, S. 36 u. 54 wurde die Existenz des Mittelpunktes der Parallelkräfte für eine beliebige Anzahl solcher Kräfte, sei

es, dass sie ein ebenes oder auch ein räumliches Kräftesystem bilden, dargethan und wurden seine Coordinaten bestimmt. Es gibt aber auch für drei und mehr Kräfte in der Ebene, wenn sie nicht parallel sind und ihre Resultante nicht verschwindet, einen Mittelpunkt der Kräfte, durch welchen diese Resultante fortwährend hindurchgeht, mag das System in seiner Ebene irgendwie sich bewegen, während alle Kräfte geometrisch gleich bleiben. Um diesen Punkt zu finden, kann man den Mittelpunkt zweier Kräfte suchen, zu deren in diesem Mittelpunkte angreifenden Resultanten und der dritten Kraft von neuem den Mittelpunkt bestimmen u. s. f. Da es offenbar nur einem solchen Punkt geben kann, so folgt, dass man bei beliebiger Aufeinanderfolge der Kräfte stets zu demselben Punkte gelangen muss.

Mit Hülfe des Mittelpunktes der Parallelkräfte kann man den Mittelpunkt irgend eines ebenen Kräftesystems leicht finden, wie wir jetzt zeigen werden.

Die Lage des Mittelpunktes eines Systems von Parallelkräften hängt blos von der Lage der Angriffspunkte und den Verhältnissen der Kraftintensitäten ab, ist also für alle Systeme von Parallelkräften derselbe, wenn die Angriffspunkte und diese Verhältnisse dieselben sind. Zieht man daher durch die Angriffspunkte der Parallelkräfte Gerade von einer bestimmten, aber beliebigen Richtung und projicirt diese Kräfte auf sie parallel einer gegebenen Ebene, so erhält man ein neues System von Parallelkräften, welches denselben Mittelpunkt besitzt, wie das ursprüngliche.

Es sei P, P', P'', ... ein ebenes Kräftesystem. Man zerlege alle Kräfte P nach zwei beliebigen Richtungen der Ebene in die Componenten X, Y und bestimme den Mittelpunkt A der Parallelkräfte X, sowie den B der Parallelkräfte Y. Nun ziehe man durch die Angriffspunkte aller Kräfte in der Ebene Gerade von derselben, aber beliebigen Richtung und projicire auf sie die Kräfte P, X, Y, so erhält man neue Kräfte Π, Ξ, H und zwar wird $\Pi = \Xi + H$ sein, da $[P] = [X] + [Y]$ ist. Der Mittelpunkt der Kräfte Ξ ist aber der Mittelpunkt A der Kräfte X und der Mittelpunkt der Kräfte H ist der Mittelpunkt B der Kräfte Y. Der Mittelpunkt der Kräfte Π fällt daher in die Gerade AB, welches auch immer die Richtung der Kräfte Π sein mag. Daher:

Zieht man durch die Angriffspunkte eines ebenen Kräftesystems in der Ebene desselben Parallelen von irgendwelcher Richtung und projicirt alle Kräfte des Systems auf sie parallel zu irgend einer anderen Richtung, so ist der Ort des Mittelpunktes der projicirten Kräfte eine bestimmte, von der Projectionsrichtung unabhängige Gerade. Diese Gerade heisst die Centrallinie des ebenen Kräftesystems. Mit Hülfe von zwei Mittelpunkten A, B und dem Durchschnittspunkt der durch sie hindurchgehenden Richtungen der Componenten X, Y ergibt sich der Kräftemittelpunkt, wie B. I, S. 19 gezeigt ist.

Indem man ebenso die Kräfte P eines räumlichen Systems nach drei Richtungen in die Componenten X, Y, Z zerlegt und dann P, X, Y, Z sämmtlich auf Parallellinien projicirt, welche durch die Anfangspunkte gehen, ergibt sich:

Projicirt man die Kräfte eines räumlichen Systems auf Parallelen, welche durch die Angriffspunkte gehen, so ist der Ort des Mittelpunktes der projicirten Kräfte eine bestimmte, von der Richtung des Projicirens unabhängige Ebene. (Centralebene des Kräftesystems.)

Es kann sich bei einem ebenen, wie bei einem räumlichen System ereignen, dass die Mittelpunkte A, B der Kräfte X, Y oder die Mittelpunkte A, B, C der

Kräfte X, Y, Z in einen Punkt zusammenfallen. Dann fallen auch die Mittelpunkte aller projicirten Parallelkräftesysteme in diesem Punkte zusammen. Das System hat dann keine Centrallinie oder Centralebene, sondern nur einen Mittelpunkt oder eine Centrallinie, indem die Centrallinie oder die Centralebene unbestimmt wird. Laufen z. B. die Kräfte eines räumlichen Systems alle einer Ebene parallel, so kann man sie nach zwei zu dieser Ebene parallelen Richtungen zerlegen und die beiden Mittelpunkte A, B der Zerlegungskräftesysteme suchen; nach welcher andern Richtung man auch immer sodann projiciren mag, stets wird der Mittelpunkt des neuen Projectionssystems in die Gerade AB fallen.

Die Centralebene enthält noch eine ausgezeichnete Gerade. Zerlegt man nämlich alle Kräfte in drei Componenten X, Y, Z, von denen die Z senkrecht zur Centralebene, die X, Y parallel mit derselben sind, so fallen die Mittelpunkte A, B der zur Ebene parallelen Kräftesysteme, wie man die Axen der x, y auch immer parallel der Centralebene drehen möge, in eine bestimmte Gerade dieser Ebene. Diese Gerade heisst die Centrallinie der Centralebene. Auf dieser Centrallinie gibt es noch einen besonderen Punkt. Nimmt man nämlich die Richtung der X parallel derselben, die der Y senkrecht zu ihr oder umgekehrt, so heisst der Mittelpunkt des zur Centrallinie parallelen Systems der Centralpunkt der Centrallinie.

§. 14. Um den Mittelpunkt der Kräfte des ebenen Systems zu bestimmen, sei in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem die Gleichung der Centralaxe (s. B. I, S. 36)

$$Bx_1 - Ay_1 - N = 0, \quad \text{wo } A = \Sigma X,\ B = \Sigma Y,\ N = \Sigma \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}.$$

Dreht man nun das System um den Ursprung und den Winkel φ um, so nimmt das im System festgedachte und mit ihm bewegliche Coordinatensystem eine Lage an, so dass die Coordinaten in Bezug auf ein festes mit dem beweglichen ursprünglich zusammenfallendes System mit Hülfe der Formeln

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \quad y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

gefunden werden. Behalten daher alle Kräfte ihre Richtungen während der Drehung bei, so ist die Gleichung der Centralaxe nach der Drehung

$$B(x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi) - A(x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi) - N' = 0,$$

$$\text{wo}\quad N' = \Sigma \begin{vmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi, & x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ X & Y \end{vmatrix}$$

$$= \cos\varphi\,\Sigma \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} + \sin\varphi\,\Sigma \begin{vmatrix} -y & x \\ X & Y \end{vmatrix} = N\cos\varphi - \sin\varphi\,\Sigma(xX + yY).$$

Geordnet wird diese Gleichung

$$(Bx_1 - Ay_1 - N)\cos\varphi - (By_1 + Ax_1 - \Sigma(xX + yY))\sin\varphi = 0.$$

Die Vergleichung dieser Gleichung der neuen Centralaxe mit der Gleichung der Centralaxe für die ursprüngliche Lage des Systems ergibt sofort die Existenz eines Systempunktes (x_1, y_1), welcher unabhängig vom Winkel φ beiden Centralaxen angehört, durch welchen also die Centralaxe und damit die Einzelresultante in allen Lagen hindurchgeht. Denn beide Gleichungen geben das Gleichungssystem

$$Bx_1 - Ay_1 - N = 0,$$
$$Ax_1 + By_1 - \Sigma(xX + yY) = 0.$$

Aus ihnen folgen die Coordinaten des Kräftemittelpunktes; nämlich es wird, wenn R die Resultante bedeutet:

$$R^2 \cdot x_1 = A\Sigma(xX + yY) + BN, \quad R^2 \cdot y_1 = B\Sigma(xX + yY) + AN.$$

Man erkennt, dass der Kräftemittelpunkt als der Schnittpunkt der Centralaxe mit der Geraden $Ax_1 + By_1 - \Sigma(xX + yY) = 0$ gefunden wird, welche auf ihr senkrecht steht.

Zugleich sieht man, dass durch die Drehung, welche auf die Intensität der Reductionsresultante keinen Einfluss übt, das Paar N, welches dem Ursprung als resultirendes Paar entspricht, übergeht in $N' = N \cos\varphi - \sin\varphi\, \Sigma(xX + yY)$. Es verschwindet für

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{N}{\Sigma(xX + yY)}.$$

Ist das System ursprünglich im Gleichgewicht, also $A = B = 0$, $N = 0$, so wird es durch die Drehung dem Paare $N' = -\sin\varphi\, \Sigma(xX + yY)$ äquivalent, welches nur für $\varphi = \pi$ wieder verschwindet, für welchen Werth eine neue Gleichgewichtslage eintritt. Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ wird $N' = -\Sigma(xX + yY)$, wie mit dem §. 4 Bemerkten harmonirt.

§. 15. Um die Gleichung der Centralebene zu finden, seien X, Y, Z die Componenten der Kraft P und α, β, γ die Richtungscosinusse der Geraden, auf welche die Kräfte projicirt werden. Dann ist bei rechtwinkliger Projection $\alpha X + \beta Y + \gamma Z$ die Projection von P und erhält man für die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Mittelpunktes der Parallelkräfte von der Richtung $(\alpha\beta\gamma)$:

$$\begin{aligned} R &= \alpha A + \beta B + \gamma C, & A &= \Sigma X, & a_{11} &= \Sigma xX,\\ Rx_1 &= \alpha a_{11} + \beta a_{12} + \gamma a_{13}, & B &= \Sigma Y, & a_{21} &= \Sigma yX,\\ Ry_1 &= \alpha a_{21} + \beta a_{22} + \gamma a_{23}, & C &= \Sigma Z, & a_{31} &= \Sigma zX, \text{ u. s. w.}\\ Rz_1 &= \alpha a_{31} + \beta a_{32} + \gamma a_{33}, \end{aligned}$$

Eliminirt man α, β, γ, so wird die Gleichung der Centralebene, als des Ortes aller Mittelpunkte x_1, y_1, z_1, welcher den verschiedenen Projectionsrichtungen entsprechen

$$\begin{vmatrix} 1 & A & B & C \\ x_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ y_1 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ z_1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Ebene wird unbestimmt, wenn die Coefficienten von x_1, y_1, z_1 und das Absolutglied sich gleichzeitig auf Null reduciren. Sie stellt dann einen Ebenenbüschel dar, dessen Axe die Centrallinie ist, in welche alle Mittelpunkte der Parallelkräftesysteme hineinfallen. Alle diese Mittelpunkte fallen in einen, den Centralpunkt, zusammen, sobald

$$a_{11} : a_{12} : a_{13} = a_{21} : a_{22} : a_{23} = a_{31} : a_{32} : a_{33} = A : B : C$$

werden.

Man erkennt leicht die Identität der hier definirten Centralebene mit der Centralebene der Darboux'schen Theorie. Zerlegt man nämlich alle Kräfte nach drei zu einander rechtwinkligen Richtungen und vereinigt die Parallelkräfte jeder Richtung zu einer im Mittelpunkte derselben angreifenden Kraft, so reducirt sich das ganze System auf drei zu einander senkrechte, in drei bestimmten Punkten A, B, C angreifende Kräfte, deren Angriffspunkte dieselben bleiben, wenn das

Punktsystem seine Lage ändert. Man bringe in A entgegengesetzt gleiche Kräfte an, sowohl gleich der in B, als auch gleich der in C wirkenden Kraft. Dadurch reducirt man das System auf eine Einzelkraft, in A angreifend, die Resultante aller drei dort angreifenden Kräfte und zwei Paare mit den astatischen Armen AB und AC. Wählt man die Zerlegung der Kräfte so, dass die eine Kraftrichtung zur Ebene ABC senkrecht ist, so folgt alles Weitere von selbst.

§. 16. Von einem Mittelpunkte der Kräfte kann beim räumlichen Kräftesystem im Allgemeinen nicht die Rede sein. Denn erstens sind die Kräfte nicht für alle Lagen des Punktsystems einer Einzelkraft äquivalent und zweitens laufen die Einzelkräfte für die Lagen, in welchen dies der Fall ist, nicht durch einen Punkt, sondern schneiden die beiden Focalkegelschnitte (§. 9). Sind die beiden Axen der Focalellipse gleich, so ist sie ein Kreis und fallen die Brennpunkte in den Centralpunkt. Auch die Scheitel der Focalhyperbel fallen dann mit ihm zusammen und sie selbst geht in die zur Ebene des Kreises senkrechte, durch den Centralpunkt gehende Gerade über. Dieselbe ist die Centrallinie des Kräftesystems; die Centralebene wird unbestimmt. Wird auch der Radius des Centralkreises Null, so fallen sämmtliche Brennpunkte und Scheitel in den Centralpunkt. Dieser wird dann zu einem Mittelpunkt der Kräfte, durch welchen die Einzelresultante fortwährend hindurchgeht. Ein anderer extremer Fall ist der, dass die Focalellipse sich auf eine Strecke reducirt.

Sind die 12 Bedingungen des astatischen Gleichgewichts nicht sämmtlich erfüllt, so kann ein Mittelpunkt der Kräfte existiren. Sind x_0, y_0, z_0 seine Coordinaten und führen wir die Einzelresultante $R\,(X_0, Y_0, Z_0)$, auf welche sich in diesem Falle das Kräftesystem in allen Lagen reduciren muss, im umgekehrten Sinne ein, so muss das astatische Gleichgewicht eintreten, d. h. es müssen die Gleichungen

$$\begin{array}{llll} A - X_0 = 0, & a_{11} - x_0 X_0 = 0, & a_{21} - y_0 X_0 = 0, & a_{31} - z_0 X_0 = 0, \\ B - Y_0 = 0, & a_{12} - x_0 Y_0 = 0, & a_{22} - y_0 Y_0 = 0, & a_{32} - z_0 Y_0 = 0, \\ C - Z_0 = 0, & a_{13} - x_0 Z_0 = 0, & a_{23} - y_0 Z_0 - 0, & a_{33} - z_0 Z_0 = 0 \end{array}$$

bestehen. Aus ihnen folgt, wenn A, B, C nicht alle Null sind

$$\frac{a_{11}}{A} = \frac{a_{12}}{B} = \frac{a_{13}}{C}, \quad \frac{a_{21}}{A} = \frac{a_{22}}{B} = \frac{a_{23}}{C}, \quad \frac{a_{31}}{A} = \frac{a_{32}}{B} = \frac{a_{33}}{C}$$

und

$$x_0 = \frac{a_{11}}{A} = \frac{a_{12}}{B} = \frac{a_{13}}{C}, \quad y_0 = \frac{a_{21}}{A} = \frac{a_{22}}{B} = \frac{a_{23}}{C}, \quad z_0 = \frac{a_{31}}{A} = \frac{a_{32}}{B} = \frac{a_{33}}{C}$$

oder, was dasselbe ist,

$$x_0 = \frac{a_{11} A + a_{12} B + a_{13} C}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad y_0 = \frac{a_{21} A + a_{22} B + a_{23} C}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$z_0 = \frac{a_{31} A + a_{32} B + a_{33} C}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Sind die Kräfte alle parallel, so ergeben sich die Coordinaten des Mittelpunktes der Parallelkräfte.

§. 17. Von den Theorien des vorliegenden Capitels werden interessante Anwendungen in der Theorie des Magnetismus gemacht. Der Raum gestattet uns nicht, hierauf einzugehen. Vgl. Moigno, Leçons de Mécanique analytique, p. 238 u. ffg.; Broch, Lehrbuch der Mechanik S. 134 u. ffg.

Einige Literatur zur Astatik.

Minding, Untersuchung, betreffend die Frage nach einem Mittelpunkt nicht paralleler Kräfte, Crelle's Journal B. XIV, S. 289—315, [1835]; über den Ort sämmtlicher Resultanten eines der Drehung unterworfenen Systems von Kräften, ebendas. B. XV, S. 27—39 [1835]; einige Sätze über die Veränderungen, welche ein System von Kräften durch Drehung derselben erleidet, ebendas B. XV, S. 313—317. Vgl. auch Minding's Handbuch der theoretischen Mechanik (2. Theil des Handbuchs der Differential- und Integralrechnung und ihrer Anwendungen auf Geometrie und Mechanik), Berlin 1838, S. 78—110. Diese Arbeiten wurden die Grundlage der ganzen Theorie.

Möbius, über den Mittelpunkt nicht paralleler Kräfte, Crelle's Journ. B. XVI, S. 1—10 (1835); Lehrbuch der Statik, Leipzig 1837, B. I, S. 190—297.

Schweins, Fliehmomente, oder die Summe $\Sigma\,(xX + yY)$ bei Kräften in der Ebene und $\Sigma\,(xX + yY + zZ)$ bei Kräften im Raume, Crelle's Journ. B. XXXVIII, S. 77—99; Theorie der Dreh- und Fliehmomente der parallelen Seitenkräfte, in welche Kräfte im Raume zerlegt werden können, Crelle's Journ. XLVII, S. 238—245; Theorie der Mittelpunkte der parallelen Seitenkräfte, ebendas. B. XLVII, S. 246—298.

Steichen, *Essai d'une théorie générale du centre des forces; précédé de quelques considérations sur la resultante;* Crelle's Journ. B. XXXVIII, S. 277—330.

Broch, Lehrbuch der Mechanik, Berlin und Christiania 1854, S. 82—109 und 134—139.

Duhamel-Schlömilch, Lehrbuch der analytischen Mechanik, 2. Aufl. Leipzig 1858, B. I, S. 63—76.

Moigno, *Leçons de Mécanique analytique. Statique*; Paris 1868, p. 206—245.

Somoff, *Mémoire sur les forces qui ne changent pas d'intensité et de direction, quand leur points d'application formant un système invariable reçoivent un déplacement fini quelconque* (*Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, VII Série*, Th. XXII, No. 9). — Theoretische Mechanik, übers. von Ziwet, II. Th., Leipzig 1879, S. 355—407.

Darboux, *Mémoire sur l'équilibre astatique et sur l'effet que peuvent produire des forces de grandeurs et de directions constantes appliquées en des points déterminés d'un corps solide quand ce corps change de position dans l'espace*; Bordeaux 1877 (65 Seiten). [*Extr. des Mém. de la société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, t. II* (2me *Série*), 2me *cahier.*] Diese bedeutende Arbeit vereinfacht die Untersuchungen der Astatik durch Einführung des Centralellipsoids; sie berichtigt eine Ungenauigkeit bei Möbius hinsichtlich der Anzahl der Gleichgewichtslagen eines Systems und erweitert den Minding'schen Satz.

Minchin, *On astatic equilibrium*; *Proceedings of the London mathem. Society*, Vol. IX, p. 102—118 (1878).

XII. Capitel.

Sicherheit des Gleichgewichts. Virial. Gauss' Princip.

§. 1. Ein Kräftesystem sei zur Zeit t an einem unveränderlichen Punktsystem im Gleichgewicht; das Punktsystem besitze einen gewissen Geschwindigkeitszustand; vermöge desselben wird es im folgenden Zeitelemente seine Lage ändern, ohne dass die Kräfte auf diesen Geschwindig-

keitszustand einen Einfluss ausüben. Nach einer unendlichkleinen Lagenänderung werden aber die Kräfte nicht mehr im Gleichgewicht sein, sondern einen Einfluss auf den Geschwindigkeitszustand und den Fortgang der Bewegung gewinnen. Ist diese Bewegung so beschaffen, dass die Lagen des Punktsystems sich nur unendlich wenig von der Gleichgewichtslage entfernen, so dass also dasselbe sich um Axen windet, welche ihrer Lage nach unendlichwenig von einander abweichen, so heisst das Gleichgewicht der Kräfte sicher oder stabil, im Gegenfalle unsicher oder labil. Die zugehörige Lage des Systems heisst eine sichere oder unsichere Gleichgewichtslage. In grösster Allgemeinheit aufgefasst gehört die Frage nach der Stabilität des Gleichgewichts eines Kräftesystems der Kinetik, nicht der Statik an und ist dieselbe im Grunde mit der Theorie der kleinen Oscillationen identisch. Indessen ist es nicht ohne Interesse, dass auch von rein statischem Gesichtspunkte unter der Voraussetzung, dass die Kräfte während der Bewegung des Punktsystems weder ihre Intensitäten, noch ihre Richtungen ändern, Criterien für die Stabilität des Gleichgewichts aufgefunden werden können. Da eine Translation das Gleichgewicht nicht stört, so brauchen wir dabei blos Rotationen anzunehmen und können sogar die verschiedenen Rotationsaxen, ohne Schaden für die Allgemeinheit, alle durch einen Punkt hindurchlegen.

§. 2. Erleidet das Punktsystem eine Rotation um eine Axe und das Gleichgewicht des Kräftesystems, dessen Kräfte Richtung und Intensitäten nicht ändern sollen, hört auf, so wird das Kräftesystem einem Paare äquivalent, dessen Moment im Allgemeinen von der Amplitude und Lage der Axe der Rotation abhängt. Denn da die Kräfte sich nicht ändern, so ändert sich auch deren Resultante nicht; da sie aber wegen des Gleichgewichtes Null ist, so bleibt sie Null. Daher kann das Kräftesystem nur einem Paare H äquivalent werden. Durch die Rotation wird im Allgemeinen der Abstand der Angriffspunkte der Seitenkräfte dieses Paares und damit das Moment desselben veränderlich.

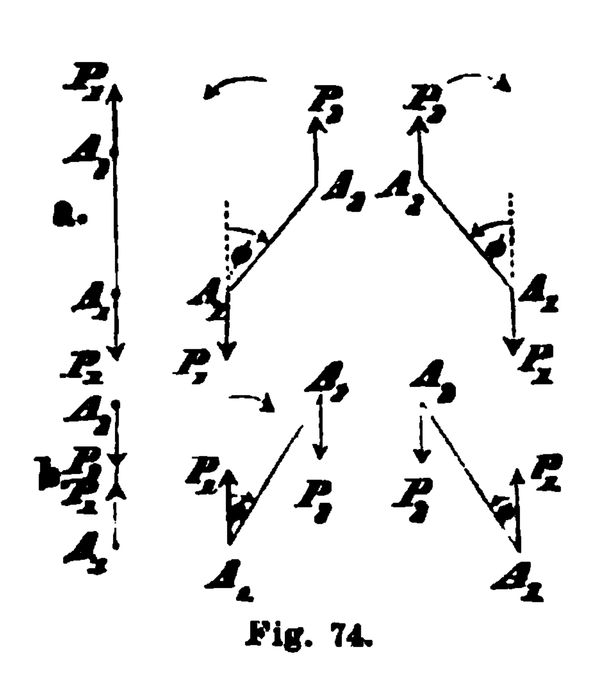


Fig. 74.

Für das ebene System, welches um eine zu seiner Ebene senkrechte Axe rotirt, ergibt sich das Moment H des Paares aus Cap. XI, §. 14, indem man dort $A = B = 0$, $N = 0$ setzt, nämlich

$$H = -\sin\varphi\, \Sigma(xX + yY),$$

wo φ die Amplitude der Rotation bezeichnet. Man sieht hieraus, dass H ein Maximum oder Minimum für $\varphi = \pm \frac{1}{2}\pi$ erreicht und wie bereits Cap. XI, §. 4 gezeigt wurde, $-\Sigma(xX + yY)$ das Moment des Kräftesystems wird, wenn alle Kräfte um $\frac{1}{2}\pi$ gedreht werden. Es seien (Fig. 74a, b) P_1, P_2

zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, angreifend an den Punkten A_1, A_2, welche in der Gleichgewichtslage im Gleichgewicht befindlich, durch die Rotation des Systems zu dem Paare H auseinandertreten, welches dem System äquivalent wird. Man hat hiebei drei Fälle zu sondern. Es mögen P_1, P_2 ziehend wirken, so dass sie die Strecke $A_1 A_2$ vergrössern würden, wenn sie dehnbar wäre. Dann haben A_1, A_2 und P_2 gleichen Sinn. Durch die Rotation dreht sich $A_1 A_2$ um die Amplitude φ und entsteht ein Paar H, dessen Sinn dem Sinne der Rotation entgegengesetzt ist. Dies Paar ist daher $-A_1 A_2 \cdot P_2$, da $A_1 A_2$ und P_2 gleichen Sinn haben. Welches auch immer der Einfluss des Paares auf die Winkelgeschwindigkeit des Punktsystems sein mag, so ist doch so viel klar, dass der entgegengesetzte Sinn beider einen Rückgang des letzteren zur Folge haben wird, und das System eine Bewegung annehmen wird, so dass die Kräfte P_1, P_2 in die Gleichgewichtslage zurückkehren oder wenigstens sich nicht weiter von ihr entfernen werden. Das ursprüngliche Gleichgewicht ist daher sicher, wenn die Grösse $-A_1 A_2 \cdot P_2$ negativ ist. Es mögen andererseits P_1, P_2 drückend wirken, so dass sie die Strecke $A_1 A_2$ verkleinern würden, wenn sie compressibel wäre. In diesem Falle haben $A_1 A_2$ und P_2 entgegengesetzten Sinn und harmonirt der Sinn des entstehenden Paares mit dem Sinne der Rotation, so dass $-A_1 A_2 . P_2$ positiv ist. Das Gleichgewicht ist unsicher, weil das Paar eine weitere Entfernung der Kräfte P_1, P_2 von der Gleichgewichtslage veranlassen wird. Ist endlich drittens $A_1 A_2$ gleich Null, so ist auch $-A_1 A_2 . P_2$ Null und das Gleichgewicht dauernd. Daher:

Sind P_1, P_2 zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, welche an den Punkten A_1, A_2 eines ebenen, im Gleichgewicht befindlichen Kräftesystems angreifend bei der Drehung desselben um eine zur Ebene senkrechte Axe zu dem Paare auseinandertreten, welches dem System äquivalent wird, so ist das Gleichgewicht in Bezug auf diese Axe sicher, unsicher oder dauernd, je nachdem die Grösse $-A_1 A_2 . P_2$ negativ, positiv oder Null ist.

Man sieht leicht, dass $-A_1 A_2 . P_2$ oder was dasselbe ist, $-A_2 A_1 . P_1$ in allen Fällen das Moment des Paares darstellt, welches dem Kräftesystem äquivalent wird, wenn dasselbe um $\frac{1}{2}\pi$ gedreht wird; denn dann wird $A_1 A_2$ der Arm und der Sinn ist stets dem der Drehung entgegengesetzt. Man hat daher auch dem Obigen zu Folge

$$H = -\sin\varphi\, \Sigma(xX + yY) = -\sin\varphi\, .\, A_1 A_2\, .\, P_2.$$

Die Grösse $-A_1 A_2 . P_2$ spielt in Untersuchungen der Sicherheit des Gleichgewichts eine entscheidende Rolle. Sie wurde von Möbius eingeführt, ohne dass er dafür einen Namen brauchte; Schweins nennt sie das Fliehmoment des Kräftesystems. In neuester Zeit hat sie in den Untersuchungen von Clausius über mechanische Wärmetheorie eine namhafte Bedeutung er-

langt und ist die Hälfte ihres mittleren Werthes von ihm das Virial des Kräftesystems genannt worden. Wir wollen uns erlauben, für diese Gleichgewichtsfunction den Namen Virial zu brauchen.

§. 3. Die Untersuchung der Sicherheit des Gleichgewichts eines räumlichen Kräftesystems kann mit Hülfe des folgenden Satzes auf die der Sicherheit eines ebenen Kräftesystems reducirt werden:

Das Gleichgewicht eines räumlichen, an einem unveränderlichen Punktsystem angreifenden Kräftesystems in Bezug auf die Rotation um eine Axe ist sicher oder unsicher, je nachdem die Projection des Kräftesystems auf eine zur Axe senkrechte Ebene sich im sicheren oder unsicheren Gleichgewicht befindet.

Ist nämlich (Fig. 75a) a die Axe und E eine zu ihr senkrechte Ebene, so spalte man jede Kraft P an ihrem Angriffspunkte A in eine Componente Q parallel und eine solche S senkrecht zu E und bringe an der Projection A' des Angriffspunktes von P auf die Ebene E zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte Q und $-Q$ an. Es ist dann P äquivalent seiner Projection Q auf die Ebene E, dem Paare $(Q, -Q)$, dessen Ebene der Axe parallel läuft und der Kraft S, welche gleichfalls dieser Axe parallel ist. Da das Kräftesystem im Gleichgewicht sich befindet, so ist auch seine Projection auf die Ebene E, nämlich das in dieser Ebene enthaltene System der Kräfte Q im Gleichgewicht. Durch die Rotation um die Axe a geht dies System in ein Paar über. Man kann dasselbe daher durch zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte U, $-U$ ersetzen, welche blos der Bedingung zu genügen brauchen, dass ihr Virial dem Viriale des Kräftesystems (Q) gleich sei. Zum Angriffspunkt von U wählen wir den Fusspunkt O der Axe a in der Ebene E und behalten uns vorläufig noch vor, ihre Richtung und Intensität näher zu bestimmen.

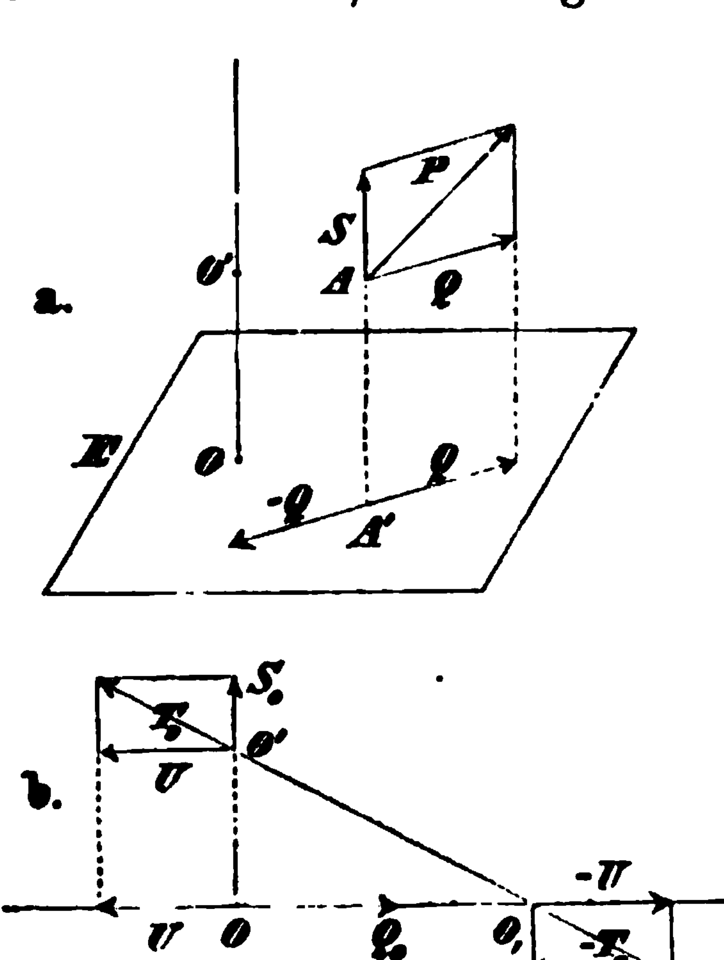


Fig. 75.

Die Paare $(Q, -Q)$, welche durch die Rotation um a nicht geändert werden, können wir sämmtlich parallel mit sich an die Axe a verlegen, so dass sie eine Strecke OO' dieser Axe zum gemeinschaftlichen Arme haben. Sie sind äquivalent einem gewissen Paare $(Q_0, -Q_0)$ am Arme OO', so dass Q_0 an O, $-Q_0$ an O' angreift. In der Ebene dieses Paares (Fig. 75b) wählen wir U so, dass es Q_0 entgegengesetzt gleich wird und bestimmen den Angriffspunkt O_1 von $-U$ so, dass $-O_1O'.U$ gleich dem Viriale des Kräftesystems (Q) in Bezug

auf O wird. Da (Q) für sich im Gleichgewicht ist, so müssen die Kräfte S mit den Paaren $(Q_0, -Q_0)$ Gleichgewicht halten. Sie müssen daher einem Paare äquivalent sein, dessen Ebene parallel der Ebene von $(Q_0, -Q_0)$ ist. Dies Paar können wir parallel mit sich in diese Ebene verlegen, so dass seine Seitenkräfte S_0 in O' und O_1 angreifen. Da die Kräfte U und Q_0 an O sich fortwährend tilgen, so können sie selbst getilgt werden. Es bleiben daher blos die Kräfte $-U = -Q_0$ und $-S_0$ an O_1 und U und S_0 an O'. Sie bleiben während der Drehung um die Axe a stets ihren Resultanten $-T_0$, T_0 an O_1 und O' äquivalent. Wegen des ursprünglichen Gleichgewichts müssen $-T_0$ und T_0 entgegengesetzt gleich sein und also in die Gerade $O_1 O'$ fallen. Nachdem das ganze Kräftesystem auf diese beiden Kräfte reducirt ist, folgt, dass das Gleichgewicht desselben in Bezug auf die Axe a sicher oder unsicher ist, je nachdem das Gleichgewicht von $-T_0$ und T sicher oder unsicher ist, d. h. je nachdem $-O_1 O' \,.\, T_0$ negativ oder positiv ist. Diese Grösse hat aber dasselbe Zeichen, wie $-O_1 O \,.\, T_0 \cos^2 O' O_1 O = -O_1 O \,.\, Q_0$, welche Grösse das Virial des Kräftesystems darstellt. Daher ist das Gleichgewicht sicher oder unsicher, je nachdem die Projection des Kräftesystems auf die Ebene E sicher oder unsicher ist.

§. 4. Es ist nicht in allen Fällen bequem, die Sicherheit oder Unsicherheit des Gleichgewichts für eine Axe aus der Beschaffenheit des Gleichgewichts der Projection des Kräftesystems auf eine zur Axe senkrechte Ebene zu erschliessen, wenn wir die Sicherheit für alle Axen eines Punktes O bestimmen wollen. Wir suchen daher jetzt allgemein eine Function der Kräfte und der Neigung der Axe gegen das Punktsystem zu bestimmen, welche hierüber Aufschluss gibt.

Es seien α, β, γ die Richtungscosinusse einer durch den Ursprung O gezogenen Axe a in Bezug auf rechtwinklige Axen; es seien ferner P_1 und P_2 zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, welche an den Punkten $A_1(x_1, y_1, z_1)$ und $A_2(x_2, y_2, z_2)$ angreifend anfangs im Gleichgewicht sich befinden, in Folge einer Rotation um a aber das Paar darstellen, welchem das Kräftesystem äquivalent wird. Kehren wir beide Kräfte um, so muss Gleichgewicht auch während der Rotation bestehen, d. h. es muss die Axe a eine Gleichgewichtsaxe sein. Daher müssen nach Cap. XI, §. 4 die Gleichungen bestehen:

$$
\begin{aligned}
-(a'_{22} + a'_{33})\,\alpha + a'_{12}\beta + a'_{13}\gamma &= 0,\\
a'_{21}\,\alpha - (a'_{33} + a'_{11})\,\beta + a'_{23}\gamma &= 0,\\
a'_{31}\alpha + a'_{32}\beta - (a'_{11} + a'_{22})\,\gamma &= 0,
\end{aligned}
$$

worin die Grössen a'_{11}, a'_{22}, ... sich auf die Kräfte des Systems und die umgekehrten Kräfte P_1, P_2 beziehen, deren Componenten wir mit $-X_1$,

$-Y_1$, $-Z_1$; $-X_2$, $-Y_2$, $-Z_2$ bezeichnen wollen. Hiernach ist also, wenn a_{11}, a_{22}, ... sich auf das Kräftesystem allein beziehen:

$$a'_{22} + a'_{33} = a_{22} + a_{33} - y_1 Y_1 - z_1 Z_1 - y_2 Y_2 - z_2 Z_2$$
$$= a_{22} + a_{33} - (y_2 - y_1) Y_2 - (z_2 - z_1) Z_2$$

oder, wenn die Richtungscosinusse des Abstandes $A_1 A_2 = r$ mit λ, μ, ν bezeichnet werden, wodurch $Y_2 = \mu P_2$, $Z_2 = \nu P_2$, $y_2 - y_1 = \mu r$, $z_2 - z_1 = \nu r$, werden: $a'_{22} + a'_{33} = a_{22} + a_{33} - (\mu^2 + \nu^2) r P_2$.

Ebenso ergeben sich

$$a'_{33} + a'_{11} = a_{33} + a_{11} - (\nu^2 + \lambda^2) r P_2, \quad a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22} - (\lambda^2 + \mu^2) r P_2.$$

Ferner wird

$$a'_{12} = a_{12} - x_1 Y_1 - x_2 Y_2 = a_{12} - (x_2 - x_1) Y_2 = a_{12} - \lambda \mu r P_2,$$
$$a'_{13} = a_{13} - \lambda \nu r P_2, \quad a'_{23} = a_{23} - \mu \nu r P_2,$$
$$a'_{21} = a'_{12}, \quad a'_{32} = a'_{23}, \quad a'_{31} = a'_{13}.$$

Hiermit wird die erste der Bedingungen des Problems:

$$-(a_{22} + a_{33}) \alpha + a_{12} \beta + a_{13} \gamma = [-(\mu^2 + \nu^2) \alpha + \lambda \mu \beta + \lambda \nu \gamma] r P_2,$$

oder, wenn man in der Klammer rechts $(-\lambda^2 + \lambda^2) \alpha$ zufügt, und $\lambda \alpha + \mu \beta + \nu \gamma = \varkappa$ setzt

$$-(a_{22} + a_{33}) \alpha + \alpha_{12} \beta + \alpha_{13} \gamma = -(\alpha - \lambda \varkappa) r P_2,$$

und ebenso erhält man weiter

$$a_{21} \alpha - (a_{33} + a_{11}) \beta + \alpha_{23} \gamma = -(\beta - \mu \varkappa) r P_2,$$
$$a_{31} \alpha + a_{32} \beta - (a_{11} + a_{22}) \gamma = -(\gamma - \nu \varkappa) r P_2.$$

Um aus diesen drei Gleichungen $-r . P_2 = -A_1 A_2 . P_2$, auf welche Grösse es allein ankommt, zu finden, setze man

$$-(a_{22} + a_{33}) \alpha + a_{12} \beta + a_{13} \gamma = \Delta . a,$$
$$a_{21} \alpha - (a_{33} + a_{11}) \beta + a_{23} \gamma = \Delta . b,$$
$$a_{31} \alpha + a_{32} \beta - (a_{11} + \alpha_{22}) \gamma = \Delta . c,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

d. h. man suche eine Strecke Δ und ihre Richtungscosinusse a, b, c, so dass ihre Projectionen auf die Coordinatenaxen die Ausdrücke zur Linken in diesen Gleichungen sind. Dann hat man

$$\Delta . a = -(\alpha - \lambda \varkappa) r P_2,$$
$$\Delta . b = -(\beta - \mu \varkappa) r P_2,$$
$$\Delta . c = -(\gamma - \nu \varkappa) r P_2,$$

und indem man diese Gleichungen einmal mit λ, μ, ν, das andere mal mit a, b, c multiplicirt und addirt, ergibt sich

$$a \lambda + b \mu + c \nu = 0, \quad \Delta = -r P_2 (a \alpha + b \beta + c \gamma)$$

und folglich

$$-r \, . \, P_2 = \frac{\Delta}{a\alpha + b\beta + c\gamma} = \frac{\Delta^2}{\Delta\,(a\alpha + b\beta + c\gamma)} = \frac{\Delta^2}{S},$$

wo

$$S = \Delta \, . \, (a\alpha + b\beta + c\gamma).$$

Nun ist das Virial $-r \, . \, P_2$ negativ, oder positiv, je nachdem der Nenner S dieser Ausdrücke negativ oder positiv ist. Die Function S ist es daher, welche durch ihr Vorzeichen die Sicherheit oder Unsicherheit des Gleichgewichts in Bezug auf die Axe $a\,(\alpha\beta\gamma)$ ausspricht. Sie gibt, indem man die Werthe für $\Delta \, . \, a$, $\Delta \, . \, b$, $\Delta \, . \, c$ einsetzt:

$$S = [-(a_{22} + a_{33})\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma]\,\alpha + [a_{21}\alpha - (a_{33} + a_{11})\beta + a_{23}\gamma]\,\beta$$
$$+ [a_{31}\alpha + a_{32}\beta - (a_{11} + a_{22})\gamma]\,\gamma$$

oder, wenn man bedenkt, dass vermöge des ursprünglichen Gleichgewichts $a_{12} - a_{21} = 0$, $a_{13} - a_{31} = 0$, $a_{23} - a_{32} = 0$ ist,

$$S = -(a_{22} + a_{33})\alpha^2 - (a_{33} + a_{11})\beta^2 - (a_{11} + a_{22})\gamma^2$$
$$+ 2a_{12}\alpha\beta + 2a_{23}\beta\gamma + 2a_{31}\alpha\gamma$$

oder, indem man $a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2$ subtrahirt und addirt:

$$S = a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 + 2a_{12}\alpha\beta + 2a_{23}\beta\gamma + 2a_{31}\gamma\alpha - (a_{11} + a_{22} + a_{33}).$$

Die sämmtlichen Axen $(\alpha\beta\gamma)$ des Punktes O bilden einen Stralenbündel, welcher im Allgemeinen in drei Gruppen von Stralen zerfällt. Alle Stralen, für welche S verschwindet, liegen auf der Kegelfläche zweiten Grades $S = 0$, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten ist:

$$(a_{22} + a_{33})x^2 + (a_{33} + a_{11})y^2 + (a_{11} + a_{22})z^2 - 2a_{12}xy - 2a_{23}yz - 2a_{31}zx = 0.$$

Für Stralen dieser Art wird $-A_1A_2 \, . \, P_2 =$, d. h. das Paar, welches dem Kräftesystem bei der Drehung um eine solche Axe äquivalent wird, hat ein unendlich grosses Moment. Das Gleichgewicht ist weder sicher, noch unsicher. Man nennt es das neutrale Gleichgewicht. Die Kegelfläche scheidet den Raum in zwei Paar Scheitelräume, für deren einen allen Stralen ein negativer Werth von S entspricht, während der andere nur Stralen enthält, für welche S positiv ist. Jene sind die Axen des sicheren, diese die des unsicheren Gleichgewichts. Welcher von beiden Räumen die Axen der einen oder der anderen Art enthält, bedarf einer speciellen Untersuchung. Kehrt man den Sinn sämmtlicher Kräfte um, wodurch das Gleichgewicht nicht aufgehoben wird, so ändert sich die Kegelfläche nicht, indem in ihrer Gleichung alle Coefficienten das Zeichen wechseln; die beiden Paare Scheitelräume aber vertauschen ihre Rollen, indem für die Axen des einen, für welchen S vorher positiv war, S jetzt negativ wird und umgekehrt. Indem man die Hauptaxen des Kegels zu Coordinatenaxen wählt, kann man S als ein Aggregat von drei quadratischen Cylindern darstellen, nämlich

$$S = R_1\alpha^2 + R_2\beta^2 + R_3\gamma^2,$$

wo R_1, R_2, R_3 die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} R-(a_{22}+a_{33}), & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & R-(a_{33}+a_{11}), & a_{22} \\ a_{31}, & a_{32}, & R-(a_{11}+a_{22}) \end{vmatrix} = 0$$

und α, β, γ die Richtungscosinusse der Axen gegen die Hauptaxen der Kegelfläche sind. Ist eine Wurzel dieser Gleichung gleich Null, wofür die Bedingung ist:

$$\begin{vmatrix} -(a_{22}+a_{33}), & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & -(a_{33}+a_{11}), & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & -(a_{11}+a_{22}) \end{vmatrix} = 0,$$

so zerfällt der Kegel in zwei Ebenen; ist noch eine zweite Wurzel gleich Null, so fallen diese Ebenen zusammen. In diesen Fällen gibt es Gleichgewichtsaxen (s. Cap. IX, §. 4). Weitere Details hierüber s. bei **Möbius**, Lehrbuch der Statik B. I, Cap. IX.

§. 5. Wir wollen noch die wesentlichsten Eigenschaften der **Gleichgewichtsfunction** oder des **Virials** entwickeln.

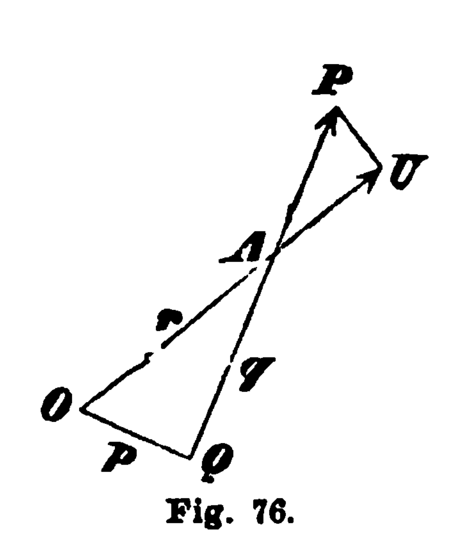


Fig. 76.

1. Von einem Punkte O (Fig. 76) ziehen wir nach dem Angriffspunkte A einer Kraft $AP = P$ den Radiusvector $OA = r$ und projiciren P auf die Richtung OA. Indem wir der Projection $AU = U$ von P den Sinn beilegen, wie er mit der Kraft AP selbst harmonirt und den Sinn der Linien überhaupt durch die Stellung der Buchstaben andeuten, nennen wir das **Produkt** $-OA \,.\, AU = -Ur$, **gebildet aus dem Radiusvector** OA **des Angriffspunktes** A **der Kraft** P **und deren Projection** U **auf dessen Richtung, mit dem Zeichen (—) genommen das Virial der Kraft** P **in Bezug auf den Punkt** O. Das Virial ist demnach positiv bei entgegengesetztem, negativ bei gleichem Sinne von OA und AP und verschwindet, wenn die Kraft oder der Radiusvector oder beide verschwinden, oder zu einander rechtwinklig sind.

2. Ist $QA = q$ die Projection des Radiusvectors OA auf die Richtung der Kraft P, so ist $QA \,.\, AP = OA \,.\, AU$, weil die vier Punkte O, Q, P, U im Kreise liegen. Daher ist das Virial der Kraft P in Bezug auf O auch unter der Form darstellbar: $-QA \,.\, AP = -Pq$, **nämlich durch das Produkt aus der Kraft und der Projection des Radiusvectors auf deren Richtung, versehen mit dem Zeichen (—).** Ebenso ist $-OA.AP.\cos PAU = -Pr\cos\alpha$ das Virial, wenn α den Winkel zwischen P und r bedeutet.

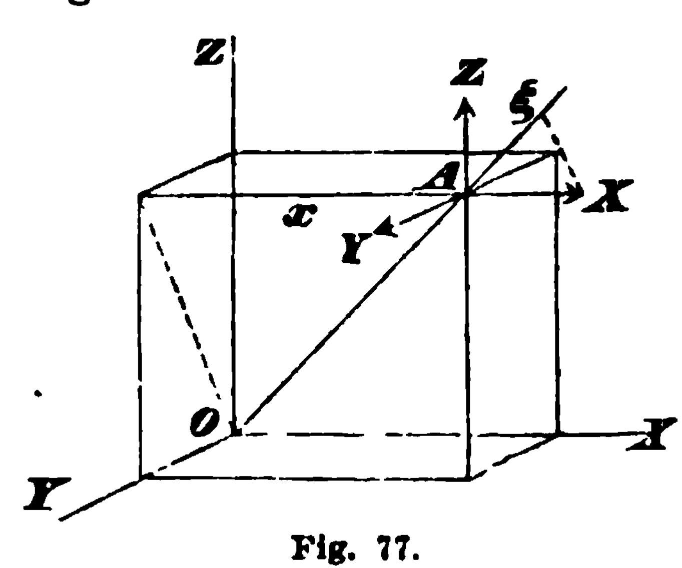


Fig. 77.

3. Ist O der Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems (Fig. 77) der x, y für die Ebene oder der x, y, z für den Raum, sind x, y, z die Coordinaten von A; X, Y, Z die Componenten von P und $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$

die Projectionen von X, Y, Z auf die Richtung des Radiusvectors OA, so wird $AU = A\xi + A\eta + A\zeta$ und $OA.AU = OA.A\xi + OA.A\eta + OA.A\zeta$. Es ist aber $OA.A\xi = xX$, $OA.A\eta = yY$, $OA.A\zeta = zZ$ und mithin $-OA.AU = -(xX + yY + zZ)$ der Ausdruck des Virials der Kraft P in Bezug auf O, als Function der Coordinaten des Angriffspunktes dargestellt. Für die Ebene ist dasselbe $-(xX + yY)$. Bewegt sich das System um O, während P geometrisch ungeändert bleibt, so ändern sich x, y, z und mit ihnen das Virial.

4. Der Werth des Virials der Kraft P variirt im Allgemeinen mit der Lage des Punktes O. Für die Punkte einer zur Kraftrichtung normalen Ebene bleibt er constant. Er ist insbesondere Null, wenn diese Ebene durch den Angriffspunkt geht. Diese Ebene des verschwindenden Virials scheidet den Raum in zwei Gebiete; für die Punkte desjenigen, in welches die Kraft P hineinfällt, ist das Virial negativ, für die des anderen positiv. Das Virial in Bezug auf irgend einen Punkt ist proportional dem Abstande des Punktes von der Ebene verschwindenden Virials.

5. In gewissem Sinne ist das Virial der Kraft P ein Analogon zu dem Moment des Paares $(P, -P)$, welches bei der Reduction von P für den Ursprung O sich ergibt. Denn zerlegt man P nach der Richtung des Radiusvectors und senkrecht dazu in die Componenten U, V (Fig. 78), so ist das Paar $(P, -P)$ äquivalent dem Paare $(V, -V)$, dessen Moment $rV = Pr \sin\alpha = Pp$ ist, wenn p das von O auf P gefällte Perpendikel bedeutet. Die Kräfte U, $-U$ halten sich Gleichgewicht, aber das Virial von P ist $-rU = -Pr\cos\alpha = -Pq$. Während bei dem Momente von P in Bezug auf O die Lage des Angriffspunktes der Kraft auf der Richtungslinie derselben gleichgültig ist, ist diese beim Viriale von Bedeutung. Daher spielt das Virial vorzugsweise in solchen Untersuchungen eine Rolle, bei denen die Kräfte mit Beibehaltung ihrer Angriffspunkte ihre Richtung ändern.

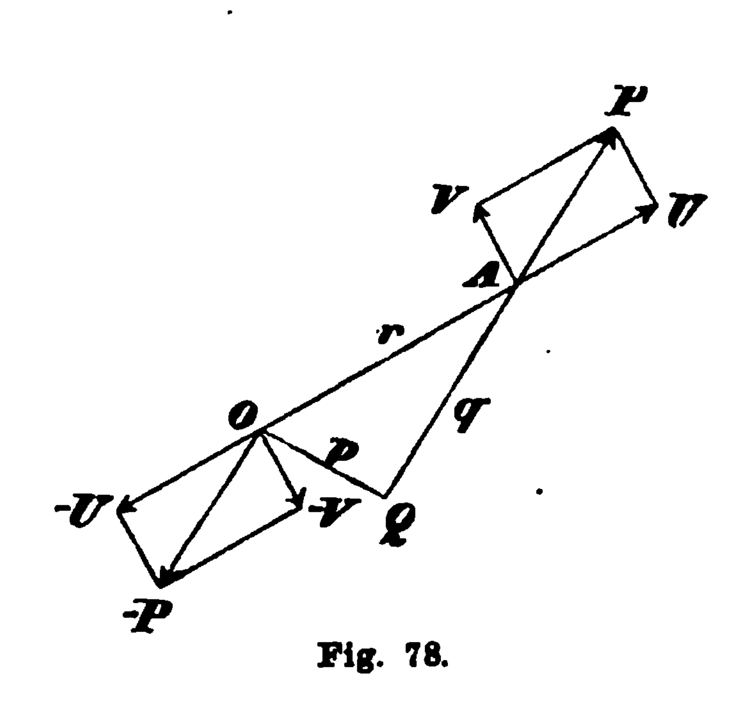


Fig. 78.

6. Unter dem Viriale V eines Kräftesystems in Bezug auf einen Punkt O verstehen wir die Summe der Viriale der einzelnen Kräfte desselben in Bezug auf diesen Punkt. Demnach ist für O als Ursprung der Coordinaten

$$V = -\Sigma OA.AU = -\Sigma QA.AP = -\Sigma(xX + yY + zZ)$$
$$= -(a_{11} + a_{22} + a_{33}).$$

Für einen Punkt O' $(x_0 y_0 z_0)$ wird

$$V = -\Sigma[(x - x_0)X + (y - y_0)Y + (z - z_0)Z]$$
$$= -\Sigma(xX + yY + zZ) + (x_0 A + y_0 B + z_0 C)$$
$$= -(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + (x_0 A + y_0 B + z_0 C).$$

7. Das Virial von Kräften, welche an demselben Punkte A angreifen, ist gleich dem Viriale ihrer Resultanten. Denn sind U_i die Projectionen der Kräfte P_i auf die Richtung des Radiusvectors $OA = r$, so ist $V = -\Sigma U_i r = -r\Sigma U_i$; es ist aber ΣU_i die Projection der Resultanten auf OA.

8. Es seien V, V' die Viriale desselben Kräftesystems in Bezug auf zwei verschiedene Punkte O, O' (Fig. 79), nämlich, wenn q, q' die Projectionen von

OA, $O'A$ auf die Richtung von P sind:

$$V = -\Sigma Pq, \quad V' = -\Sigma Pq'.$$

Ist nun c die Projection von $OO' = \varrho$ auf P, so wird $c + q' - q = 0$, also $\Sigma Pc + \Sigma Pq' - \Sigma Pq = 0$, oder

$$V' - V = \Sigma Pc.$$

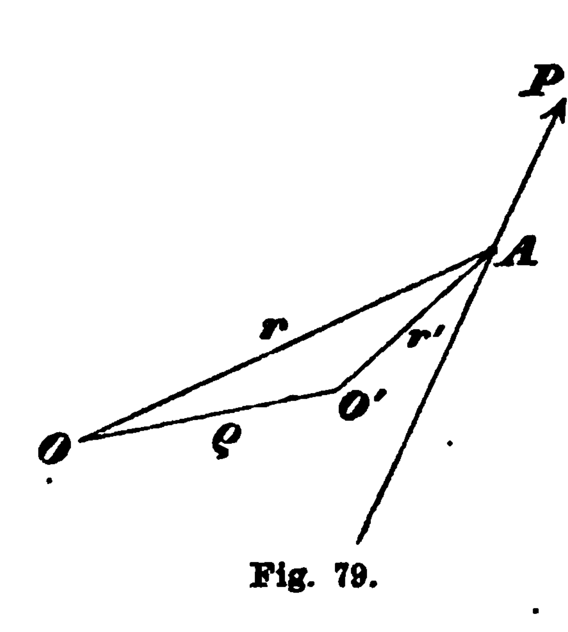


Fig. 79.

Um die Bedeutung von $\Sigma c P$ zu erkennen, denken wir das Kräftesystem für den Punkt O' reducirt, dann ist $-\Sigma Pc$ das Virial aller an O' parallel mit sich verlegten Kräfte und also gleich dem Viriale $-OO'.U = -\varrho U = -r_0 R$ der Reductionsresultanten R, wo U die Projection dieser auf OO' und r_0 die Projection von ϱ auf die Richtung von R bezeichnet. Daher ist

$$V - V' = -r_0 R,$$

d. h. beim Uebergange von einem Punkte O zu einem andern O' nimmt das Virial ab um das Virial der Reductionsresultanten R des Systems in Bezug auf den ersten Punkt, wenn dieselbe im zweiten Punkte angreifend gedacht wird.

9. Legt man durch O' eine Ebene senkrecht zur Richtung von R (Richtung der Centralaxe der Kräfte), so ist r_0 für alle Punkte derselben constant, daher: das Virial eines Kräftesystems ist constant für alle Punkte einer zur Centralaxe desselben senkrechten Ebene. Nimmt man r_0 so an, dass $-r_0 R = V$ wird, so wird $V' = 0$, d. h. es gibt eine Ebene, senkrecht zur Centralaxe, für deren Punkte das Virial des Kräftesystems verschwindet. Der Abstand r_0 derselben von der durch O gelegten Parallelebene ist $r_0 = -V:R$.

Für ein ebenes Kräftesystem gibt es in der Ebene desselben eine zur Centralaxe senkrechte Gerade verschwindenden Virials.

Geht man von der Ebene verschwindenden Virials aus, d. h. nimmt O auf ihr an, so verschwindet V und wird $V' = r_0 R$, d. h. das Virial für irgend einen Punkt ist proportional dem Abstande desselben von der Ebene verschwindender Viriale.

10. Reducirt sich das Kräftesystem auf ein Paar, so ist in Nr. 8 $\Sigma Pc = OO'.U = 0$, weil das Kräftepolygon geschlossen ist. Daher wird $V' = V$, d. h. das Virial eines Kräftesystems, welches einem Paare äquivalent ist, ist constant für alle Punkte des Raumes.

11. Das Virial eines Kräftepaares ist für alle Punkte O des Raumes constant, nämlich gleich dem mit negativem Zeichen genommenen Produkt aus der Projection des astatischen Armes auf die Richtung der Seitenkräfte in die Seitenkraft, welche am Endpunkte des Armes angreift. Denn sind A_1, A_2 die Angriffspunkte der entgegengesetzt gleichen Kräfte P_1, P_2 desselben, legt man durch O eine Ebene senkrecht zu den Seitenkräften, welche auf den Richtungen dieser die Punkte Q_1, Q_2 bestimmt, so ist $V = -Q_1A_1.P_1 - Q_2A_2.P_2 = -(Q_2A_2 - Q_1A_1)P_2 = -A_1A_2.P_2 \cos(A_1A_2, P_2)$. Man kann daher zu jedem einem Paare äquivalenten Kräftesystem ein Paar finden, welches mit ihm gleiches Virial hat und zwar auf unzählig viele Arten.

Erleiden die Angriffspunkte der Seitenkräfte des Paares eine Lagenänderung, so ändert sich das Virial desselben blos in soweit, als die Projection des asta-

tischen Armes variirt. Das Virial wird ein Maximum oder Minimum, wenn die Seitenkräfte mit dem astatischen Arme in eine Gerade fallen, d. h. das Moment des Paares verschwindet. Dies ist auf zwei Arten möglich, nämlich so, dass der astatische Arm mit den Seitenkräften den Winkel 0 oder π bildet. Im einen Falle ist der Werth des Virials negativ, im andern positiv; im ersten Falle ist also das Virial selbst im Minimum, im zweiten im Maximum. Da ein im Gleichgewicht befindliches System bei der Drehung um eine Axe einem Paare äquivalent wird und der negative Werth von $- A_1 A_2 \cdot P_2$ im Falle des Verschwindens des Paares auf ein sicheres, der positive auf ein unsicheres Gleichgewicht hinweist, so folgt:

Wenn ein Punktsystem, an welchem ein Kräftesystem angreift, dessen Kräfte unveränderliche Richtungen und Intensitäten besitzen, einem Paare äquivalent ist und in eine Gleichgewichtslage übergeht, so wird das Virial

$$V = -(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = -\Sigma(xX + yY + zZ)$$

desselben ein Minimum oder Maximum, je nachdem das Gleichgewicht, welches dieser Lage entspricht, sicher oder unsicher ist.

12. Wenn ein ebenes System einer Einzelresultante äquivalent ist, so hat es nach Cap. XI, §. 13 einen Mittelpunkt der Kräfte, so dass, wenn dasselbe um irgend eine zur Ebene senkrechte Axe gedreht wird, die Resultante immer durch diesen Punkt hindurchgeht. Der Mittelpunkt der Kräfte ist der Schnittpunkt der Centralaxe mit der Linie verschwindenden Virials. Denn kehrt man die Resultante um und fügt sie dem Kräftesystem hinzu, so tritt Gleichgewicht ein und dauert dasselbe auch fort, wenn das System um den Mittelpunkt der Kräfte gedreht wird, ohne dass die Kräfte Richtung oder Intensität ändern. Durch die Drehung wird aber das System einem Paare H äquivalent, nämlich $H = V \sin \varphi$ (s. §. 2) und da dies wegen des Fortbestandes des Gleichgewichts verschwinden muss, so ist $V = 0$ für den Mittelpunkt der Kräfte. Derselbe liegt daher auf der Geraden verschwindenden Virials. Ausserdem gehört er der Centralaxe an. Die zweite der in Cap. XI, §. 13 zur Bestimmung der Coordinaten x_1, y_1 des Kräftemittelpunktes benutzten Gleichungen ist in der That die der Geraden verschwindenden Virials.

Wenn für ein räumliches Kräftesystem ein Kräftemittelpunkt existirt, so ist er ebenso der Schnittpunkt der Centralaxe mit der Ebene verschwindenden Virials.

13. Es wurde Cap. XI, §. 7 gezeigt, dass es für ein Kräftesystem in Bezug auf die Drehung um einen Punkt im Allgemeinen nur vier Gleichgewichtslagen des Systems der Angriffspunkte gibt und dass dieselben diejenigen Lagen sind, für welche die Seitenkräfte der drei astatischen Paare, auf welche das Kräftesystem reducirt werden kann, mit ihren Armen in die Hauptaxen des Centralellipsoides jenes Punktes fallen. Diese vier Lagen können durch Umwenden des Systems um diese Hauptaxen (um π) aus einander abgeleitet werden. Bei jeder Umwendung wechselt aber das Virial eines der drei Paare das Zeichen. Daher gibt es unter den vier Gleichgewichtslagen eine, für welche alle drei Viriale negativ, für welche also nach §. 4 das Gleichgewicht in Bezug auf jede der drei Hauptaxen sicher ist. Diese Lage ist zugleich für jede Axe sicher, da das Virial, welches sich aus der Summe jener drei Viriale zusammensetzt, jedenfalls negativ ist. Dieser Lage steht eine andere gegenüber, welche aus ihr durch drei Umwendungen hervorgeht; sie ist für alle drei Axen eine unsichere Gleichgewichts-

lage. Die beiden übrigen Lagen sind für eine der drei Hauptaxen sicher, für die andern beiden unsicher.

14. Da $V = -\Sigma(xX + yY + zZ)$ für das Gleichgewicht ein Maximum oder Minimum ist, so muss $\delta V = 0$ werden, wenn das Punktsystem irgend eine unendlichkleine Lagenänderung erleidet und da hierdurch die Kräfte nicht alterirt werden, so ist also $\delta V = -\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$. Es muss daher $\delta^2 V = -\Sigma(X\delta^2 x + Y\delta^2 y + Z\delta^2 z)$ negativ oder positiv im Falle des Maximums oder Minimums, d. h. im Falle des unsicheren oder sicheren Gleichgewichts sein. Nun ergab sich aber für eine virtuelle Windung um eine Axe Cap. IX, §. 7, S. 185:

$$\delta x = \delta\xi + z\delta\vartheta' - y\delta\vartheta'',$$
$$\delta y = \delta\eta + x\delta\vartheta'' - z\delta\vartheta,$$
$$\delta z = \delta\zeta + y\delta\vartheta - x\delta\vartheta'$$

und hiermit

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \Sigma X.\delta\xi + \Sigma Y.\delta\eta + \Sigma Z.\delta\zeta$$
$$+ \Sigma(yZ - zY).\delta\vartheta + \Sigma(zX - xZ).\delta\vartheta' + \Sigma(xY - yX).\delta\vartheta''.$$

Daher wird

$$\Sigma(X\delta^2 x + Y\delta^2 y + Z\delta^2 z) = \Sigma X.\delta^2\xi + \Sigma Y.\delta^2\eta + \Sigma Z.\delta^2\zeta$$
$$+ \Sigma(yZ - zY).\delta^2\vartheta + \Sigma(Z\delta y - Y\delta z).\delta\vartheta + \ldots$$

oder weil wegen des Gleichgewichts $\Sigma X = \Sigma Y = \Sigma Z = 0$, $\Sigma(yZ - zY) = \Sigma(zX - xZ) = \Sigma(xY - yX) = 0$ ist,

$$\Sigma(X\delta^2 x + Y\delta^2 y + Z\delta^2 z)$$
$$= \Sigma(Z\delta y - Y\delta z).\delta\vartheta + \Sigma(X\delta z - Z\delta x).\delta\vartheta' + \Sigma(Y\delta x - X\delta y).\delta\vartheta'',$$

und wenn man hier die Ausdrücke für δx, δy, δz einführt und $\Sigma xX = a_{11}$, $\Sigma yY = a_{22}$, $\Sigma zZ = a_{33}$, ... setzt:

$$\Sigma(X\delta^2 x + Y\delta^2 y + Z\delta^2 z) = -(a_{22} + a_{33})\delta\vartheta^2 - (a_{33} + a_{11})\delta\vartheta'^2 - (a_{11} + a_{22})\delta\vartheta''^2$$
$$+ 2a_{23}\delta\vartheta'\delta\vartheta'' + 2a_{31}\delta\vartheta''\delta\vartheta + 2a_{12}\delta\vartheta\delta\vartheta'.$$

Da aber, wenn $\delta\Theta$ die unendlichkleine virtuelle Amplitude der Rotation um die Axe $(\alpha\beta\gamma)$ bedeutet $\delta\vartheta = \alpha.\delta\Theta$, $\delta\vartheta' = \beta.\delta\Theta$, $\delta\vartheta'' = \gamma.\delta\Theta$ wird, so folgt

$$\Sigma(X\delta^2 x + Y\delta^2 y + Z\delta^2 z)$$
$$= [-(a_{22} + a_{33})\alpha^2 - (a_{33} + a_{11})\beta^2 - (a_{11} + a_{22})\gamma^2 + 2a_{12}\alpha\beta + 2a_{23}\beta\gamma + 2a_{31}\alpha\gamma].\delta\Theta^2.$$

Es ist aber der Ausdruck in der Klammer in der That die Grösse S (S. 272), welche negativ für das sichere und positiv für das unsichere Gleichgewicht ist.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich zum Theil für das veränderliche System erweitern. Man zerlege dasselbe in unveränderliche Partialsysteme, welche sich nöthigenfalls selbst auf einzelne Punkte reduciren können. Die virtuelle Bewegung, welche ein Partialsystem in Folge einer virtuellen Bewegung des Gesammtsystems erleidet, kann stets als eine Windung für sich oder als eine Folge von Rotationen um conjugirte Axen angesehen werden. Mithin ist der sich auf das Partialsystem beziehende Bestandtheil der Function $\Sigma(xX + yY + zZ)$ ein Maximum oder Minimum und der entsprechende Bestandtheil in $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$ für sich Null. Indessen kann hieraus nicht auf ein Maximum oder Minimum der sich auf das ganze System beziehenden Function, ebenso wenig also auch auf die Sicherheit oder Unsicherheit des Gleichgewichts dieses geschlossen werden. Denn es können sich Minima gewisser Partialsysteme mit Maximis anderer combiniren und können einzelne Partialsysteme in

sicherem, andere in unsicherem Gleichgewichte sich befinden, bei welchen Combinationen ein Schluss auf die Beschaffenheit des Gesammtgleichgewichtes nicht stattfinden kann.

Die Eigenschaft des Maximums und Minimums der Function $\Sigma(xX+yY+zZ)$, von welcher hier die Rede ist, bezieht sich auf Lagenänderungen des Systems, bei welchen die Intensität und Richtung der Kräfte sich nicht ändert. Diese Function ist mit Rücksicht hierauf das Integral von $\Sigma\,(Xdx + Ydy + Zdz)$. Wenn ein System in Bewegung begriffen ist und die Kräfte nach Intensität und Richtung Functionen blos von den Coordinaten der Angriffspunkte sind, so kann das Integral dieses Differentialausdrucks aber auch in Bezug auf die während der Bewegung eintretenden Lagenänderungen und Aenderungen der Kräfte ein Maximum oder Minimum werden, sobald das System eine Lage erreicht, in welcher die Kräfte im Gleichgewichte sind. Hierzu wird erfordert, dass der Differentialausdruck die Bedingungen der Integrabilität erfüllt, d. h. dass eine Kräftefunction existire.

§. 6. Gauss hat ein neues Princip aufgestellt, welches gleich wichtig ist für die Behandlung der Probleme der Bewegung der Systeme und für Probleme des Gleichgewichtes von Kräften an ihnen. Er nennt es das Princip des kleinsten Zwanges (Crelle's Journal B. IV, S. 232, 1829); dem statischen Theile dieses Princips, den wir hier allein entwickeln, hat Möbius den Namen des Princips der kleinsten Quadrate gegeben. Stellt man nämlich die Kräfte des Systems durch Längen dar und bezeichnet die Coordinaten des Endpunktes einer solchen Länge P, welche die am Punkte (x, y, z) angreifende Kraft darstellt, mit ξ, η, ζ, so ist $X = \xi - x$, $Y = \eta - y$, $Z = \zeta - z$ und lautet das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in seiner Hauptgleichung:

$$\Sigma\,[(\xi - x)\,\delta x + (\eta - y)\,\delta x + (\zeta - z)\,\delta z] = 0.$$

Denken wir uns nun die Punkte (ξ, η, ζ) fest, das System aber beweglich, wobei die Längen P sich ändern, so stellt der Ausdruck links

$$\delta \cdot \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]$$

dar und die Gleichung drückt den Satz aus:

Werden die Endpunkte F der Strecken, welche die Kräfte darstellen, festgehalten, während das System der Angriffspunkte A beliebige Verschiebungen erleidet, so wird für die Lage des Gleichgewichts die Quadratsumme der Abstände AF, nämlich $\Sigma(\overline{AF}^2)$ ein Maximum oder Minimum, und umgekehrt: Verbindet man ein System der Punkte A mit einem zweiten System von festen Punkten F durch Strecken AF und bringt das System in eine Lage, für welche rücksichtlich der Nachbarlagen $\Sigma(\overline{AF}^2)$ ein Maximum oder Minimum wird, so halten sich die Kräfte am System (A), welche nach den Linien AF wirken und diesen Strecken proportional sind, Gleichgewicht.

Ob ein Maximum oder ein Minimum von $\Sigma(\overline{AF}^2)$ stattfindet, ergibt sich aus

$$\delta^2 \cdot \tfrac{1}{2}\,\Sigma(\overline{AF}^2) = \Sigma\,(\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2) - \Sigma\,(X\delta^2 x + Y\delta^2 y + Z\delta^2 z),$$

wo X, Y, Z wieder für $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ geschrieben sind. Für das sichere Gleichgewicht ist $\Sigma\,(X\delta^2 x + Y\delta^2 y + Z\delta^2 z)$ negativ (§. 15.), also $\delta^2 \cdot \frac{1}{2}\,\Sigma(\overline{AF}^2)$ positiv und $\Sigma(\overline{AF}^2)$ ein Minimum; für das unsichere Gleichgewicht aber ist

$\Sigma(X\delta^2 x^2 + \cdots)$ positiv und kann mithin $\delta^2 \cdot \frac{1}{2} \Sigma(\overline{AF^2})$ positiv oder negativ je nach der Verschiebungsart des Systems ausfallen. Indessen kann man die Linien P unendlich klein nehmen und dann fällt $\Sigma(X\delta^2 x + \cdots)$ als von der dritten Ordnung gegen $\Sigma(\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2)$ fort und zeigt sich $\delta^2 \cdot \frac{1}{2} \Sigma(\overline{AF^2})$ positiv. Verbindet man daher die Punkte A eines beweglichen Systems mit den Punkten F eines unendlich nahen festen Systems und lässt auf das erstere Kräfte wirken, welche den Strecken AF proportional sind und die Richtungen dieser Strecken haben, so nimmt die Summe der Quadrate $\Sigma(\overline{AF^2})$ für jede Verrückung des beweglichen Systems aus der Gleichgewichtslage zu. Da bis auf Unendlichkleines höherer Ordnung

$$\delta \cdot \Sigma(\overline{AF^2}) = \Sigma(\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2)$$

wird, so folgt, dass wenn die Punkte A durch die Verschiebung in die Lage B gelangen,

$$\Sigma(\overline{AF^2}) - \Sigma(\overline{BF^2}) = \Sigma(\overline{AB^2}),$$

d. h. die Quadratsumme der Entfernungen nimmt um die Quadratsumme der virtuellen Wege zu, welche die Punkte des Systems bei der Verschiebung beschreiben.

Einige Literatur zur Theorie der Sicherheit des Gleichgewichtes, des Virials und Gauss'schen Princips.

Möbius, Lehrbuch der Statik, B. I, Cap. IX und Cap. X, §. 172—176.

Schweins, Fliehmomente, oder die Summe $\Sigma(xX + yY)$ bei Kräften in der Ebene und $\Sigma(xX + yY + zZ)$ bei Kräften im Raume. Crelle's Journal B. XXXVIII, S. 77—88.

Clausius, *Sur une quantité analogue au potentiel et sur un théorème y relatif.* (*Comptes rendus de l'Acad. des sc.* T. 70, p. 1314 [1870]; dgl. Göttinger Nachrichten 1871, S. 245, Clebsch' mathem. Annalen B. IV, S. 231 [1871], Schlömilch's Zeitschrift f. Math. u. Physik B. XVII, S. 82—87 [1872].) — *Sur l'équation mécanique dont découle la théorie du viriel.* (Compt. r. T. 75 [1872], pp. 912—916.)

Yvon Villarceau, *Sur un nouveau théorème de Mécanique générale.* Comptes rend. T. 75, p. 232 u. 377 (1872).

Scheffler, über das Gauss'sche Grundgesetz der Mechanik oder das Princip des kleinsten Zwanges, sowie über ein anderes neues Grundgesetz der Mechanik mit einem Excurse über verschiedene die mechanischen Principien betreffende Gegenstände. Schlömilch's Zeitschrift f. Math. u. Physik, B. III, S. 197—223 u. 261—274.

XIII. Capitel.

Reduction der Attractions- und Repulsionskräfte von Massen, Agentien etc. Theorie des Potentials.

§. 1. Nachdem bereits im I. Bande durch die dort entwickelte Streckentheorie die allgemeine Theorie der Reduction von Kräften, welche an einem unveränderlichen System angreifen, erledigt (vgl. d. B., Cap. III, §. 2) und

in Cap. V d. B. an zahlreichen Beispielen erläutert worden ist, erscheint es angemessen, dieselbe auf einige besondere Gattungen von Kräften anzuwenden. Für die Parallelkräfte ist dies bereits geschehen (s. B. I, Cap. III, §. 6 und Cap. IV, §. 11). Die dortigen Gleichungen zeigen insbesondere, dass die Parallelkräfte in dem Falle, dass sie von gleichem Sinne sind und den Punkten von den Massen m, m', m'', ... dieselbe von ihrer Lage im Raume unabhängige Beschleunigung g ertheilen, einer Einzelresultante $R = Mg$ äquivalent sind, deren Richtungslinie durch den Mittelpunkt des Parallelkräftesystems hindurchgeht, dessen Coordinaten

$$x_1 = \frac{\Sigma mx}{M}, \quad y_1 = \frac{\Sigma my}{M}, \quad z_1 = \frac{\Sigma mz}{M}$$

ihn nach B. I, Cap. VI, §. 2 als den Massenmittelpunkt erweisen. Dies ist insbesondere der Fall bei der Schwere, welche für gewöhnliche Dimensionen in allen Punkten als eine Kraft von derselben Richtung, demselben Sinne und derselben unveränderlichen Beschleunigung g angenommen werden kann, sodass ein Punkt von der Masse m durch das Gewicht mg in der Richtung nach dem Massenmittelpunkte der Erde afficirt erscheint. Parallelkräfte convergiren nach einem unendlich fernen Punkte; die nächst allgemeinere Kategorie von Kräften wird daher von solchen gebildet, deren Richtungen sich in einem Punkte in endlicher Entfernung schneiden und deren Sinn entweder diesem Punkte zugewandt oder von ihm abgewandt ist. Man nennt sie im ersten Falle Attractions- oder Anziehungskräfte, im letzteren Repulsions- oder Abstossungskräfte, jedoch unter der Beschränkung, dass die Beschleunigung, welche sie einem Punkte ertheilen, nach einem bestimmten Gesetze von der Entfernung von jenem Punkte und von dessen Masse oder der Menge eines in ihm befindlichen Agens, im Allgemeinen aber nicht von der Richtung abhängig ist. Jener Punkt heisst das Attractions- oder Repulsionscentrum. Wenn also ein System oder eine Parthie desselben Attractionskräften eines Centrums C unterworfen ist, so greift an jedem Punkte M von der Masse m eine Kraft $m\varphi$ an, gerichtet längs der Geraden MC, deren Beschleunigung φ eine bestimmte Function der Entfernung $MC = r$ und der Masse oder Menge Agens μ des Punktes C ist. Ein sehr allgemeiner Fall dieser Art ist $\varphi = \mu F(r)$, d. h. der, dass φ proportional μ ist. Greifen an den Punkten eines Systems Attractionskräfte an, welche blos einem einzigen Centrum zugehören, so sind dieselben als Kräfte, deren Richtungen nach einem Punkte convergiren, stets einer Einzelresultanten äquivalent, welche durch das Centrum hindurchgeht; ist dasselbe aber den Attractionen verschiedener Centra, oder einer continuirlichen Folge, oder einer eine Fläche oder eine Parthie des Raumes continuirlich erfüllenden Menge von Centris ausgesetzt, so lassen sich zwar die Attractionskräfte für jedes einzelne Centrum apart auf eine Einzel-

kraft reduciren, aber alle zusammen und mithin auch die sämmtlichen Attractionskräfte des ganzen Systems, sind im Allgemeinen nicht wieder einer blosen Resultanten, sondern einer Resultanten in Verbindung mit einem resultirenden Paare äquivalent. Die Reduction auf diese beiden Elemente ist auf unzählige Arten möglich, insbesondere aber gibt es eine Reduction für die Centralaxe dieser Kräfte, für welche das Axenmoment des Paares der Resultanten parallel wird. So setzt eine sorgfältige Theorie der irdischen Schwere voraus, dass jeder Punkt eines schweren Körpers von Attractionskräften afficirt wird, deren Centra die verschiedenen Punkte des Erdkörpers sind; die Resultante aller dieser Kräfte ist das Gewicht des Körpers; vermöge der Gestalt des Erdkörpers geht diese Resultante nahezu durch dessen Mittelpunkt und verschwindet das resultirende Paar als unmerklich.

Von besonderer Wichtigkeit sind diejenigen Attractions- und Repulsionskräfte, welche wechselseitig so wirken, dass von irgend zwei Punkten M, M' jeder für den anderen Centrum der Anziehung oder Abstossung ist. Die Voraussetzung solcher Kräfte liegt der Newton'schen Theorie der allgemeinen Gravitation zu Grunde, von welcher die der irdischen Schwere nur ein specieller Fall ist. Es möge jeder der beiden Punkte die Einheit der Masse enthalten und beide um die Linieneinheit von einander entfernt sein. An M greift dann eine Kraft an, welche durch M' als Centrum geht, an M' eine andere, welche durch M geht, beide seien einander gleich an Intensität, gleich ε; ihr Sinn ist im Falle, dass beide Punkte Centra der Anziehung oder Abstossung sind, entgegengesetzt und zwar übereinstimmend mit dem Sinne MM' an M und $M'M$ an M' im Falle der Anziehung, mit $M'M$ an M und MM' an M' im Falle der Abstossung; ihr Sinn ist derselbe, wenn der eine ein Centrum der Anziehung, der andere ein Centrum der Abstossung ist. Wird nun die Masse des Punktes M das $m$fache der Masseneinheit, wo m eine beliebige Zahl sein kann, so wird die Kraft, welche m afficirt, $m\varepsilon$, weil auf jede in M befindliche Masseneinheit dieselbe, durch M' gehende Kraft wirkt und die an M' angreifende Kraft wird gleichfalls $m\varepsilon$, weil jede in M befindliche Masseneinheit als ein Centrum der Wirkung auf M' anzusehen ist. Aus denselben Gründen wird die Kraft $m\varepsilon'$ an beiden Punkten zu $mm'\varepsilon$, wenn die Masse von M' zu m' wird. W e r d e n a l s o a l l e M a s s e n p u n k t e a l s C e n t r a d e r A n z i e h u n g o d e r A b s t o s s u n g f ü r e i n a n d e r a n g e s e h e n, s o s i n d d i e K r ä f t e, m i t w e l c h e n j e z w e i P u n k t e g e g e n s e i t i g b e s c h l e u n i g t w e r d e n, i n d e r E i n h e i t d e r E n t f e r n u n g g l e i c h a n I n t e n s i t ä t u n d d e m P r o d u k t e i h r e r M a s s e n p r o p o r t i o n a l. Treten nun die Punkte M, M' aus der Einheit der Entfernung in die Entfernung r auseinander, so werden die beiden Kräfte immerhin einander gleich bleiben, ihre gemeinsame

Intensität wird aber von r abhängen und kann durch $\varepsilon mm'F(r)$ dargestellt werden. Nach dem Gesetze, welches Newton der allgemeinen Gravitationstheorie zu Grunde gelegt hat, ist $F(r) = \frac{1}{r^2}$, d. h. es nimmt die Kraftintensität mit dem Quadrate der Entfernung der beiden Punkte ab.

§. 2. Wir wollen zunächst eine Reihe von Attractionsproblemen behandeln, welche mit elementaren Mitteln durchführbar sind; später werden wir die Theorie der Kräftefunction entwickeln, von welcher alle derartige Untersuchungen abhängen.

1. Die Punkte des homgenen Kreisbogens AB (Fig. 80) von der specifischen Masse ϱ, dem Radius r und dem Centriwinkel $ACB = 2\alpha$ ziehen einen im Mittelpunkte C befindlichen Punkt von der Masse μ nach dem Newton'schen Gesetze an; man soll die Resultante R aller Anziehungskräfte bestimmen.

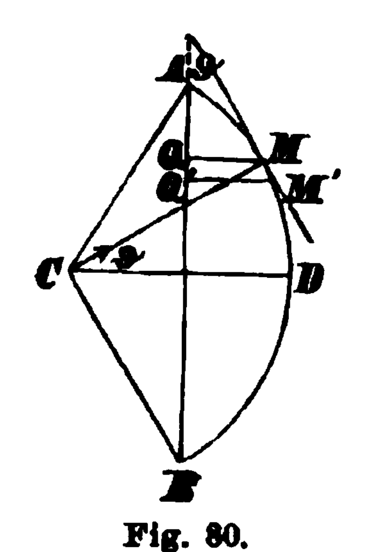


Fig. 80.

Die Masse des im Punkte M verschwindenden Linienelementes MM' ist $\varrho \cdot \overline{MM'}$ und die Kraft, mit welcher dasselbe den Punkt C in der Richtung CM afficirt, $\frac{\varepsilon\mu \cdot \varrho \cdot \overline{MM'}}{r^2}$; sie zerfällt in zwei Componenten, eine parallel der Sehne AB, die andere längs des Radius CD. Für Winkel $MCD = \vartheta$ ist letztere $\frac{\varepsilon\mu \cdot \varrho \cdot \overline{MM'}}{r^2} \cos\vartheta$, die erstere kommt für die Bildung der Resultanten R nicht in Betracht, da je zwei symmetrisch gegen den Radius CD gelegene Punkte M entgegengesetzt gleiche Componenten parallel der Sehne liefern und sich dieselben paarweise tilgen. Die totale Attractionskraft hat die Richtung von CD und ist die Summe aller Componenten längs dieser Linie. Nun ist aber $MM' \cdot \cos\vartheta$ die Projection QQ' des Elementes MM' auf die Sehne AB, weil die Tangente in M mit AB gleichfalls den Winkel ϑ bildet, daher ist $R = \frac{\varepsilon\mu\varrho}{r^2} \Sigma\overline{QQ'} = \frac{\varepsilon\mu\varrho \cdot \overline{AB}}{r^2}$. Denkt man sich die Sehne AB mit Masse von derselben Beschaffenheit wie die des Bogens belegt, so ist dieselbe $\varrho \,.\, \overline{AB}$ und wenn diese in den Punkt D concentrirt gedacht wird, so zieht D den Punkt C mit derselben Kraft R an. Daher der Satz:

Die Attractionskraft, mit welcher ein homogener Kreisbogen einen im Mittelpunkte befindlichen Punkt afficirt, ist nach dem Mittelpunkt des Bogens gerichtet und gleich der Attraction, welche dieser Mittelpunkt ausüben würde, wenn in ihm die Masse der Sehne vereinigt wäre, letztere von derselben specifischen Masse gedacht, wie der Bogen.

Da $AB = 2r \sin\alpha$ ist, so kann man R die Form geben:

$$R = \frac{2\,\varepsilon\mu\varrho}{r} \sin\alpha.$$

2. Eine homogene Strecke AB (Fig. 81) von der specifischen Masse ϱ zieht einen ausser ihr gelegenen Punkt C vom der Masse μ nach dem Newton'schen Gesetze an; man soll Richtung und Intensität der Attraction bestimmen.

Beschreibt man um C einen Kreis $A'B'D$, welcher die Richtung der Strecke AB in D berührt und denkt sich den Bogen $A'B'$, dessen Centralprojection von C aus die Strecke AB ist, von derselben specifischen Masse, wie diese Strecke, so sind die Attractionskräfte, welche irgend zwei dem Strale CmM anliegende Elemente MM', mm' der Strecke und des Bogens auf C ausüben,

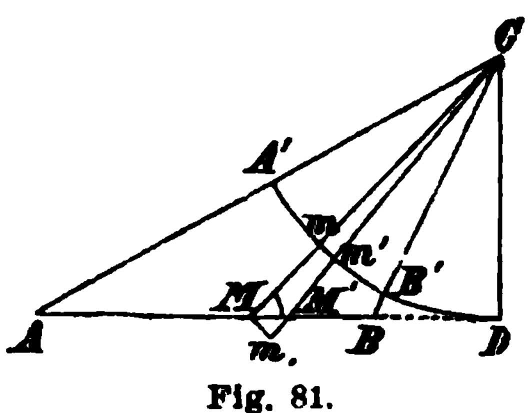


Fig. 81.

$$\frac{\varepsilon\mu\varrho\cdot MM'}{\overline{CM}^2} \text{ und } \frac{\varepsilon\mu\varrho\cdot mm'}{\overline{Cm}^2}.$$

Bildet nun der Stral CM mit AB den Winkel ϑ und beschreibt man mit CM als Radius das Element Mm_1, welches mit MM' und mm' in demselben Centriwinkel MCm_1 liegt, so wird

$$mm' = Mm_1\cdot\frac{Cm}{CM} = MM'\cdot\sin\vartheta\cdot\frac{Cm}{CM} = MM'\cdot\frac{CD}{CM}\cdot\frac{Cm}{CM}$$

$$= MM'\cdot CD\cdot\frac{Cm}{\overline{CM}^2} = MM'.\frac{\overline{Cm}^2}{\overline{CM}^2}$$

und wenn man dies für mm' in den Ausdruck der Attractionskraft des Elementes mm' einführt, so wird er gleich dem Ausdruck der Kraft des Elementes MM'. Demnach üben je zwei entsprechende Elemente der Strecke und des Bogens gleiche Attraction auf C aus und ist daher auch die Resultante aller für beide dieselbe. Mit Rücksicht auf Nr. 1 folgt daher der Satz:

Eine homogene Strecke AB zieht einen äusseren Punkt C mit derselben Kraft an, wie der homogene Bogen eines Kreises derselben specifischen Masse, welcher AB zur Centralprojection von C aus hat und die Richtung der Strecke berührt. Die Richtung der Attractionskraft halbirt demnach den Winkel, unter welchem die Strecke vom angezogenen Punkte aus erscheint und ihre Intensität ist $\frac{2\varepsilon\mu\varrho}{a}\sin\frac{1}{2}\alpha$, wenn α dieser Winkel und a der Abstand des Punktes von der Richtung der Strecke ist.

Beschreibt man in der Ebene der Figur eine Hyperbel, deren Brennpunkte A, B sind und welche durch den Punkt C geht, so halbirt die Tangente derselben in C den Winkel ACB. Construirt man daher das ganze System der für A, B confocalen Hyperbeln, so gibt für jeden Punkt der Ebene die Tangente der durch ihn hindurchgehenden Hyperbel die Richtung der Attractionskraft an, welche die Strecke AB auf ihn ausübt. Diese Hyperbeln heissen daher die Kraftlinien für das Attractionsproblem. Construirt man durch C eine Ellipse, welche A, B zu Brennpunkten hat, so ist die Halbirungslinie des Winkels ACB zu ihr normal; der Punkt C befindet sich daher auf ihr unter Einfluss der Attraction von AB und des Normalwiderstandes im Gleichgewicht. Daher sind die zu A, B confocalen Ellipsen die Niveaulinien des Problems für die Punkte C in der Ebene. Lässt man die Ellipsen um AB als Axe rotiren, so erzeugen sie Rotationsellipsoide, deren Normalen die Halbirungslinien der Winkel ACB aller Punkte C des Raumes sind. Sie sind die Niveauflächen der Attraction der Strecke AB bezüglich der Punkte des Raumes.

Nehmen wir an (Fig. 82), der homogene Halbstral, welcher von A nach dem

Unendlichen hinläuft, stosse den Punkt C ab, der von B nach dem Unendlichen im entgegengesetzten Sinn verlaufende ziehe C mit derselben homogenen Masse an, so kann statt dessen der Bogen $A'U'$, dessen Centralprojection der abstossende Stral ist, als abstossend und der Bogen $B'V'$, dessen Centralprojection der anziehende Stral ist, als anziehend substituirt werden. Für den abstossenden Bogen $A'U'$ aber kann man den ihm congruenten, im entgegengesetzten Scheitelraume liegenden Bogen $V'W'$ als anziehend einführen. Daher ist die Gesammtwirkung beider Stralen, des anziehenden und des abstossenden zusammen, gleich der Anziehung des Bogens $B'W'$. Die Attractionskraft desselben halbirt aber den Winkel $B'CW'$ und steht, da dieser der Nebenwinkel zu ACB ist, auf der Halbirungslinie des letzteren, welcher die Richtung für die Attraction der Strecke AB angibt, senkrecht. Ihre Richtung ist die Tangente der zu A, B confocalen, durch C gehenden Ellipse und normal zu der ihr confocalen Hyperbel. Daher ist diese Ellipse Kraftlinie für die Wirkung der beiden Stralen und das Rotationshyperboloid um AB als Axe, dessen Generatrix die Hyperbel ist, eine Niveaufläche. Diese Betrachtung liefert den Satz:

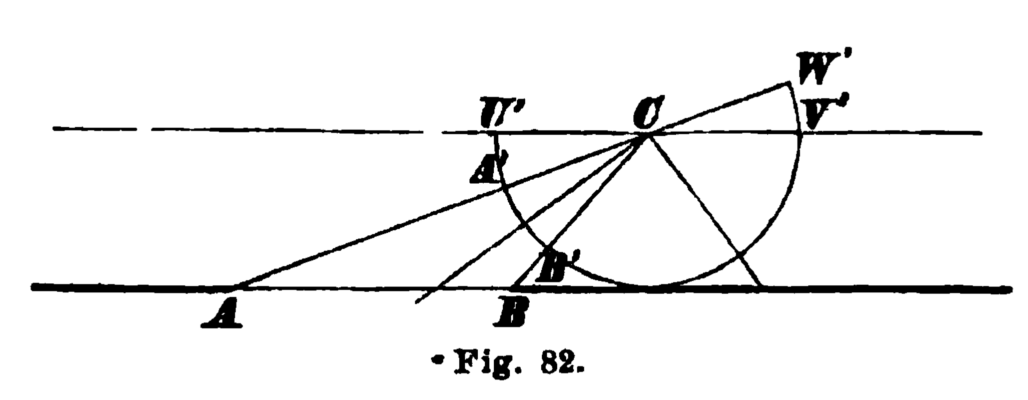


Fig. 82.

Die Schaar Rotationsellipsoide um dieselbe Axe, welche unter einander confocal sind für zwei Punkte A, B dieser Axe als Brennpunkte bildet die Niveauflächen für die Newton'sche Attraction der homogenen Strecke AB, die Schaar von Rotationsdoppelhyperboloiden um dieselbe Axe, welche für dieselben Brennpunkte confocal sind, bildet die Niveauflächen für die Gesammtwirkung der von A und B nach dem Unendlichen verlaufenden homogenen Halbstralen, wenn von ihnen der eine nach dem Newton'schen Gesetze anziehend, der andere nach demselben Gesetze abstossend wirkt.

3. Attraction einer homogenen Kugelfläche (Fig. 83). Es sei C der Mittelpunkt, R der Radius und ϱ die specifische Masse derselben, P der angezogene Punkt von der Masse μ, a seine Entfernung PC vom Mittelpunkte und liege P zunächst im Aussenraume der Kugel. Durch P ziehen wir einen beliebigen Stral PMM', welcher die Kugelfläche in M und M' schneidet und sei $PM = r$. Das Flächenelement $d\Omega$ in M zieht alsdann P mit der Kraft $\varepsilon\mu\varrho \cdot \frac{d\Omega}{r^2}$ an und die längs PC gerichtete Componente derselben, auf welche allein es hier ankommt, da die zu PC senkrechten, von den verschiedenen Flächenelementen herrührenden Componenten sich vermöge der Symmetrie der Figur paarweise tilgen, ist $\varepsilon\mu\varrho \cdot \frac{d\Omega}{r^2} \cos\varphi$, wenn Winkel $MPC = \varphi$. In dem Dreieck PCM tragen wir an M den Winkel $CMO = \varphi$ an und erhalten $\triangle CMO \backsim \triangle PCM$, wofür demnach die Proportion besteht:

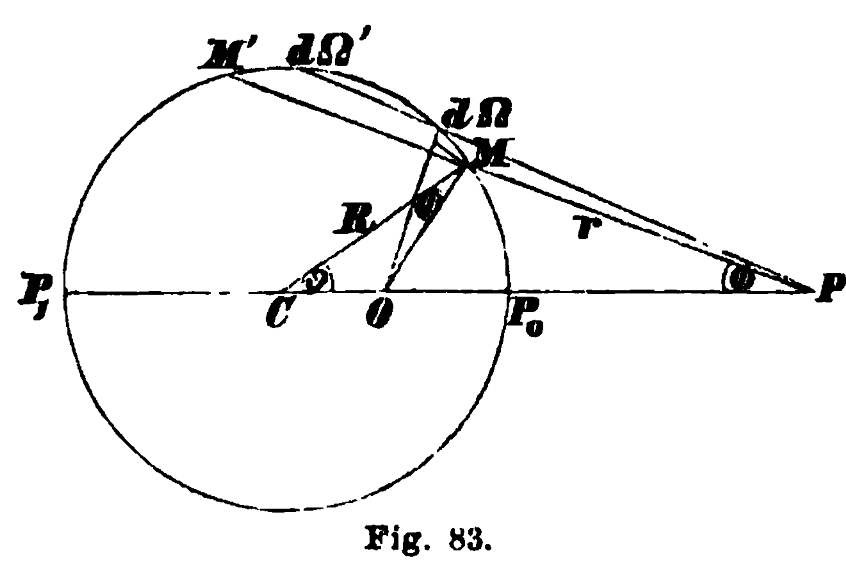


Fig. 83.

$$\frac{CO}{R} = \frac{R}{a} = \frac{OM}{r},$$

woraus $CO \cdot a = R^2$ folgt, sodass O ein und derselbe Punkt für alle Elemente $d\Omega$ bleibt, nämlich der vierte harmonische Punkt zu P als dem einen und den Durchschnitten P_0, P_1 von PC mit der Kugel als dem anderen Paare zugeordneter Punkte oder also der zu P in Bezug auf die Kugelfläche conjugirte Punkt. Durch den Umfang des Flächenelementes $d\Omega$ legen wir von O aus einen unendlich schmalen Kegel. Derselbe schneidet aus einer um O mit OM beschriebenen Kugelfläche ein Element $d\Omega_1$ aus und da die beiden Elemente $d\Omega$, $d\Omega_1$ mit einander denselben Winkel φ einschliessen, wie die Radien CM und OM der Kugelflächen, denen sie angehören und auf welchen sie senkrecht stehen, so wird $d\Omega \cdot \cos\varphi = d\Omega_1$ und mithin die Attractionscomponente von $d\Omega$ längs PC gleich $\varepsilon\mu\varrho \cdot \frac{d\Omega_1}{r^2}$. Nun sei $d\omega$ das Mass des körperlichen unendlich kleinen Winkels O, welcher über $d\Omega_1$ steht, d. h. die Grösse eines Kugelflächenelementes vom Radius gleich der Längeneinheit, welches von dem unendlich schmalen Kegel ausgeschnitten wird; dann ist $d\Omega_1 = \overline{OM}^2 \cdot d\omega$ und folglich die fragliche Attractionscomponente $\varepsilon\mu\varrho \cdot \frac{\overline{OM}^2}{r^2} \cdot d\omega$. Obiger Proportion zufolge geht dieser Ausdruck aber über in $\varepsilon\mu\varrho \cdot \frac{R^2}{a^2} \cdot d\omega$. Eine ähnliche Componente von derselben Richtung und demselben Sinne liefert das Flächenelement bei M', nämlich $\varepsilon\mu\varrho \cdot \frac{R^2}{a^2} \cdot d\omega'$, wenn $d\omega'$ das Mass des über ihm stehenden Winkelraumes ist. Legt man nun von P aus an die Kugel den Tangentenkegel, so berührt er dieselbe in dem Kreise, in welchem sie von der in O auf PC senkrecht stehenden Polarebene des Punktes P geschnitten wird. Diese Ebene zerfällt die Kugelfläche in zwei Theile, von denen der eine die Elemente $d\Omega$ enthält, welche Punkten M anliegen, während der andere solche enthält, welche Punkten M' angehören. Erstere liefern auf der um O mit dem Radius gleich der Einheit beschriebenen Kugel Flächenelemente $d\omega$, letztere solche $d\omega'$. Summiren wir jetzt alle Componenten längs PC, welche von den verschiedenen Elementen der Kugelfläche herrühren, so ergibt sich, weil $\Sigma d\omega + \Sigma d\omega' = 4\pi$, nämlich gleich der ganzen Kugelfläche vom Radius Eins und also das Mass des vollen Winkelraumes ist, als Gesammtcomponente der Attraction:

$$\frac{4\pi\varepsilon\mu\varrho R^2}{a^2}.$$

Die Masse M der Kugelfläche ist $M = 4\pi\varrho R^2$ und wenn man dieselbe im Mittelpunkte C concentrirt denkt, so würde dieser Punkt auf P die Anziehung $\frac{\varepsilon\mu M}{a^2}$ ausüben. Daher der Satz:

Eine homogene Kugelfläche zieht einen Punkt des Aussenraumes ebenso an, als ob ihre Masse im Kugelmittelpunkte vereinigt wäre.

Denkt man sich den Punkt P als Spitze eines schmalen Kegels, welcher das Element $d\Omega$ an M enthält, so schneidet derselbe aus der Kugelfläche bei M' ein Element $d\Omega'$ aus, dessen Ebene gegen den Stral PMM' dieselbe Neigung ψ hat, wie $d\Omega$. Man hat $\sin\psi = \frac{1}{2}\overline{MM'} : R$. Wird daher der Winkelraum dieses Kegels mit $d\varpi$ bezeichnet, so sind für $PM = r$, $PM' = r'$ die Grössen $r^2 d\varpi$, $r'^2 d\varpi$ die

Projectionen von $d\Omega$, $d\Omega'$ auf Ebenen senkrecht zu r und folglich $r^2 d\varpi = \frac{MM'}{2R} d\Omega$, $r'^2 d\varpi = \frac{MM'}{2R} d\Omega'$, woraus $d\Omega : d\Omega' = r^2 : r'^2$ folgt. Es war ferner

$$\frac{d\Omega}{r^2} \cos\varphi = \frac{R^2}{a^2} d\omega,$$

daher ist

$$d\varpi = \frac{MM' \cdot R}{2a^2 \cos\varphi} d\omega,$$

also $\frac{d\omega}{d\varpi} = \frac{2a^2 \cos\varphi}{MM' \cdot R}$. Das zu $d\Omega'$ gehörige $d\omega'$ ergibt sich vermöge der Relation $\frac{d\Omega'}{r'^2} \cos\varphi = \frac{R^2}{a^2} d\omega'$; man erhält hierfür $d\varpi = \frac{MM' \cdot R}{2a^2 \cos\varphi} \cdot d\omega'$, woraus $\frac{d\omega'}{d\varpi} = \frac{2a^2 \cos\varphi}{MM' \cdot R}$ folgt. Es ist mithin $d\omega = d\omega'$.

Nehmen wir jetzt an, der Punkt P liege im Innenraume der Kugel (Fig. 84), so fällt der conjugirte Pol O in den Aussenraum. Die beiden Punkte M, M' und die ihnen anliegenden Elemente $d\Omega$ und $d\Omega'$ liegen auf entgegengesetzten Seiten von P und üben auf diesen entgegengesetzte Attractionen $\varepsilon\mu\varrho \frac{R^2}{a^2} d\omega$ und $\varepsilon\mu\varrho \frac{R^2}{a^2} d\omega'$ aus. Sie sind gleich und tilgen sich, da wegen der gleichen Neigung von $d\Omega$, $d\Omega'$ gegen MM' die Elemente $d\omega$ und $d\omega'$, wie oben, gleich werden. **Eine homogene Kugelfläche übt daher auf einen inneren Punkt keine Anziehung aus und der Punkt befindet sich in jeder Lage im Innenraume im Gleichgewicht.**

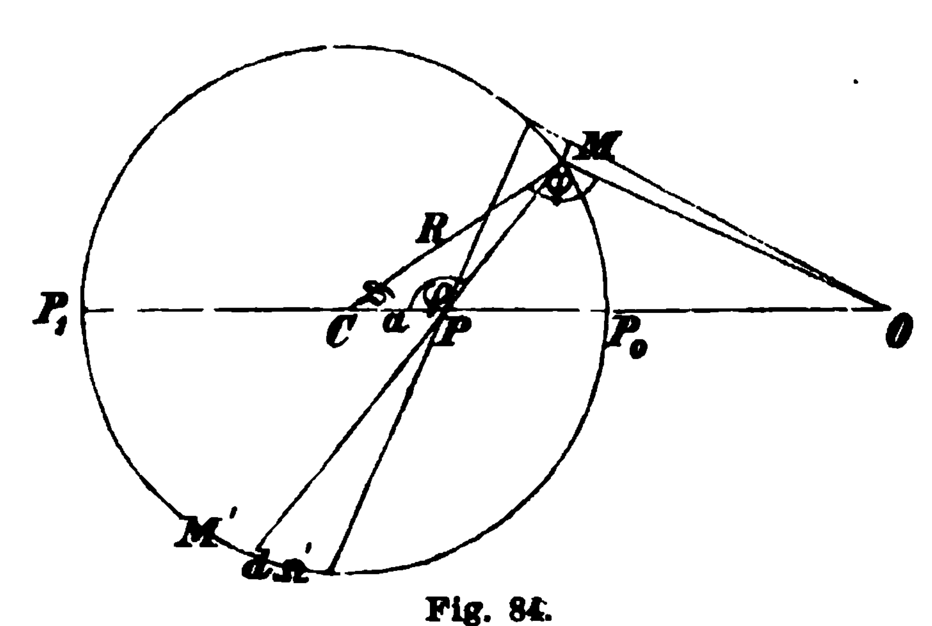


Fig. 84.

Dieser Satz folgt auch aus der oben gegebenen Proportion $\frac{d\Omega}{r^2} = \frac{d\Omega'}{r'^2}$, wenn dieselbe beiderseits mit $\varepsilon\mu\varrho$ multiplicirt wird. Auch sieht man ein, dass wenn die Punkte M, M' über die Kugel hinlaufen, der Winkelraum des von O aus an die Kugel gelegten Tangentenkegels mit den Elementen $d\omega$, $d\omega'$ so belegt wird, dass die einen Elemente sich über die anderen hinlagern und wenn sie als mit entgegengesetztem Zeichen versehen angesehen werden, sich tilgen.

Rückt der Punkt P auf die Kugelfläche von der Seite des Aussenraumes, so wird die Kraft, mit welcher ihn die Kugel anzieht, $4\pi\varepsilon\mu\varrho$, da $a = R$; gelangt er auf der Innenseite auf dieselbe, so ist diese Kraft gleich Null.

Nach der obigen Methode kann man die Attraction jedes beliebigen Kugelflächenstücks auf einen Punkt P bestimmen, sobald dasselbe in Bezug auf den Durchmesser PC symmetrisch liegt, sodass die Attractionscomponenten senkrecht zu PC sich paarweise tilgen. Man erhält $\frac{\varepsilon\mu\varrho R^2 \omega}{a^2}$, wenn ω den Winkelraum eines Kegels bezeichnet, der von O aus durch die Grenzcurve des Flächenstücks hindurchgeht.

Die obigen Sätze bestehen fort, wenn an die Stelle der Kugelfläche eine unendlich dünne Kugelkruste von constanter specifischer Masse ϱ tritt; die Masse

des Flächenelementes $\varrho \cdot d\Omega$ wird hierbei vertreten durch $\varrho d\Omega \cdot dR$, die Masse des unendlich kleinen Volumens $d\Omega \cdot dR$, wo dR die constante Dicke der Kruste bedeutet. Indem man solcher Krusten unendlich viele übereinander lagert, wobei die specifische Masse von Kruste zu Kruste variiren kann, gelangt man dazu, die Sätze auf eine Kugelschicht von endlicher Dicke auszudehnen. Für den Fall, dass der afficirte Punkt in der Masse der Schicht liegt, hat man die Schicht durch eine durch diesen Punkt gehende Kugelfläche in zwei Schichten zu spalten. In Bezug auf die äussere ist er ein dem Innenraume angehöriger, der Innenfläche anliegender Punkt, in Bezug auf die innere befindet er sich auf der Aussenfläche. Die Sätze lauten demnach:

Eine Kugelschicht von constanter oder von Schale zu Schale veränderlicher specifischer Masse zieht einen Punkt ihres Aussenraumes nach dem Newton'schen Gesetze in der Richtung nach ihrem Mittelpunkte an und zwar so, als ob ihre Masse in diesem Mittelpunkte vereinigt wäre; auf einen Punkt ihres Innenraumes übt sie keine Wirkung und einen Punkt ihrer Masse afficirt sie nur mit der Masse derjenigen Partialschicht, in Bezug auf welche er ein äusserer ist.

Eine Vollkugel zieht einen Punkt ihrer Masse mit der Masse desjenigen Theiles an, welcher von der durch den afficirten Punkt gehenden concentrischen Kugel umschlossen wird.

Ist x die Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte, so ist demnach $\frac{4}{3}\pi\varepsilon\varrho\mu x$ bei constanter specifischer Masse die Attractionskraft, also der ersten Potenz des Abstandes vom Mittelpunkte proportional. (Vgl. B. I, S. 346, Abs. 2.)

Man dehnt diese Sätze leicht auf die Fälle der Attraction zweier Kugeln aufeinander aus.

4. Andere Methode, die Attraction einer homogenen Kugelfläche zu bestimmen (Fig. 83 und 84). Für Winkel $PCM = \vartheta$, $PM = r$ hat man als Inhalt der schmalen Zone, welche das Linienelement bei M durch Rotation um CP erzeugt, $2\pi R^2 \sin\vartheta d\vartheta$ und da alle Elemente dieser Zone den Punkt P gleich stark anziehen und ihre Anziehungskräfte gleiche Neigung gegen CP haben, so ist die totale Attraction der Zone, längs CP gerichtet:

$$\varepsilon\mu\varrho \cdot 2\pi R^2 \cdot \frac{\sin\vartheta d\vartheta}{r^2} \cdot \cos\varphi,$$

oder da $4\pi\varrho R^2 = M$ die Masse der Kugelfläche darstellt und

$$CP = a = R\cos\vartheta + r\cos\varphi$$

ist,

$$\frac{1}{2}\varepsilon\mu M \cdot \frac{a - R\cos\vartheta}{r^3} \sin\vartheta d\vartheta.$$

An die Stelle der Variabeln ϑ führen wir r ein. Hierzu dient

$$r^2 = a^2 + R^2 - 2aR\cos\vartheta, \text{ also } rdr = aR\sin\vartheta d\vartheta.$$

Man erhält dann

$$\frac{1}{4}\varepsilon\mu \frac{M}{a^2}\left(\frac{1}{R} - \frac{R^2 - a^2}{Rr^2}\right) dr.$$

Daher wird die Gesammtanziehung A der Kugel:

1. für einen äusseren Punkt, für welchen die Grenzen der Integration $r = a - R$ und $r = a + R$ sind:

$$A = \tfrac{1}{4}\varepsilon\mu \frac{M}{a^2}\left(\frac{r}{R} + \frac{R^2 - a^2}{Rr}\right)_{a-R}^{a+R} = \frac{\varepsilon\mu M}{a^2},$$

2. für einen inneren Punkt, wofür die Grenzen $r = R - a$ und $r = R + a$ sind:

$$A = \tfrac{1}{4}\varepsilon\mu \frac{M}{a^2}\left(\frac{r}{R} + \frac{R^2 - a^2}{Rr}\right)_{R-a}^{R+a} = 0.$$

5. Anziehung einer massiven homogenen Halbkugel auf einen Punkt ihres Randes.

6. Attraction einer homogenen Kreisfläche und ihres Aussenraumes auf einen Punkt P des im Mittelpunkte C auf sie errichteten Perpendikels.

7. Attraction eines homogenen Kreiscylinders von der Länge l und dem Radius R auf einen Punkt seiner Axe.

8. Attraction eines abgestumpften geraden homogenen Kreiskegels auf einen Punkt seiner Axe.

9. Von zwei gleich grossen parallelen Kreisscheiben gleicher specifischer Masse, welche beide senkrecht auf ihrer Centrallinie stehen, zieht die eine einen Punkt dieser Centralen an, während die andere ihn abstösst. Welches ist die Resultante dieser Kräfte?

§. 3. Für Attractionskräfte lässt sich eine Function bilden, deren partielle Differentialquotienten den Componenten der Kraft proportional sind. Dieselbe ist eine blose Function des Ortes, d. h. der Coordinaten des afficirten Punktes, weil Attractionen blos von der Entfernung abhängen. Von ihr ist das ganze Problem der Attraction, wie das Problem der Bewegung des Attractionskräften unterworfenen Punktes abhängig.

Es sei dm (Fig. 85) das Element einer auf den Punkt P (xyz) von der Masse μ anziehend wirkenden, irgend einen Raum erfüllenden continuirlichen oder auch aus discreten Theilen bestehenden Masse, ε die Anziehungskraft für die Einheit der Entfernung zweier in Punkte concentrirter Masseneinheiten und $F(r)$ das Anziehungsgesetz; dann ist $\varepsilon\mu dm F(r)$ die Intensität der Kraft, mit welcher das Massenelement dm und die Masse μ des Punktes P in der Entfernung r sich gegenseitig anziehen. Sind ferner a, b, c die Coordinaten von dm, so stellen $\frac{a-x}{r}$, $\frac{b-y}{r}$, $\frac{c-z}{r}$ die Richtungscosinusse der Linie r dar, von P nach dm hinführend gedacht und sind mithin die Richtungscosinusse für die an P angreifende Anziehungs-

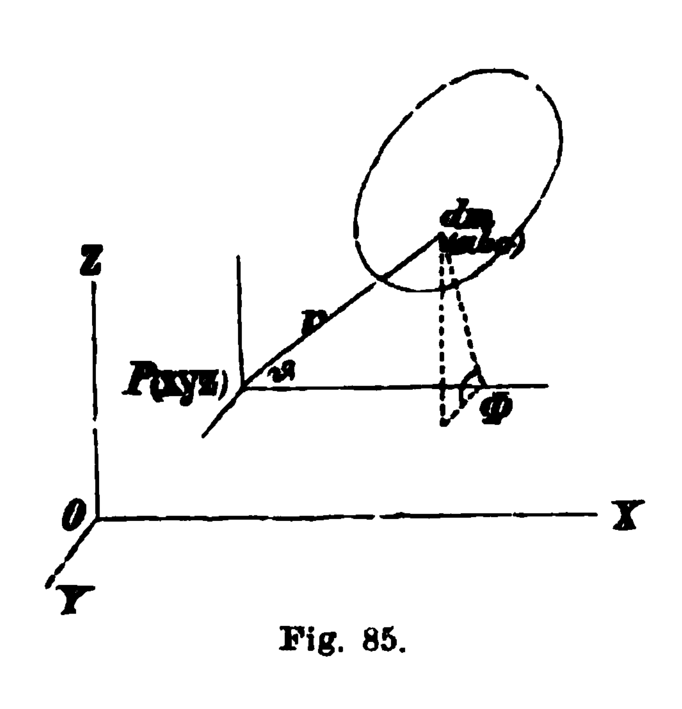


Fig. 85.

kraft. Daher sind die Componenten dieser Kraft

$$\varepsilon\mu F(r)\frac{a-x}{r}\,dm,\quad \varepsilon\mu F(r)\frac{b-y}{r}\,dm,\quad \varepsilon\mu F(r)\frac{c-z}{r}\,dm.$$

Für den Fall der Abstossung erhalten die Cosinusse das umgekehrte Zeichen, welches man aber mit dem Factor ε vereinigt denken kann, sodass ε als positiv für Anziehungen, als negativ für Abstossungen angesehen werden kann. Die Summen aller Componenten, mit welchen die verschiedenen Massenelemente auf μ wirken, erhält man, indem man die vorstehenden drei Ausdrücke durch die ganze Masse hindurch integrirt oder, wenn dieselbe auf discrete Punkte vertheilt ist, von Punkt zu Punkt summirt. Diese Summen stellen die Componenten X, Y, Z der Gesammtattraction zwischen der Totalmasse und dem Punkte P, d. h. die Componenten der Kraft dar, mit welcher diese P angreift und $-X$, $-Y$, $-Z$ sind die Componenten der entgegengesetzt wirkenden, ebenso grossen Kraft, mit welcher P auf jene Masse anziehend wirkt. Es sind demnach:

$$X=\varepsilon\mu\int F(r)\frac{a-x}{r}\,dm,$$

$$Y=\varepsilon\mu\int F(r)\frac{b-y}{r}\,dm,$$

$$Z=\varepsilon\mu\int F(r)\frac{c-z}{r}\,dm,$$

worin das Integralzeichen eine einfache, doppelte oder dreifache Integration anzeigt, je nachdem dm unendlich klein von der ersten, zweiten oder dritten Ordnung, d. h. das Massenelement einer Linie, einer Fläche oder eines Körperraumes ist, über welchen die Masse vertheilt ist. Nun ist

$$r^2=(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2$$

und sind folglich (nach einer zuerst von Lagrange gemachten Bemerkung) die Cosinusse der Richtungswinkel

$$\frac{a-x}{r}=-\frac{\partial r}{\partial x},\quad \frac{b-y}{r}=-\frac{\partial r}{\partial y},\quad \frac{c-z}{r}=-\frac{\partial r}{\partial z}.$$

Hiermit werden

$$X=\varepsilon\mu\int -F(r)\frac{\partial r}{\partial x}\,dm,$$

$$Y=\varepsilon\mu\int -F(r)\frac{\partial r}{\partial y}\,dm,$$

$$Z=\varepsilon\mu\int -F(r)\frac{\partial r}{\partial z}\,dm,$$

und wenn man also $-F(r)$ als den Differentialquotienten einer Function $\varphi(r)$ darstellt, sodass $-F(r)=\varphi'(r)$ und $\varphi(r)=\int -F(r)\,dr$ wird,

so nimmt die Grösse $-F(r)\frac{\partial r}{\partial x}$ die Gestalt $\varphi'(r)\frac{\partial r}{\partial x}$ an und geht in den partiell nach x genommenen Differentialquotienten $\frac{\partial\cdot\varphi(r)}{\partial x}$ von $\varphi(r)$ über. Ebenso wird

$$-F(r)\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{\partial\cdot\varphi(r)}{\partial y},\quad -F(r)\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{\partial\cdot\varphi(r)}{\partial z}$$

und man erhält:

$$X=\varepsilon\mu\int\frac{\partial\cdot\varphi(r)}{\partial x}\,dm=\varepsilon\mu\frac{\partial\int\varphi(r)\,dm}{\partial x},$$

$$Y=\varepsilon\mu\int\frac{\partial\cdot\varphi(r)}{\partial y}\,dm=\varepsilon\mu\frac{\partial\int\varphi(r)\,dm}{\partial y},$$

$$Z=\varepsilon\mu\int\frac{\partial\cdot\varphi(r)}{\partial z}\,dm=\varepsilon\mu\frac{\partial\int\varphi(r)\,dm}{\partial z}.$$

Setzt man daher

$$U=\int\varphi(r)\,dm,$$

so erhält man schliesslich X, Y, Z durch blose Differentiation von U nach x, y, z, nämlich:

$$X=\varepsilon\mu\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=\varepsilon\mu\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z=\varepsilon\mu\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Die Function U von x, y, z heisst die Kräftefunction oder das Potential der Attraction der gegebenen Masse und kann der Inhalt der geführten Untersuchung in den Satz zusammengefasst werden:

Wenn die Elemente dm einer Masse M nach dem Attractionsgesetze $F(r)$ auf einen Punkt P von der Masse μ wirken und man aus $F(r)$ zunächst die Function $\varphi(r)=\int -F(r)\,dr$ und aus ihr das Potential $U=\int\varphi(r)\,dm$ bildet, so sind die Componenten der Attractionskraft, welche an P angreift, die partiellen Differentialquotienten des Potentials, genommen nach den Coordinaten x, y, z des afficirten Punktes, multiplicirt mit dessen Masse und dem Factor ε, welcher die Wirkung zweier Masseneinheiten in der Entfernung gleich der Linieneinheit darstellt.

§. 4. Die Intensität der Kraft P, mit welcher der Punkt (xyz) angezogen wird und ihre Richtung (α, β, γ) sind bestimmt durch die Gleichungen

$$P=(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{1}{2}}=\varepsilon\mu\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\cos\alpha}{X}=\frac{\cos\beta}{Y}=\frac{\cos\gamma}{Z}=\frac{1}{P}.$$

Die Wurzel aus der Quadratsumme der ersten partiellen Differentialquotienten einer Function U nennt man den Differentialparameter erster Ordnung derselben. Die Intensität der Attractionskraft ist daher dem Differentialparameter erster Ordnung der Kräftefunction proportional.

Mit derselben Kraft P, mit welcher die Masse auf den Punkt wirkt, wirkt dieser im entgegengesetzten Sinne auf sie; denn jedes Massenelement wird von ihm mit derselben Kraft afficirt, wie er von ihm, und die sämmtlichen von ihm herrührenden, an den verschiedenen Massenelementen angreifenden Elementarkräfte liefern, weil sie sich alle in ihm schneiden, eine der Kraft P entgegengesetzt gleiche Resultante, welche man an irgend einem Punkte der Masse, welcher auf ihrer Richtung liegt, angreifend denken kann.

Es sei U der Werth der Kräftefunction im Punkte (xyz), U' ihr Werth in einem folgenden Punkte $(x+dx, y, z)$, für welchen blos x sich geändert hat, dann ist $U'-U$ die partielle Aenderung von U nach x und sie ist durch dx zu dividiren und mit $\varepsilon\mu$ zu multipliciren, um X zu erhalten. Es stellt daher

$$Xdx = \varepsilon\mu \frac{(U'-U)}{dx} dx = \varepsilon\mu \frac{\partial U}{\partial x} dx$$

die Elementararbeit der Kraft P längs des Weges dx dar. Ebenso wird

$$Ydy = \varepsilon\mu \frac{\partial U}{\partial y} dy \quad \text{und} \quad Zdz = \varepsilon\mu \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

und wenn daher dx, dy, dz die Projectionen eines unendlich kleinen Weges ds sind, längs welches der afficirte Punkt aus der Lage (xyz) in die Lage $(x+dx, y+dy, z+dz)$ übergehend gedacht wird, so ist die Elementararbeit der Kraft P längs dieses Weges, welcher mit der Richtung von P den Winkel ϑ bilden mag:

$$P\cos\vartheta \cdot ds = Xdx + Ydy + Zdz = \varepsilon\mu\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right),$$

also die Componente $P\cos\vartheta$ in der Richtung von ds:

$$P\cos\vartheta = \varepsilon\mu\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right) = \varepsilon\mu\frac{dU}{ds}.$$

Diese Componente wird also erhalten, indem man die Aenderung der Kräftefunction längs des Weges ds durch ds dividirt und mit $\varepsilon\mu$ multiplicirt.

Das Potential hat im Allgemeinen als Function des Ortes (xyz) in den verschiedenen Punkten des Raumes verschiedene Werthe. Der Inbegriff aller Punkte (xyz), in welchem sie ein und denselben constanten Werth c besitzt, heisst eine Niveaufläche (vgl. B. I, S. 357) und $U=c$ stellt deren Gleichung dar. Indem man c alle reellen Werthe durchlaufen lässt,

erhält man die ganze Schaar Niveauflächen des Attractionssystems, welchem U zugehört. Durch jeden Punkt des Raumes geht eine Niveaufläche und wenn U in diesem Punkte eindeutig ist, nur eine. Die Richtungscosinusse der Normalen im Punkte (xyz) der Niveaufläche $U - c = 0$ sind proportional $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ und mithin proportional den Componenten X, Y, Z der Kraft P. Es hat daher in jedem Punkte des Raumes die Kraft P die Richtung der Normalen der durch diesen Punkt gehenden Niveaufläche und wenn dn die unendlich kleine Strecke dieser Normalen vom Fusspunkte bis zur folgenden Niveaufläche bedeutet, so stellt Pdn die Elementararbeit von P längs dieses Weges dar und ist also dem Obigen zufolge gleich $\varepsilon\mu dU$, wenn dU die Aenderung von U bedeutet, welche U bei diesem Uebergange zur folgenden Niveaufläche erleidet, sodass also $P = \varepsilon\mu \frac{dU}{dn}$ wird. Es ist daher die Intensität der Kraft dem Aenderungsverhältnisse der Kräftefunction längs der Normalen der Niveaufläche proportional.

Eine Curve, welche das System der Niveauflächen in allen Punkten normal durchschneidet, gibt durch ihre Tangente in diesen Punkten die Richtung der Kraft P an und heisst eine Kraftlinie. Zu jedem System der Niveauflächen gehört ein System von Kraftlinien, welche die orthogonalen Trajectorien desselben sind. Die Differentialgleichungen desselben sind, da $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ die Richtungscosinusse der Tangente einer Kraftlinie bedeuten:

$$\frac{dx}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial U}{\partial z}}.$$

Ist das System der Niveauflächen unter der Form $F(x, y, z, c) = 0$ gegeben, sodass die Gleichung desselben nicht nach der Constanten aufgelöst ist, so hat man aus

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad F(x, y, z, c) = 0$$

vor der Integration die Constante c zu eliminiren.

§. 5. Für die Newton'sche Attraction ist

$$F(r) = \frac{1}{r^2}, \quad \varphi(r) = \int -\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{r}$$

und folglich

$$U = \int \varphi(r)\, dm = \int \frac{dm}{r}.$$

Das Potential für die Anziehung, welche umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung wirkt (Newton'sches Potential), ist das Integral des Massenelementes dividirt durch seine Entfernung vom angezogenen Punkte, ausgedehnt über die gesammte anziehende Masse. Wird dasselbe, wie üblich, mit V bezeichnet, so ist seine Definitionsgleichung

$$V = \int \frac{dm}{r}$$

und die Componenten der Attraction sind:

$$X = \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial z}$$

oder

$$X = \varepsilon\mu \int dm \frac{\partial \cdot \frac{1}{r}}{\partial x} = \varepsilon\mu \int -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} dm = \varepsilon\mu \int \frac{a-x}{r^3} dm,$$

$$Y = \varepsilon\mu \int \frac{b-y}{r^3} dm, \quad Z = \varepsilon\mu \int \frac{c-z}{r^3} dm,$$

da

$$r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2,$$

$$-\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{a-x}{r}, \quad -\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{b-y}{r}, \quad -\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{c-z}{r}.$$

Für den Fall, dass die Masse in einem allseitig begrenzten Volumen vertheilt ist und die Dichtigkeit ϱ derselben in jedem Punkte einen bestimmten Werth hat, sind das Potential und seine Derivirten für jede Lage des afficirten Punktes bestimmte, endliche, continuirliche Grössen. Es sind dabei die Fälle zu sondern, dass der afficirte Punkt ausserhalb der anziehenden Masse, und dass er innerhalb derselben liegt.

Wählt man den angezogenen Punkt P (x, y, z) zum Pol eines räumlichen Polarcoordinatensystems der r, ϑ, φ, wo r den Radiusvector von P nach dem Massenelemente dm, ϑ den Winkel, den derselbe mit der Polaraxe und φ den Winkel, welchen die Ebene des Winkels ϑ mit der Fundamentalebene bildet, bedeuten, so wird $dm = \varrho r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$ und

$$V = \int \varrho r \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Hierin bedeutet $\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ das Element $d\sigma$ einer um P mit dem Radius 1 beschriebenen Kugelfläche und kann also V in der Form

$$V = \int \varrho r\, dr\, d\sigma$$

geschrieben werden. Man kann behufs Bestimmung von V zuerst nach r und dann nach σ integriren, indem man letztere Integration über alle Ele-

mente der Kugelfläche erstreckt, welche von den Radienvectoren r getroffen werden.

Man sieht leicht aus dieser Form, dass V eine bestimmte endliche Grösse nicht überschreiten kann, wo auch immer P innerhalb oder ausserhalb der anziehenden Masse liegen möge. Sind nämlich $\varkappa$ und R die Maximalwerthe der Dichtigkeit und des Radiusvectors, so ist

$$V < \varkappa \int d\sigma \int_0^R r\,dr, \text{ d. h. } V < \tfrac{1}{2}\varkappa\sigma R^2.$$

Hieraus folgt zunächst nur, dass V für endliche σ und R endlich ist. Für unendlichkleine Masse ist σ, wenn P ausserhalb derselben liegt und wenn P innerhalb sich befindet, R unendlich klein, also in beiden Fällen auch V unendlich klein. Hat die Masse endliche Dimensionen und liegt P innerhalb derselben, so können wir um P eine unendlichkleine geschlossene Fläche beschreiben. Der Werth des Potentials der innerhalb dieser liegenden Masse ist unendlichklein, der Werth des von der übrigen Masse herrührenden Potentials ist endlich. Daher hat ersteres auf die Bildung des Gesammtpotentials keinen Einfluss und verschwindet, wenn jene Fläche sich auf den Punkt P zusammenzieht.

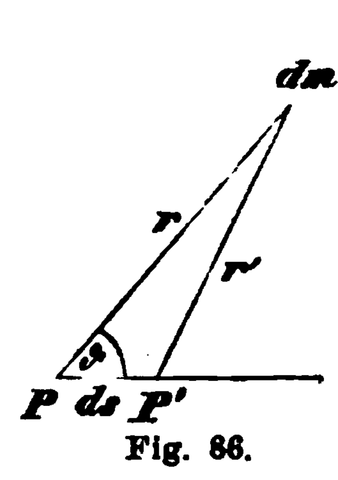


Fig. 86.

Wir wollen jetzt beweisen, dass das Potential eine unendlichkleine Aenderung erleidet, wenn der Punkt P eine unendlichkleine Verschiebung $PP' = ds$ erfährt und dass die Derivirte $\frac{dV}{ds}$, welche dieser Verschiebung entspricht, eine endliche Grösse ist. Ist (Fig. 86) r der Abstand des Elementes dm von P, r' dessen Abstand von P', so wird

$$\Delta V = \int \frac{dm}{r'} - \int \frac{dm}{r} = \int \frac{r - r'}{rr'}\, dm = \int \frac{r - r'}{r'}\, r \sin\vartheta\, \varrho\, dr\, d\vartheta\, d\varphi,$$

wenn man PP' zur Richtung der Polaraxe wählt. Nun ist die Differenz $r - r'$ zweier Seiten des Dreiecks zwischen den Ecken P, P', dm nicht grösser als PP' und $r \sin\vartheta$ nicht grösser als r'. Daher sind in

$$\frac{\Delta V}{PP'} = \int \frac{r - r'}{PP'} \cdot \frac{r \sin\vartheta}{r'}\, \varrho\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

die Grössen $\frac{r - r'}{PP'}$ und $\frac{r \sin\vartheta}{r'}$ nicht grösser als Eins. Daher hat das Integral einen endlichen, bestimmten Werth und werden also ΔV und PP' beide zugleich unendlichklein. Nun ist, wenn ϑ' den Winkel bezeichnet, den r' mit $PP' = ds$ bildet,

$$\frac{r \sin\vartheta}{r'} = \sin\vartheta', \quad \frac{r - r'}{PP'} = \frac{\sin\vartheta' - \sin\vartheta}{\sin(\vartheta' - \vartheta)} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\vartheta' + \vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta)};$$

daher wird

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \int \varrho\, dr\, d\vartheta\, d\varphi \cdot lim \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(\vartheta' + \vartheta) \sin \vartheta'}{\cos \frac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta)}.$$

Es fällt aber, wenn r nicht Null ist, r' für verschwindendes ds mit r zusammen, sodass $\vartheta' = \vartheta$ und der zu bestimmende Grenzwerth $\cos\vartheta \sin\vartheta$ wird. Ist aber $r = 0$, so wird $r' = PP'$ und $\vartheta' = \pi$, somit in diesem Falle der Grenzwerth gleich Null, so dass das dem Werthe $r = 0$ entsprechende Element keinen Einfluss auf das Integral ausübt. Daher ist überhaupt

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \int \cos\vartheta \sin\vartheta\, \varrho\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \int \varrho \cos(r, ds)\, dr\, d\sigma,$$

wo $\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = d\sigma$ und $\cos\vartheta = \cos(r, ds)$ gesetzt ist.

Ferner ist die Kraft, mit welcher das Element dm den Punkt P anzieht, $\varepsilon\mu dm : r^2$ und ihre Projection auf die Richtung von ds gleich

$$\varepsilon\mu \frac{dm}{r^2} \cos(r, ds) = \varepsilon\mu\varrho \cos(r, ds)\, dr\, d\sigma.$$

Integrirt man dies, so folgt, dass die Projection der Gesammtanziehung auf die Richtung von ds ist:

$$P \cos(P, ds) = \varepsilon\mu \int \varrho \cos(r, ds)\, dr\, d\sigma = \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial s}.$$

Sind, wie oben $\varkappa$, R die Maximalwerthe von ϱ und r, so ist

$$P \cos(P, ds) = \varepsilon\mu \frac{dV}{ds} < \varepsilon\mu\varkappa R\sigma,$$

woraus sich ergibt, dass $\frac{\partial V}{\partial s}$, ebenso wie V bei endlichem Abstande R endlich ist und mit verschwindenden Dimensionen der Masse verschwindet.

§. 6. Für das Newton'sche Potential in Bezug auf unendlich ferne Punkte gilt der Satz:

Das Newton'sche Potential V und seine erste Derivirte $\frac{\partial V}{\partial s}$, nach irgend einer Richtung s genommen, von einer in einem endlichem Raume enthaltenen Masse verschwinden, wenn der angezogene Punkt P ins Unendliche rückt. Ist δ der Abstand des Punktes P von einem beliebigen Punkte O, welcher in der Masse oder ausserhalb derselben in endlicher Entfernung von ihr liegt, so nähern sich die Produkte $V\delta$ und $\varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial s}\delta$ für $\delta = \infty$ einem festen Werthe, nämlich der Masse m; die Richtung der Attractionskraft selbst nähert sich dabei der Richtung von δ, nach welcher P sich ins Unendliche entfernt.

In dem von O, P und dem Massenelemente dm gebildeten Dreieck (Fig. 87), dessen Seiten die Entfernungen δ, r, u des Punktes P von O und dm und des Punktes O von dm sind, ist nämlich $r - u < \delta < r + u$ und folglich

Fig. 87.

$$\int \frac{(r-u)\,dm}{r} < \int \frac{\delta\,dm}{r} < \int \frac{(r+u)\,dm}{r}$$

d. h.

$$m - \int \frac{u\,dm}{r} < V\delta < m + \int \frac{u\,dm}{r}.$$

Diese Ungleichung besteht fort, wenn man in ihr für u seinen grössten Werth u_1 und für r seinen kleinsten Werth r_1 einsetzt, d. h. es ist

$$m\left(1 - \frac{u_1}{r_1}\right) < V\delta < m\left(1 + \frac{u_1}{r_1}\right).$$

Für unendlich grosse δ wird aber auch r_1 unendlich gross und folglich $u_1 : r_1$ gleich Null; es fallen mithin die Grenzen für $V\delta$ zusammen und folgt $\lim . V\delta = m$.

Projicirt man ferner die Kraft $\varepsilon\mu\,dm : r^2$, mit welcher das Element dm den Punkt M anzieht auf die Richtung von δ, nach welcher sich P ins Unendliche entfernen soll, so stellt das Integral dieses Ausdruckes die Summe aller Componenten und mithin die Projection der Gesammtattractionskraft P auf δ dar. Diese Grösse ist aber $\varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial s}$. Daher besteht die Gleichung

$$\varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial s} = P \cos(P, \delta) = \varepsilon\mu \int \frac{\cos(r, \delta)}{r^2}\,dm,$$

wo ∂s in die Richtung von δ fällt. Daher ist auch

$$\varepsilon\mu\delta^2 \frac{\partial V}{\partial s} = \delta^2 P \cos(P, \delta) = \varepsilon\mu \int \frac{\delta^2 \cos(r, \delta)}{r^2}\,dm.$$

Nun ist aber $\delta \cos(r, \delta) = r - u \cos(u, r)$ und da $u \cos(u, r)$ zwischen $-u$ und $+u$ liegt, so ist

$$r - u < \delta \cos(r, \delta) < r + u,$$

welche Ungleichung in Verbindung mit der obigen Ungleichung

$$r - u < \delta < r + u,$$

zu der weiteren führt:

$$(r-u)^2 < \delta^2 \cos(r, \delta) < (r+u)^2.$$

Hieraus folgt, ähnlich wie oben

$$\left(1 - \frac{u_1}{r_1}\right)^2 < \frac{\delta^2 \cos(\delta r)}{r^2} < \left(1 + \frac{u_1}{r_1}\right)^2$$

und daher

$$m\left(1 - \frac{u_1}{r_1}\right)^2 < \delta^2 P \cos(P, \delta) < m\left(1 + \frac{u_1}{r_1}\right)^2.$$

Hieraus ergibt sich aber

$$\lim . \delta^2 P \cos (P, \delta) = \lim \varepsilon\mu . \delta^2 \frac{\partial V}{\partial s} = m$$

für wachsende δ. Da die Richtungen der Abstände r für den ins Unendliche rückenden Punkt P der Richtung von δ parallel werden, so wird auch die Resultante oder P ihnen parallel und fällt in die Richtung von δ.

Die Grössen V und $\frac{\partial V}{\partial s}$ verschwinden im Unendlichen als unendlichkleine Grössen von der Ordnung, wie $m : \delta$ und $m : \delta^2$. Da der Punkt P die Masse m mit derselben Kraft, wie sie ihn anzieht, so folgt, dass für unendlich ferne P diese Kraft als Resultante eines Systems von Parallelkräften durch den Mittelpunkt der Masse m hindurchgeht, nach welcher Richtung sich auch P ins Unendliche entfernen mag.

Bevor wir die allgemeine Untersuchung über das Potential fortsetzen und insbesondere Sätze über seine Derivirten zweiter Ordnung entwickeln, wollen wir einige Beispiele zu dem Inhalte der vorstehenden Paragraphen geben.

§. 7. **Potential einer concentrisch geschichteten Hohlkugel** (Fig. 88). Eine Hohlkugelschicht sei enthalten zwischen zwei concentrischen Kugelflächen von den Radien a, b; die Dichtigkeit ϱ sei blos eine Function des Abstandes vom Mittelpunkte, also für concentrische Krusten constant. Für Polarcoordinaten u, ϑ, φ, deren Pol im Mittelpunkte C liegt und deren Polaraxe und Fundamentalebene durch den afficirten Punkt P, für welchen $CP = x$ sei, gehen, hat man:

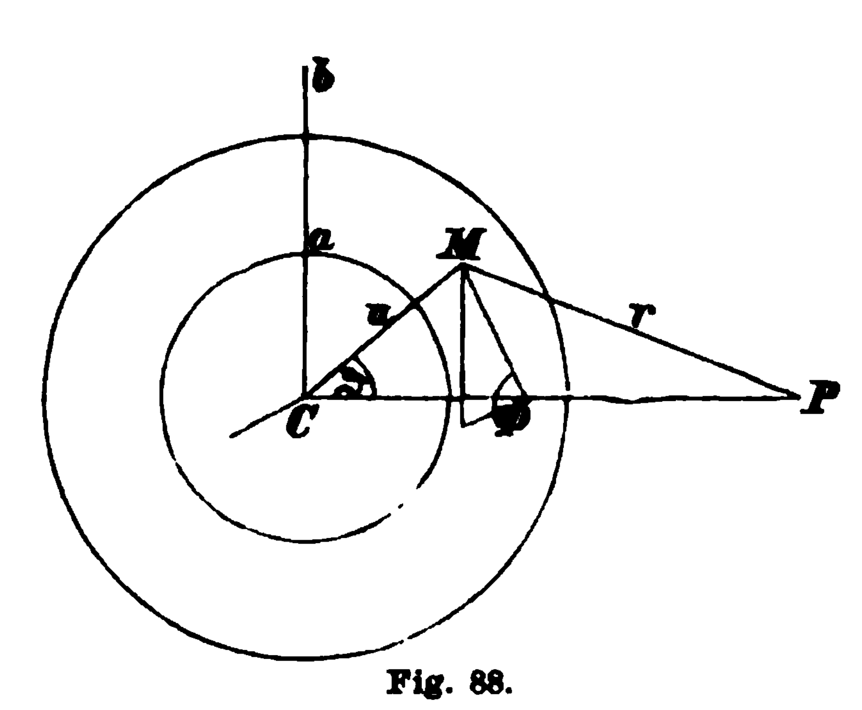


Fig. 88.

$$V = \int\int\int \varrho \frac{u^2}{r} \sin\vartheta \, du \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= 2\pi \int\int \varrho \frac{u^2}{r} \sin\vartheta \, du \, d\vartheta.$$

Führt man statt ϑ die Entfernung r des anziehenden Elementes vom afficirten Punkte als Variabele durch die Gleichung

$$r^2 = u^2 + x^2 - 2ux\cos\vartheta$$

ein, welche bei constantem u die Gleichung $r\,dr = xu \sin\vartheta\, d\vartheta$ liefert, so wird

$$V = \frac{2\pi}{x}\int^b\int \varrho u \, du \, dr.$$

Hinsichtlich der Integrationsgrenzen für r und u sind die Fälle zu unterscheiden, ob der Punkt P dem äusseren Raume oder dem inneren Hohlraume oder der Masse selbst angehört.

1. Für einen äusseren Punkt sind $x - u$ und $x + u$ die Grenzen für r und wird

$$V = \frac{4\pi}{x}\int_a^b \varrho u^2 \, du,$$

oder weil

$$m = 4\pi \int_a^b \varrho u^2 du$$

die Masse der Schicht ist, $V = \frac{m}{x}$. Die Componenten der Attractionskraft sind demnach:

$$X = \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\varepsilon\mu m}{x^2}, \quad Y = \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad Z = \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

und die ganze Kraft $P = \frac{\varepsilon\mu m}{x^2}$ ist nach dem Mittelpunkte gerichtet und gleich der Anziehung der in diesem Punkte vereinigt gedachten Gesammtmasse der Schicht.

2. Für einen Punkt im inneren Hohlraume sind $u - x$ und $u + x$ die Grenzen für r und wird

$$V = 4\pi \int_a^b \varrho u\, du,$$

also constant. Daher sind $X = Y = Z = P = 0$ und übt die Schicht auf den Punkt keine Wirkung aus.

3. Liegt der Punkt in der Masse der Schicht selbst, so zerfälle man diese in eine von den Radien a und x und eine andere von den Radien x und b. Für erstere ist der Punkt ein äusserer, für letztere ein innerer. Daher ist das Potential

$$V = \frac{4\pi}{x} \int_a^x \varrho u^2 du + 4\pi \int_x^b \varrho u\, du.$$

Die Attrcctionskraft ist daher

$$P = X = \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4\pi}{x^2} \int_a^x \varrho u^2 du + \frac{1}{x} 4\pi \varrho_x x^2 - 4\pi \varrho_x x = -\frac{m'}{x^2},$$

wenn m' die Masse der ersteren Schicht und ϱ_x die Dichtigkeit für $u = x$ ist.

4. Bei constanter, specifischer Masse ϱ erhält man für den äusseren Punkt $V = \frac{4}{3} \frac{\pi\varrho}{x} (b^3 - a^3)$ und für die Vollkugel, für welche $a = 0$ ist: $V = \frac{4}{3} \pi\varrho \frac{b^3}{x}$ und $P = -\frac{4}{3} \varepsilon\mu\pi\varrho \frac{b^3}{x^2}$; für den inneren Punkt wird $V = 2\pi\varrho (b^2 - a^2)$, $P = 0$ und für den der Masse angehörenden Punkt:

$$V = \frac{2}{3} \pi\varrho \left(x^2 - \frac{a^3}{x}\right) + 2\pi\varrho (b^2 - x^2), \quad P = -\frac{4}{3} \varepsilon\mu\pi\varrho \left(x - \frac{a^3}{x^2}\right)$$

und insbesondere bei der Vollkugel in diesem Falle:

$$V = -\frac{4}{3} \pi\varrho x^2 + 2\pi\varrho b^2, \quad P = -\frac{4}{3} \varepsilon\mu\pi\varrho x.$$

Für zwei Kugelschichten von den Mittelpunkten C, C' und den Massen m, m' sind die Potentiale für einen äusseren Punkt M gleich, wenn $\frac{m}{CM} = \frac{m'}{C'M}$. Der Ort der Punkte gleicher äusserer Potentiale ist daher eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt auf der Centralen CC' liegt und diese Strecke im Verhältniss $m : m'$ harmonisch theilt. Für drei Kugelschichten enthält der Schnittkreis zweier der drei Potentialkugeln die Punkte gleicher äusserer Potentiale für alle drei Schichten,

daher schneiden sich die drei Potentialkugeln in einem und demselben Kreise. Bei vier Schichten gibt es sechs Potentialkugeln, welche eine gemeinsame Sehne besitzen, welche die beiden Punkte gleicher Potentiale für alle Schichten verbindet.

§. 8. **Potential einer homogenen Kreislinie P_0MP_1 in Bezug auf einen Punkt P ihrer Ebene** (Fig. 89). Für $CP = x$, $CM = R$, $PM = u$, Winkel $CP_0M = \vartheta$ ist zunächst

$$V = \varrho \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2R\,d\vartheta}{u},$$

da der Centriwinkel $MCM' = 2 \cdot MP_0M' = 2\,d\vartheta$ ist. Ferner ergibt sich u aus dem Dreieck PP_1M durch die Gleichung:

$$u^2 = (R+x)^2 + (2R\sin\vartheta)^2 - 2(R+x)\,2R\sin\vartheta\cos(\tfrac{1}{2}\pi - \vartheta),$$

nämlich:

$$u^2 = (R+x)^2 - 4Rx\sin^2\vartheta = (R+x)^2\left[1 - \left(\frac{2\sqrt{Rx}}{R+x}\right)^2 \sin^2\vartheta\right].$$

Hiermit wird:

$$V = \frac{4\varrho R}{R+x}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{Rx}}{R+x}\right)^2\sin^2\vartheta}} = \frac{4\varrho R}{R+x}F\left(\tfrac{1}{2}\pi,\ \frac{2\sqrt{Rx}}{R+x}\right).$$

Die Niveaulinien sind Kreise, concentrisch mit dem anziehenden. Für $x = 0$ wird $V = 2\pi\varrho$, auf dem Umfange wird $V = \infty$ und von da nimmt es ab und verschwindet für $x = \infty$. — Das Potential hängt blos von dem Verhaltnisse $\frac{x}{R}$ ab, denn es ist

$$\frac{R}{R+x} = 1 : \left(1 + \frac{x}{R}\right) \quad \text{und} \quad \frac{2\sqrt{Rx}}{R+x} = 2\sqrt{\frac{x}{R}} : \left(1 + \frac{x}{R}\right).$$

Für zwei in einer Ebene liegende Kreise von den Radien R, R' um die Mittelpunkte C, C' ist der geometrische Ort aller Punkte P der Ebene, welche in Bezug auf sie gleiche Potentiale bei gleicher Dichtigkeit δ besitzen, so beschaffen, dass $\frac{CP}{R} = \frac{C'P}{R'}$. Der Ort ist daher ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Centralen CC' liegt und die Centralstrecke im Verhältniss $R : R'$ harmonisch theilt. Für drei Kreise gibt es drei solcher Potentialkreise und da die Schnittpunkte zweier von ihnen gleiches Potential in Bezug auf alle drei Kreise besitzen, so geht der dritte Kreis durch die Schnittpunkte derselben. Alle drei besitzen daher eine gemeinschaftliche Sehne.

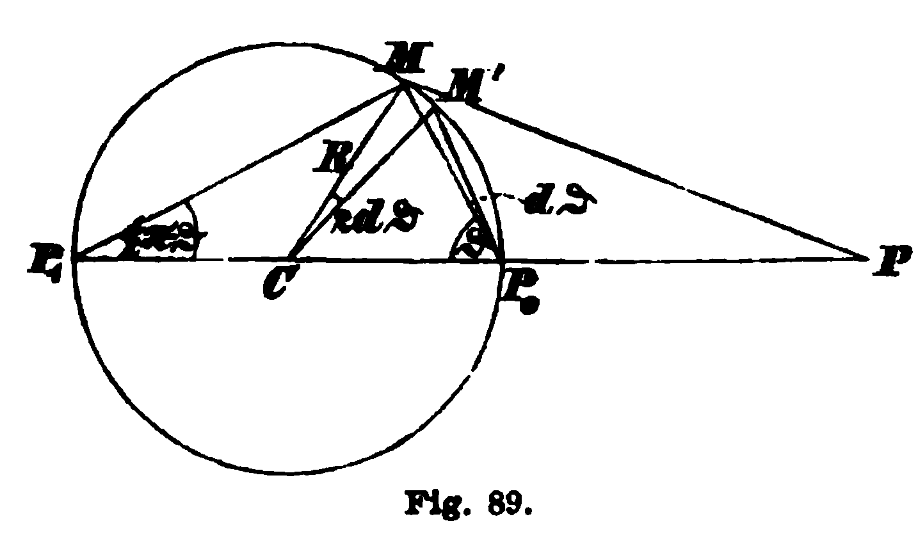


Fig. 89.

§. 9. Von besonderer Bedeutung für die Attractionstheorie ist das Problem **der Attraction des homogenen oder concentrisch geschichteten Ellipsoids nach dem Newton'schen Gesetze**, ein Problem, welches seit

Newton Gegenstand der tiefsten Studien der hervorragendsten Mathematiker geworden ist. Wir werden zunächst das Potential eines homogenen Ellipsoids, sowie die daraus folgenden Attractionscomponenten nach Dirichlet's Methode entwickeln und später eine synthetische Lösung dieser Aufgabe von Chasles für das concentrisch geschichtete Ellipsoid geben. Dirichlet's Methode gründet sich auf die Theorie des von ihm entdeckten Discontinuitätsfactors der vielfachen Integrale und findet sich in den Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1839, erschienen 1841, S. 61 der mathem. Abhandlungen (Ueber eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale von Lejeune Dirichlet, vorgel. am 14. Febr. 1839) nebst weiteren Ausführungen in Crelle's Journal Bd. 32, S. 88 (*Sur un moyen général de vérifier l'expression du potentiel relatif à une masse quelconque, homogène ou héterogène*). Vgl. auch Schlömilch, analytische Studien, Leipzig 1848, 1. Abth., S. 126.

1. Der Ausdruck

$$V = \varrho \int\int\int \frac{da\,db\,dc}{r}$$

ist das Potential des homogen gedachten Ellipsoids $\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} = 1$ in Bezug auf den Punkt (xyz), für welchen $r^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2$ ist, wenn das dreifache Integral über alle Elemente $da\,db\,dc$ des von der Fläche umschlossenen Raumes erstreckt wird. Die Ausführung dieser Integration findet aber darin bedeutende Schwierigkeiten, dass die Grenzen derselben von der Integrationsordnung abhängig und veränderlich sind. Um diesem misslichen Umstande vorzubeugen und die Grenzen auf constante Werthe zu bringen, multiplicirt man unter dem dreifachen Integralzeichen mit einem Factor $f(a, b, c)$, dessen Werth in jedem im Innern des Ellipsoids gelegenen anziehenden Punkte (abc) gleich 1, in jedem Punkte des nicht mit Masse erfüllten Aussenraumes aber gleich Null ist. Durch Zufügung dieses Factors werden die Elemente des Integrales, welche der anziehenden Masse zugehören, nicht geändert, während solche Elemente, welche Punkten des Aussenraumes entsprechen, unbedenklich zugefügt werden können, da der Factor $f(a, b, c)$ sie annullirt. Fügen wir sie zu, so können die Grenzen des Integrales von $-\infty$ bis ∞ ausgedehnt werden und wird

$$V = \varrho \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(a, b, c)\,\frac{da\,db\,dc}{r}.$$

Es kommt nun zunächst darauf an, einen solchen Factor $f(a, b, c)$, dem Dirichlet den Namen eines Discontinuitätsfactors gegeben hat, zu finden. Die Theorie der Fourier'schen Doppelintegrale liefert solche Factoren von beliebiger Menge und Beschaffenheit; für unseren Zweck genügt es, den einfachsten zu wählen, welcher zur Zeit, als Dirichlet seine Methode zuerst entwickelte, zugleich der einzig bekannte gewesen zu sein scheint. Er ist

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cos\sigma\varphi \cdot d\varphi\,.$$

Es wird dieser Ausdruck für alle Werthe von $\sigma < 1$ gleich 1, für Werthe $\sigma > 1$ aber Null. Man gelangt zu diesem Integrale leicht auf folgende Weise. Es ist, wie leicht gezeigt wird (vgl. Schlömilch, Compendium d. höh. Analysis I, §. 96)

$$\int_0^\infty \frac{\sin\psi}{\psi}\,d\psi = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Das etwas allgemeinere Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varkappa\psi}{\psi}\,d\psi = \int_0^\infty \frac{\sin\varkappa\psi}{\varkappa\psi}\,d(\varkappa\psi)$$

geht, wenn $\varkappa$ positiv ist, durch die Substitution $\varkappa\psi = \psi'$ in dasselbe mit dem Zeichen (+), für negative $\varkappa$ aber, wenn man $\varkappa\psi = -\psi'$ setzt, in das nämliche mit dem Zeichen (—) über und verschwindet für $\varkappa = 0$. Man hat daher

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varkappa\psi}{\psi}\,d\psi = \tfrac{1}{2}\pi,\ \ 0,\ \ -\tfrac{1}{2}\pi,$$

je nachdem $\varkappa$ positiv, Null oder negativ ist. Nun hat man weiter vermöge der Formel $2\sin m\psi\cos n\psi = \sin(m+n)\psi + \sin(m-n)\psi$ die Gleichung:

$$2\int_0^\infty \frac{\sin m\psi\cos n\psi}{\psi}\,d\psi = \int_0^\infty \frac{\sin(m+n)\psi}{\psi}\,d\psi + \int_0^\infty \frac{\sin(m-n)\psi}{\psi}\,d\psi.$$

Sind nun m und n positiv und ist $m > n$, so ist $m - n$ positiv und hat jedes der Integrale rechts den Werth $\frac{1}{2}\pi$; ist aber $m = n$, so ist die rechte Seite $\frac{1}{2}\pi + 0$, für $m < n$ aber ist sie $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi = 0$. Demnach hat

$$\int_0^\infty \frac{\sin m\psi\cos n\psi}{\psi}\,d\psi$$

die Werthe $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, 0, je nachdem $m \gtreqless n$, oder also $\frac{n}{m} \lesseqgtr 1$ ist. Setzt man noch $m\psi = \varphi$ und $\frac{n}{m} = \sigma$, so folgt, dass

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos\sigma\varphi\cdot d\varphi = 1,\ \tfrac{1}{2},\ 0,$$

je nachdem $\sigma \lesseqgtr 1$. Für unser Problem ist nun für alle der Masse des Ellipsoids angehörigen Punkte

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} \leqq 1,$$

für alle Punkte ausserhalb desselben aber wird dies Trinom > 1. Setzen wir also

$$\sigma = \frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2},$$

so stellt

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos\left(\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2}\right)\varphi\cdot d\varphi$$

einen Discontinuitätsfactor unsers Problems dar. Dass dieser Factor auf der Oberfläche des Ellipsoids den Werth $\frac{1}{2}$ hat, übt keinen Einfluss auf den Werth des Integrales aus. Es wird V nach Umkehrung der Integrationsordnung:

$$V = \frac{2\varrho}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2}\right)\varphi \cdot \frac{da\,db\,dc}{r}.$$

Nun ist $\cos\sigma\varphi$ die reelle Parthie von $e^{\sigma\varphi i} = \cos\sigma\varphi + i\sin\sigma\varphi$. Daher wird V die reelle Parthie des folgenden Ausdrucks V_1 sein, den wir, als den etwas bequemer zu behandelnden, weiter verfolgen wollen und aus welchem wir mit Leichtigkeit jeden Augenblick den Werth von V wieder herauslesen können, nämlich:

$$V_1 = \frac{2\varrho}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2}\right)\varphi i} \cdot \frac{da\,db\,dc}{r}.$$

Um dies Integral an andere bekannte Formen aus der Theorie der bestimmten Integrale anlehnen zu können, empfiehlt es sich, den Nenner r in den Exponenten zu bringen. Dies gelingt mit Hülfe der bereits von Euler aufgefundenen Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{e^{r^2\psi i}}{\sqrt{\psi}}\,d\psi = \frac{\sqrt{\pi}}{r}\,e^{\frac{1}{4}\pi i}. \;{}^{*)}$$

Entnimmt man aus ihr den Werth für $\frac{1}{r}$ und führt ihn in den Ausdruck für V_1 ein, so kommt:

$$V_1 = \frac{2\varrho e^{-\frac{1}{4}\pi i}}{\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi\sqrt{\psi}}\,d\varphi\,d\psi \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[\left(\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2}\right)\varphi + r^2\psi\right]i}\,da\,db\,dc$$

Indem man nun für r^2 seinen Werth

$(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2 = x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2$

einsetzt, zerfällt das innere dreifache Integral in drei Factoren

$$Q_x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[\left(\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}\right)a^2 - 2x\psi a\right]i}\,da,$$

$$Q_y = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[\left(\psi+\frac{\varphi}{\beta^2}\right)b^2 - 2y\psi b\right]i}\,db,$$

$$Q_z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[\left(\psi+\frac{\varphi}{\gamma^2}\right)c^2 - 2z\psi c\right]i}\,dc,$$

und den weiteren Factor $e^{(x^2+y^2+z^2)\psi i}$, welcher sich vorschiebt, sodass man hat

$$V_1 = \frac{2\varrho e^{-\frac{1}{4}\pi i}}{\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi\sqrt{\psi}}\,e^{(x^2+y^2+z^2)\psi i}\,Q_x Q_y Q_z\,d\varphi\,d\psi.$$

---

*) Vgl. Moigno, *leçons de calcul différentiel et de calcul intégral*, T. II, p. 309, Z. 2 v. u., woselbst $a = \frac{1}{2}$, $b = r^2$ und für $\Gamma(\frac{1}{2})$ sein Werth $\sqrt{\pi}$ zu setzen ist.

Nach einer anderen bekannten Formel ist aber

$$\int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{(hu^2 - 2ku)i} = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\, e^{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{k^2}{h}\right)i}; \text{*)}$$

mit Hülfe derselben findet man

$$Q_x Q_y Q_z \sqrt{\left(\psi + \frac{\varphi}{\alpha^2}\right)\left(\psi + \frac{\varphi}{\beta^2}\right)\left(\psi + \frac{\varphi}{\gamma^2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{4}\pi i}}{D}\, e^{-\left(\frac{x^2}{\psi + \frac{\varphi}{\alpha^2}} + \frac{y^2}{\psi + \frac{\varphi}{\beta^2}} + \frac{z^2}{\psi + \frac{\varphi}{\gamma^2}}\right)\psi^2 i}$$

und wenn man

$$S = \left(\frac{x^2}{\varphi + \alpha^2\psi} + \frac{y^2}{\varphi + \beta^2\psi} + \frac{z^2}{\varphi + \gamma^2\psi}\right)\psi$$

setzt,

$$V_1 = 2\varrho e^{\frac{1}{4}\pi i} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi\sqrt{\psi}} \frac{e^{S\varphi i}}{\sqrt{\left(\psi + \frac{\varphi}{\alpha^2}\right)\left(\psi + \frac{\varphi}{\beta^2}\right)\left(\psi + \frac{\varphi}{\gamma^2}\right)}}\, d\varphi\, d\psi.$$

Zur weiteren Vereinfachung führe man die Substitution $\frac{\varphi}{\psi} = s$ ein, sodass an die Stelle von ψ die Variabele s tritt, wodurch die Grenzen für s gleich ∞ und 0 werden, wofür wir mit Aenderung des Zeichens wieder 0 und ∞ schreiben. So ergibt sich

$$V_1 = 2\varrho e^{\frac{1}{4}\pi i} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi^2} \frac{e^{S\varphi i}}{\sqrt{\left(1 + \frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right)}}\, d\varphi\, ds,$$

worin S die Form

$$S = \frac{x^2}{\alpha^2 + s} + \frac{y^2}{\beta^2 + s} + \frac{z^2}{\gamma^2 + s}$$

angenommen hat.

Nach Umkehrung der Integrationsordnung erlangt V_1 die Gestalt:

$$V_1 = 2\varrho e^{\frac{1}{4}\pi i} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\left(1 + \frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right)}} \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi^2} e^{S\varphi i} d\varphi.$$

Der reelle Bestandtheil hiervon ist V; derselbe ist vermöge

$$e^{\frac{1}{2}\pi i} = \cos\tfrac{1}{2}\pi + i\sin\tfrac{1}{2}\pi = i,$$

und

$$e^{S\varphi i} = \cos S\varphi + i \sin S\varphi,$$

$$V = -2\varrho \int_0^\infty \frac{ds}{D} \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi^2} \sin S\varphi\, d\varphi,$$

---

*) Ebendas. p. 310 für $b = h$, $b\beta = -k$, $\sqrt{\frac{1}{2}(1+i)} = e^{\frac{1}{8}\pi i}$.

wo

$$D = \sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}$$

gesetzt ist.

Die Ausführung der inneren Integration wollen wir auf indirectem Wege bewerkstelligen, indem wir zunächst $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ bilden und aus diesen Grössen V zusammensetzen. Die Grösse S allein enthält die Coordinaten x, y, z des angezogenen Punktes und da $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{2x}{\alpha^2 + s}$, so ergibt sich:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -4\varrho x \int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha^2+s)D} \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cos S\varphi \, d\varphi$$

und zwei ähnliche Formeln finden sich für die anderen Derivirten von V nach y und z. Nun ist aber der Discontinuitätsfactor

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cos S\varphi\, d\varphi = \begin{matrix} \frac{1}{2}\pi \text{ für } S < 1 \\ 0 \text{ für } S > 1 \end{matrix};$$

um daher den Resultaten eine definitive Form zu geben, werden wir die weitere Untersuchung spalten und unterscheiden, ob der afficirte Punkt im inneren oder im äusseren Raume liegt.

Für einen inneren Punkt ist $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} < 1$, mithin auch

$$\frac{x^2}{\alpha^2+s} + \frac{y^2}{\beta^2+s} + \frac{z^2}{\gamma^2+s} < 1,$$

d. h. $S < 1$, weil s nur positive Werthe im Integrale annimmt. Daher werden für innere Punkte:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi\varrho x \int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha^2+s)D},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -2\pi\varrho y \int_0^\infty \frac{ds}{(\beta^2+s)D},$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi\varrho z \int_0^\infty \frac{ds}{(\gamma^2+s)D}.$$

Hiermit erhält man die Componenten X, Y, Z der Attraction, indem man diese Grössen mit $\mu\varepsilon$ multiplicirt. Es sind dieselben mithin den Coordinaten x, y, z proportional.

Für einen äusseren Punkt ist $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} > 1$. Nun ist dieser Ausdruck der Werth, den S für $s = 0$ annimmt und da S um so kleiner wird, je grösser s wird und für $s = \infty$ verschwindet (vorausgesetzt, dass x, y, z endlich sind), so folgt, dass es einen positiven Werth $s = \sigma$ gibt, aber auch nur einen, für welchen $S = 1$ wird. Es hat demnach die Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2+\sigma} + \frac{y^2}{\beta^2+\sigma} + \frac{z^2}{\gamma^2+\sigma} = 1$$

eine positive Wurzel und sie scheidet die Werthe $s < \sigma$, für welche $S > 1$ wird, von den Werthen $s > \sigma$, für welche $S < 1$ wird. Die Werthe $s < \sigma$ kommen bei den obigen Integralen für $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ nicht in Betracht, weil für sie wegen $S > 1$ der Discontinuitätsfactor verschwindet, es ist die Integration nach s vielmehr blos über alle s von $s = \sigma$ bis $s = \infty$ zu erstrecken. Demnach erhält man für einen äusseren Punkt:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi\varrho x \int_\sigma^\infty \frac{ds}{(\alpha^2 + s) D},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -2\pi\varrho y \int_\sigma^\infty \frac{ds}{(\beta^2 + s) D},$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi\varrho z \int_\sigma^\infty \frac{ds}{(\gamma^2 + s) D}.$$

Um nun das Potential V selbst aus seinen Derivirten zu bilden, haben wir zufolge des Satzes

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

für einen inneren Punkt:

$$dV = -\pi\varrho \int_0^\infty \left(\frac{2x\,dx}{\alpha^2 + s} + \frac{2y\,dy}{\beta^2 + s} + \frac{2z\,dz}{\gamma^2 + s}\right) \frac{ds}{D}$$

und mithin

$$V = \pi\varrho \int_0^\infty \left(C - \frac{x^2}{\alpha^2 + s} - \frac{y^2}{\beta^2 + s} - \frac{z^2}{\gamma^2 + s}\right) \frac{ds}{D}$$

und ähnlich für einen äusseren Punkt:

$$V = \pi\varrho \int_\sigma^\infty \left(C' - \frac{x^2}{\alpha^2 + s} - \frac{y^2}{\beta^2 + s} - \frac{z^2}{\gamma^2 + s}\right) \frac{ds}{D}.$$

Für Punkte der Oberfläche des Ellipsoids $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ müssen beide Ausdrücke für V zusammenfallen. Nun ist für diesen Fall $\sigma = 0$, wie die Vergleichung der Gleichung des Ellipsoids mit der Gleichung, welcher σ genügen muss, lehrt. Daher sind in dem zweiten Ausdruck für V hierfür die Integrationsgrenzen dieselben, wie im ersten und da x, y, z in beiden dieselben Werthe haben, so folgt, dass auch die Constanten C und C' dieselben Werthe haben müssen. Es genügt daher, C' zu bestimmen. Hierzu dient die Eigenschaft des Potentials, dass es im Unendlichen verschwindet. Nun wird für $x = y = z = \infty$ auch $\sigma = \infty$ und werden die untere und obere Grenze des Integrals für V unendlich gross. Das ganze Integral reducirt sich daher auf ein einziges Element, welches verschwinden muss. Dasselbe hat vermöge der Gleichung, welche σ bestimmt, den Factor $C' - 1$, dessen Werth allein von den unendlich gross werdenden x, y, z abhängt und der mithin das Verschwinden herbeiführen muss. Aus $C' - 1 = 0$ folgt aber $C' = 1$. Demnach ist der Werth des Potentials des Ellipsoids gefunden; er ist:

$$V = \pi\varrho \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2 + s} - \frac{y^2}{\beta^2 + s} - \frac{z^2}{\gamma^2 + s}\right) \frac{ds}{D},$$

oder

$$V = \pi\varrho \int_\sigma^\infty \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2 + s} - \frac{y^2}{\beta^2 + s} - \frac{z^2}{\gamma^2 + s}\right) \frac{ds}{D},$$

je nachdem der Punkt im Innern der Masse oder im Aussenraume liegt und wobei σ die positive Wurzel der Gleichung $\frac{x^2}{\alpha^2 + \sigma} + \frac{y^2}{\beta^2 + \sigma} + \frac{z^2}{\gamma^2 + \sigma} = 1$ ist.

2. Die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha^2 + s) D}, \quad \int_0^\infty \frac{ds}{(\beta^2 + s) D}, \quad \int_0^\infty \frac{ds}{(\gamma^2 + s) D},$$

welche in den Ausdrücken für $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ in Bezug auf einen inneren Punkt auftreten, hängen nicht von den absoluten Längen, sondern nur von den Verhältnissen $\alpha : \beta : \gamma$ der Halbaxen des anziehenden Ellipsoids ab. Denn setzt man z. B. in dem ersten von ihnen $s = \alpha^2 t$, so entsteht

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1 + t)\sqrt{(1 + t)\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} t\right)\left(1 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} t\right)}}.$$

So lange also die Verhältnisse der Axen dieselben bleiben, behalten diese Integrale dieselben Werthe und mithin auch die Attractionscomponenten X, Y, Z, welche ihnen proportional sind. Zwei Ellipsoide von denselben Axenverhältnissen sind aber ähnlich. Daher der Satz:

Zwei homogene concentrische ähnliche und ähnlich liegende Ellipsoide derselben Dichtigkeit ziehen einen inneren Punkt mit derselben Intensität und in derselben Richtung an. Hieraus folgt weiter: Eine homogene ellipsoidische Schicht, von zwei ähnlichen und concentrisch ähnlich liegenden Ellipsoiden begrenzt, übt auf einen Punkt ihres inneren Hohlraumes keine Wirkung aus.

Dieser Satz besteht auch fort, wenn die Schicht nicht homogen ist, sondern die Dichtigkeit so variirt, dass sie auf Ellipsoiden, welche den Grenzflächen ähnlich in ähnlicher Lage sind, constant ist.

3. Wird die Schicht unendlich dünn, so kann man die Attractionscomponenten für einen äusseren Punkt frei von Integralzeichen darstellen. Man hat nämlich zunächst, wenn man $s = \alpha^2 t$ setzt,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi\varrho x \int_{\frac{\sigma}{\alpha^2}}^\infty \frac{dt}{(1 + t)\sqrt{(1 + t)\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} t\right)\left(1 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} t\right)}};$$

für ein zweites ähnliches, dem ersten unendlich nahes Ellipsoid mögen α', β', γ' die Halbaxen sein, welche wir uns kleiner als α, β, γ denken wollen, sodass

$\alpha' = \alpha + d\alpha$, $\beta' = \beta + d\beta$, $\gamma' = \gamma + d\gamma$ und, wenn $1 - \lambda$ das Aehnlichkeitsverhältniss ist, wo λ unendlichklein, $\alpha + d\alpha = (1 - \lambda)\,\alpha$, also $d\alpha = -\lambda\alpha$ und ebenso $d\beta = -\lambda\beta$, $d\gamma = -\lambda\gamma$ wird. Denkt man sich $\frac{\partial V}{\partial x}$ für das zweite Ellipsoid hingeschrieben und von dem, dem ersten entsprechenden Werthe von $\frac{\partial V}{\partial x}$ abgezogen, so stellt die Differenz mit $\varepsilon\mu$ multiplicirt die Attractionscomponente X der Schicht dar. Auf der rechten Seite aber erscheint das Differential des Integrales nach α, welches die einzige darin enthaltene Axe ist, die sich ändert. Man hat daher:

$$X = -2\pi\varrho\varepsilon\mu x d\alpha\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\int\limits_{\frac{\sigma}{\alpha^2}}^{\infty}\frac{dt}{(1+t)\sqrt{(1+t)\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}t\right)\left(1+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}t\right)}}$$

$$= 2\pi\varrho\varepsilon\mu x\,\frac{1}{1+\frac{\sigma}{\alpha^2}}\cdot\frac{1}{D_\sigma}\,\frac{\partial\cdot\frac{\sigma}{\alpha^2}}{\partial\alpha}\cdot\lambda\alpha,$$

wenn D_σ den Werth von D für $s = \sigma$ bezeichnet.

Es ist aber $\frac{x^2}{\alpha^2+\sigma} + \frac{y^2}{\beta^2+\sigma} + \frac{z^2}{\gamma^2+\sigma} = 1$ oder

$$\frac{x^2}{1+\frac{\sigma}{\alpha^2}} + \frac{y^2}{\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\sigma}{\alpha^2}} + \frac{z^2}{\frac{\gamma^2}{\alpha^2}+\frac{\sigma}{\alpha^2}} = \alpha^2$$

und die Differentiation dieser Gleichung liefert, da $\frac{\beta^2}{\alpha^2}$, $\frac{\gamma^2}{\alpha^2}$ constant sind:

$$-\frac{\partial\cdot\frac{\sigma}{\alpha^2}}{\partial\alpha}\left(\frac{x^2}{\left(1+\frac{\sigma}{\alpha^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\sigma}{\alpha^2}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{\gamma^2}{\alpha^2}+\frac{\sigma}{\alpha^2}\right)^2}\right) = 2\alpha,$$

d. h. $\frac{\partial\cdot\frac{\sigma}{\alpha^2}}{\partial\alpha} = -\frac{2p^2}{\alpha^3}$, wenn $\frac{x^2}{(\alpha^2+\sigma)^2} + \frac{y^2}{(\beta^2+\sigma)^2} + \frac{z^2}{(\gamma^2+\sigma)^2} = \frac{1}{p^2}$.

Hiermit werden, wenn die analogen Entwickelungen für $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ durchgeführt werden:

$$X = -4\pi\mu\varepsilon\varrho x\cdot\frac{p^2}{\alpha^2+\sigma}\cdot\frac{\lambda}{D_\sigma},$$

$$Y = -4\pi\mu\varepsilon\varrho y\cdot\frac{p^2}{\beta^2+\sigma}\cdot\frac{\lambda}{D_\sigma},$$

$$Z = -4\pi\mu\varepsilon\varrho z\cdot\frac{p^2}{\gamma^2+\sigma}\cdot\frac{\lambda}{D_\sigma},$$

und folglich die Attractionskraft P selbst:

$$P = 4\pi\mu\varepsilon\varrho\,\frac{p\lambda}{D_\sigma}.$$

Dieses Resultat ist einer einfachen geometrischen Interpretation fähig. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2+\sigma}+\frac{y^2}{\beta^2+\sigma}+\frac{z^2}{\gamma^2+\sigma}=1$$

bedeutet nämlich ein durch den Punkt (xyz) gehendes Ellipsoid, dessen Halbaxen α', β', γ' durch die Relationen

$$\alpha'^2=\alpha^2+\sigma,\quad \beta'^2=\beta^2+\sigma,\quad \gamma'^2=\gamma^2+\sigma$$

gegeben sind, aus denen

$$\alpha'^2-\beta'^2=\alpha^2-\beta^2,\quad \beta'^2-\gamma'^2=\beta^2-\gamma^2,\quad \alpha'^2-\gamma'^2=\alpha^2-\gamma^2$$

folgt. Da die Quadratdifferenzen der Halbaxenpaare für dieses und das anziehende Ellipsoid dieselben sind, so haben beide Ellipsoide gleiche Excentricitäten und dieselben Brennpunkte der Hauptschnitte oder sind confocal. Die Gleichung der Tangentenebene an unser neues Ellipsoid im afficirten Punkte (xyz) ist nun

$$\frac{x}{\alpha^2+\sigma}\cdot\xi+\frac{y}{\beta^2+\sigma}\cdot\eta+\frac{z}{\gamma^2+\sigma}\cdot\zeta-1=0;$$

ihr Abstand vom Mittelpunkte ist daher die Grösse p und die Richtungscosinusse der Normalen im Punkte (xyz) sind $px:\alpha'^2$, $py:\beta'^2$, $pz:\gamma'^2$. Ferner ist

$$D_\sigma=\sqrt{\left(1+\frac{\sigma}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{\sigma}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{\sigma}{\gamma^2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\sqrt{(\alpha^2+\sigma)(\beta^2+\sigma)(\gamma^2+\sigma)}=\frac{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha\beta\gamma}.$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke werden

$$X=-4\pi\mu\varepsilon\varrho p\,\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}\cdot\frac{px}{\alpha'^2}\lambda,$$

$$Y=-4\pi\mu\varepsilon\varrho p\,\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}\cdot\frac{py}{\beta'^2}\lambda,$$

$$Z=-4\pi\mu\varepsilon\varrho p\,\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}\cdot\frac{pz}{\gamma'^2}\lambda,$$

$$P=4\pi\mu\varepsilon\varrho\,\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}\cdot p\lambda,$$

worin man noch die Masse der Schicht verwerthen kann. Sie ist

$$m=\tfrac{4}{3}\pi\varrho\,\alpha\beta\gamma\,[1-(1-\lambda)^3]=4\pi\varrho\,\alpha\beta\gamma\,\lambda.$$

Hiermit wird

$$P=\frac{\varepsilon\mu m p}{\alpha'\beta'\gamma'}.$$

Aus diesen Entwickelungen folgt der Satz:

Die Attractionskraft einer unendlich dünnen, zwischen zwei ähnlichen, concentrisch und ähnlich liegenden Ellipsoiden enthaltenen homogenen Schicht in Bezug auf einen äusseren Punkt hat die Richtung der Normalen an das durch diesen Punkt gelegte, mit der äusseren Grenzfläche der Schicht confocale Ellipsoid und ist der Masse der anziehenden Schicht und dem Abstande der Tangentenebene jenes Ellipsoids im angezogenen Punkte vom Mittelpunkte der Schicht proportional.

Die Niveauflächen der Attraction der Schicht sind mithin die mit ihrer Aussenfläche confocalen Ellipsoide. Die Aussenfläche selbst ist daher eine Niveaufläche. Für einen Punkt auf ihr sind α', β', γ'

gleich α, β, γ und kann man noch in dem Ausdrucke für P die Grösse $p\lambda$ durch die Dicke δ der Schicht in der Richtung der Normalen ersetzen, wie man leicht aus der Aehnlichkeit der Begrenzungsflächen erkennt. Sind nämlich r, s die Radienvectoren der äusseren und inneren Grenzfläche, welche die Richtung vom Mittelpunkte nach dem angezogenen Punkte haben, so ist $p : \delta = r : (r - s)$. Vermöge der Aehnlichkeit der Grenzfläche n ist aber $r : (r - s) = 1 : \lambda$, also $p : \delta = 1 : \lambda$ oder $p\lambda = \delta$. Hiermit wird $P = 4\pi\mu\varepsilon\varrho\delta$. Die Attraction der Schicht in Bezug auf einen Punkt ihrer äusseren Grenzfläche ist der Dicke der Schicht in der Richtung ihrer Normalen im angezogenen Punkte proportional.

4. Das Potential eines Ellipsoids, wie einer zwischen ähnlichen Ellipsoiden enthaltenen Schicht kann durch elliptische Integrale dargestellt werden. Wir werden dies nicht ausführen, sondern verweisen in dieser Hinsicht auf Legendre, *Traité des fonctions elliptiques*, T. I, p. 539, sowie Sturm, *Cours de mécanique de l'école polytechnique*, T. I, p. 97.

Für die ellipsoidischen Rotationsflächen gehen diese elliptischen Integrale in Kreisfunctionen, Logarithmen und algebraische Functionen über. Ausführlich über diese Fälle handelt Moigno, *Leçons de mécanique analytique; statique*, p. 477—498, sowie Legendre a. a. O. — Für das dreiaxige Ellipsoid, dessen Axen wenig von einander verschieden sind, gibt Schlömilch die positive Wurzel σ der obigen Gleichung und damit die Componenten der Attraction für einen äusseren Punkt (Schlömilch, Zeitschr. f. Mathem. u. Physik, B. XV, p. 216 und mit einer nothwendigen Correction p. 388).

5. Das Problem der Attraction des Ellipsoids ist durch die Schwierigkeiten berühmt geworden, welche es der Lösung entgegensetzte. Dieselbe wurde von Newton und Maclaurin auf synthetischem Wege gesucht, allein vergebens strebte man darnach, die schönen Einzelresultate des letzteren zu einer vollständigen Lösung auf analytischem Wege zu verallgemeinern (D'Alembert, *Opuscules mathématiques*, T. VI u. VII und Lagrange, *Mém. de l'Académie de Berlin*, 1773, 1774, 1775 und 1795), bis sie endlich Legendre (*Mém. des savants étrangers*, T. X, 1783) und Laplace (*Mécanique céleste*, T. II, livre 3) gelang. Seit dieser Zeit war man der merkwürdigen Ansicht, dass das Problem einer synthetischen Behandlung überhaupt unzugänglich sei und Legendre und Poisson sprachen sich in diesem Sinne etwas voreilig und entschieden aus (*Mém de l'Acad. des sciences*, 1788 und 1834); Chasles widerlegte glänzend diese Meinung, indem er 1838 eine vollkommen synthetische Lösung gab (*Comptes rendus de l'Acad. des sciences*, T. VI, p. 902 (25. Juin); *Rapport de M. Poinsot*, T. VI, p. 808 (11. Juin); als Vorläufer *Journal de l'école polytechn.*, Cah. 25, p. 244 u. 266) (1837). Wir geben im Folgenden eine Bearbeitung der Chasles'schen Synthese und folgen dabei der Redaction seiner Arbeit, die er in Liouville's *Journal de mathém.*, T. V (1840) unter dem Titel: „*Nouvelle solution du problème de l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène sur un point extérieur*" publicirt hat. Er knüpft darin an die Betrachtungen Newton's und Maclaurin's an.

Wir beginnen mit dem Newton'schen Satze über die Wirkung einer homogenen oder concentrisch geschichteten, zwischen zwei ähnlichen und concentrisch ähnlich liegenden Ellipsoiden enthaltenen Masse auf einen Punkt des inneren Hohlraumes. Ein unendlich schmaler Kegel (Fig. 90), dessen Mittelpunkt der afficirte Punkt P ist, schneidet aus der zunächst unendlich dünn gedachten Schicht zwei unendlich kleine Volumina dv, dv' aus, welche dem durch P gehenden Strale

anliegen, der die äussere Grenzfläche in m, m', die innere in n, n' trifft. Das Volumen dv an nm ist unendlich wenig verschieden von dem Volumen, welches der Kegel aus einer mit den Radien Pn, Pm um P beschriebenen Kugelschicht herausschneidet; ebenso verhält es sich mit dv' an $n'm'$. Ist $d\sigma$ das Mass des Winkelraumes im Kegel, d. h. das Kugelflächenelement, welches der Kegel in der Einheit der Entfernung bestimmt, so hat man

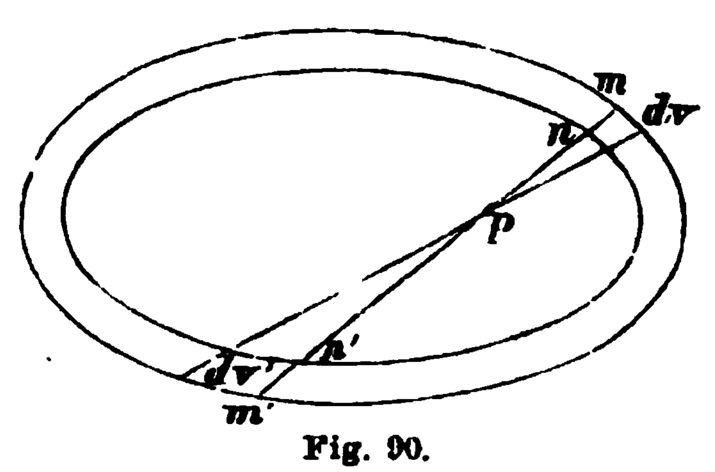


Fig. 90.

$$dv = \overline{Pm}^2 \cdot d\sigma \cdot mn,$$

$$dv' = \overline{Pm'}^2 \cdot d\sigma \cdot m'n'$$

und wenn ϱ die Dichtigkeit der ellipsoidischen Schicht darstellt, so sind

$$\frac{\varepsilon\mu\varrho\, dv}{\overline{Pm}^2} = \varepsilon\mu\varrho \cdot mn \cdot d\sigma \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon\mu\varrho\, dv'}{\overline{Pm'}^2} = \varepsilon\mu\varrho \cdot m'n' \cdot d\sigma$$

die Kräfte, mit welchen die Masse μ in P von den Massen ϱdv, $\varrho dv'$ der beiden kleinen Volumina längs der Linie mm' in entgegengesetztem Sinne afficirt wird. Wir werden aber sogleich zeigen, dass $mn = m'n'$ ist und dass diese Kräfte mithin sich Gleichgewicht halten. Da dasselbe von je zwei Massenelementen ϱdv, $\varrho dv'$ der Schicht gilt, deren Verbindungslinie durch P geht, so folgen die Newton'schen Sätze (*Philosophiae naturalis principia math.*, lib. I, sect. XIII, *de corporum non sphaericorum viribus attractivis*, prop. XCI, probl. XLV (ed. Th. Le Seur et Jacquier 1760, p. 511—520), nämlich zunächst:

Eine homogene, zwischen zwei concentrischen ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoiden enthaltene unendlich dünne Schicht übt auf einen Punkt ihres inneren Hohlraumes keine Wirkung aus.

Indem man solcher Schichten unendlich viele bis zu einer Schicht von endlicher Dicke übereinander lagert, folgt weiter:

Eine zwischen zwei ähnlichen, concentrischen und ähnlich liegenden Ellipsoiden enthaltene Schicht von endlicher Dicke und constanter oder auf concentrisch ähnlich liegenden Schalen constanter Dichtigkeit übt auf einen Punkt des Hohlraumes keine Wirkung aus.

Der zum Beweise herangezogene Satz, dass zwei ähnliche, concentrisch liegende Ellipsoide jede Transversale so schneiden, dass die zwischen die Grenzflächen fallenden Strecken gleich sind, folgt so. Man lege durch den Mittelpunkt C (Fig. 91) der Schicht und die Transversale mm' eine Ebene und ziehe in ihr den zu nn' conjugirten Diameter CD; er halbirt die Sehne nn' des inneren elliptischen Schnittes in D. Man ziehe ferner Cn, Cn', wodurch auf der äusseren Schnittellipse der Schicht die homologen Punkte der Aehnlichkeit N, N' zu n, n' gefunden werden, deren Verbindungslinie NN' homolog

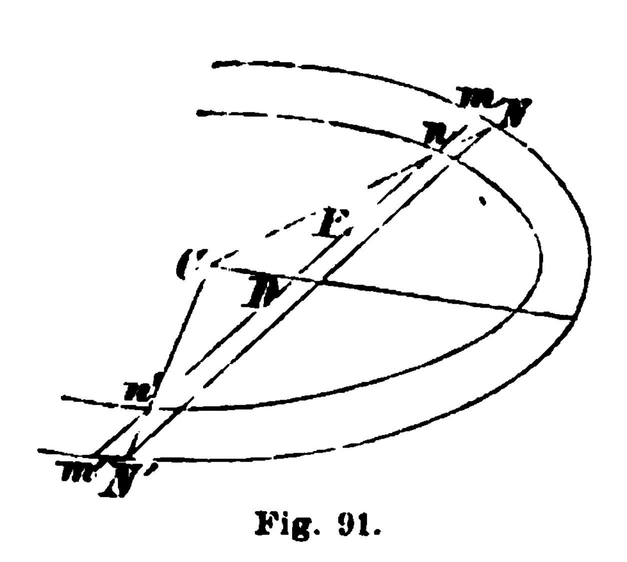


Fig. 91.

zu nn' und wegen der ähnlichen Lage der Figurensysteme parallel mit nn' ist. Es wird daher auch NN' von jenem Diameter halbirt, d. h. er ist auch für die äussere Ellipse zu der Richtung der Transversalen mm' conjugirt und wird folglich auch mm' von ihm halbirt; daher ist $Dm - Dn = mn = Dm' - Dn' = m'n'$.

Die weiteren Entwickelungen gründen sich auf die projectivische Verwandtschaft zweier Räume, welche die Affinität genannt wird. Wir nehmen drei rechtwinklige Axen als Coordinatenaxen an und bestimmen zu jedem Punkte (xyz) einen anderen $(x'y'z')$, sodass $x' = \varkappa x$, $y' = \varkappa' y$, $z' = \varkappa'' z$ wird, wo $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ drei absolute Zahlen bedeuten. Dadurch werden zwei Räume eindeutig aufeinander bezogen, d. h. so, dass jedem Punkte (xyz) des einen ein einziger bestimmter Punkt $(x'y'z')$ des anderen Raumes entspricht und umgekehrt. Diese räumlichen Systeme sind nicht ähnlich, vielmehr würden sie dies erst, wenn $\varkappa = \varkappa' = \varkappa''$ gesetzt würde. Sie sind vielmehr durch folgende Umstände ausgezeichnet.

1. Einem unendlich fernen Punkte des einen Raumes entspricht ein unendlich ferner Punkt des anderen.

2. Allen Punkten (xyz) einer Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ entsprechen Punkte einer Ebene

$$\frac{A}{\varkappa} x' + \frac{B}{\varkappa'} y' + \frac{C}{\varkappa''} z' + D = 0$$

und mithin allen Punkten einer Geraden, als der Durchschnittslinie zweier Ebenen, wiederum die Punkte einer Geraden, nämlich die der Schnittlinie der beiden homologen Ebenen. Die Punktreihen zweier homologer Geraden sind ähnlich, aber das Aehnlichkeitsverhältniss variirt mit der Lage der Geraden. In den Coordinatenebenen und in der unendlich fernen Ebene fallen homologe Ebenen zusammen.

3. Der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ entspricht das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{(\varkappa a)^2} + \frac{y^2}{(\varkappa' a)^2} + \frac{z^2}{(\varkappa'' a)^2} = 1.$$

4. Dem Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ entspricht ein anderes Ellipsoid

$$\frac{x'^2}{(\varkappa a)^2} + \frac{y'^2}{(\varkappa' b)^2} + \frac{z'^2}{(\varkappa'' c)^2} = 1.$$

5. Sind zwei Ellipsoide ähnlich, z. B.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = n^2,$$

so sind auch ihre homologen Ellipsoide

$$\frac{x'^2}{(\varkappa a)^2} + \frac{y'^2}{(\varkappa' b)^2} + \frac{z'^2}{(\varkappa'' c)^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x'^2}{(\varkappa a)^2} + \frac{y'^2}{(\varkappa' b)^2} + \frac{z'^2}{(\varkappa'' c)^2} = n^2$$

ähnlich und zwar nach demselben Aehnlichkeitsverhältnisse n.

6. Homologe Volumina stehen in constantem Verhältniss. Denn es ist

$$dx'dy'dz' = \varkappa\varkappa'\varkappa''\, dx\, dy\, dz, \quad \text{also} \quad \frac{\Sigma\, dx'dy'dz'}{\Sigma\, dx\, dy\, dz} = \varkappa\varkappa'\varkappa''.$$

7. Nimmt man die Verhältnisszahlen $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ so an, dass die beiden homologen Ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x'^2}{(\varkappa a)^2} + \frac{y'^2}{(\varkappa' b)^2} + \frac{z'^2}{(\varkappa'' c)^2} = 1$$

confocal werden, d. h. dass ihre Hauptschnitte dieselben Brennpunkte besitzen, welche Bedingung durch $\varkappa^2 a^2 - a^2 = \varkappa'^2 b^2 - b^2 = \varkappa''^2 c^2 - c^2$ ausgesprochen wird, so werden die Quadratdifferenzen der Halbaxen zweier ihnen ähnlicher und sich homologer Ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=n^2 \text{ und } \frac{x'^2}{(\varkappa a)^2}+\frac{y'^2}{(\varkappa' b)^2}+\frac{z'^2}{(\varkappa'' c)^2}=n^2$$

ebenfalls gleich, nämlich:

$$n^2(\varkappa^2 a^2-a^2)=n^2(\varkappa'^2 b^2-b^2)=n^2(\varkappa''^2 c^2-c^2)$$

und sind die beiden letzteren Ellipsoide gleichfalls confocal. Um $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ der Bedingung gemäss zu bestimmen, dass zwei Ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}=1$$

von den Halbaxen a, b, c und a', b', c' homolog werden, hat man $\varkappa a=a'$, $\varkappa' b=b'$, $\varkappa'' c=c'$, also $\varkappa=\frac{a'}{a}$, $\varkappa'=\frac{b'}{b}$, $\varkappa''=\frac{c'}{c}$ zu setzen und wenn sie confocal sein sollen, so sind die Bedingungen $a'^2-a^2=b'^2-b^2=c'^2-c^2$ zu erfüllen.

8. Es seien M, N zwei Punkte des einen und M', N' die ihnen homologen Punkte des anderen zweier affiner, confocaler Ellipsoide, dann ist $MN'=M'N$. Man hat nämlich, wenn x, y, z und ξ, η, ζ die Coordinaten von M und N, x', y', z'; ξ', η', ζ' die von M', N' sind:

$$\overline{MN'}^2=(\xi'-x)^2+(\eta'-y)^2+(\zeta'-z)^2,$$
$$\overline{M'N}^2=(\xi-x')^2+(\eta-y')^2+(\zeta-z')^2;$$

mithin, wenn man $\xi'=\varkappa\xi$, $\eta'=\varkappa'\eta$, $\zeta'=\varkappa''\zeta$, $x'=\varkappa x$, $y'=\varkappa' y$, $z'=\varkappa'' z$ einführt und subtrahirt:

$$\overline{MN'}^2-\overline{M'N}^2=\left(\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}\right)(a'^2-a^2)+\left(\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)(b'^2-b^2)+\left(\frac{\zeta^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)(c'^2-c^2),$$

d. h. da $a^2-a'^2=b^2-b'^2=c^2-c'^2$ ist,

$$\overline{MN'}^2-\overline{M'N}^2=(a^2-a'^2)\left[\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}\right)-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\right]=0,$$

indem (xyz) und $(\xi\eta\zeta)$ Punkte des Ellipsoides $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ sind. Folglich ist $MN'=M'N$.

Dieser Satz rührt von Ivory her; er nennt die homologen Punkte der confocalen Ellipsoide „correspondirende Punkte" beider.

Es seien (Fig. 92) (AB) und $(A'B')$ zwei unendlich dünne Schichten, beide von ähnlichen Ellipsoiden begrenzt und zwar so, dass ihre äusseren und ihre inneren Grenzflächen A, A' und B, B' confocal sind. Sind dann P, P' zwei homologe feste Punkte der äusseren Grenzflächen, m, m' zwei correspondirende laufende Punkte derselben und dv, dv' die ihnen anliegenden homologen Volumenelemente, so hat man, wenn a, b, c; a', b', c' die Halbaxen der äusseren Grenzflächen sind, $\varkappa=\frac{a'}{a}$, $\varkappa'=\frac{b'}{b}$, $\varkappa''=\frac{c'}{c}$ und folglich nach Nr. 6: $\frac{dv}{dv'}=\frac{abc}{a'b'c'}$. Weil $mP'=m'P$ ist, so hat man weiter, wenn ϱ, ϱ' die Dichtigkeiten der Schichten bezeichnen:

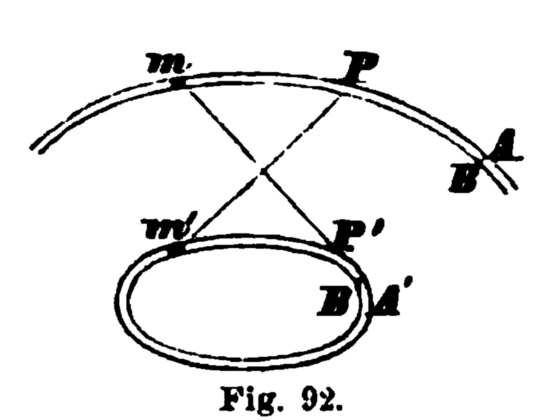


Fig. 92.

$$\frac{\varrho\, dv}{mP'}:\frac{\varrho' dv'}{m'P}=\frac{\varrho abc}{\varrho' a'b'c'}$$

und folglich, wenn man durch die ganzen Schichten hindurch summirt:

$$\Sigma \frac{\varrho\, dv}{m P'} : \Sigma \frac{\varrho' dv'}{m' P} = \frac{\varrho a b c}{\varrho' a' b' c'}.$$

$abc : a'b'c'$ ist das Verhältniss der Volumina und $\varrho abc : \varrho' a' b' c'$ folglich das Verhältniss der Massen der Schichten. Die vorstehende Gleichung sagt daher aus:

Die Potentiale V, V' zweier unendlich dünner ellipsoidischer Schichten (AB), $(A'B')$ von constanten Dichtigkeiten ϱ, ϱ', begrenzt von ähnlichen und ähnlich liegenden concentrischen Ellipsoiden, deren äussere Grenzflächen A, A', wie ihre inneren B, B' unter sich confocal sind, in Bezug auf zwei homologe Punkte P, P' der Affinität ihrer äusseren Grenzflächen, sodass V sich auf P' und V' auf P bezieht, stehen im Verhältniss der Massen der Schichten.

Die Verallgemeinerung dieses Satzes für ein beliebiges Anziehungsgesetz gab Amsler [Crelle's Journal Bd. 42, S. 314 (1848)].

Es sei die Schicht $A'B'$ von der Schicht AB umschlossen; nach dem Newtonschen Satze übt die Schicht AB auf den inneren Punkt P' keine Wirkung aus; daher sind die Derivirten des Potentials $\Sigma \frac{\varrho\, dv}{m P'}$, nach den Coordinaten dieses Punktes genommen, Null und ist mithin dies Potential constant. Hieraus folgt, dass auch das Potential $\Sigma \frac{\varrho' dv'}{m' P}$ der Schicht $(A'B')$ in Bezug auf P constant sein müsse, wo auch immer P auf der Fläche A liegen möge, d. h.:

Für eine unendlich dünne zwischen zwei ähnlichen Ellipsoiden enthaltene Schicht von constanter Dichtigkeit ist das Potential in Bezug auf einen äusseren Punkt constant für alle Punkte eines mit der äusseren Grenzfläche der Schicht confocalen Ellipsoids. Das System aller mit der äusseren Grenzfläche confocalen Ellipsoide ist daher das System der Niveauflächen für die Attraction der Schicht und die Richtung der Attractionskraft der Schicht ist die Normale des durch den afficirten Punkt hindurchgehenden, mit der äusseren Grenzfläche confocalen Ellipsoids. Die äussere Grenzfläche ist selbst eine Niveaufläche.

Es seien (Fig. 93) (AB), $(A'B')$, $(A''B'')$ drei Schichten von der Beschaffenheit, wie die vorigen, m, m', m''; P, P', P'' homologe Punkte ihrer Aussenflächen, dv, dv', dv'' die homologen Volumenelemente an m, m', m''; ϱ, ϱ', ϱ'' die Dichtigkeiten der Schichten und werde angenommen, dass die Schicht (AB) die beiden anderen umschliesse. Unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungsweise hat man dann:

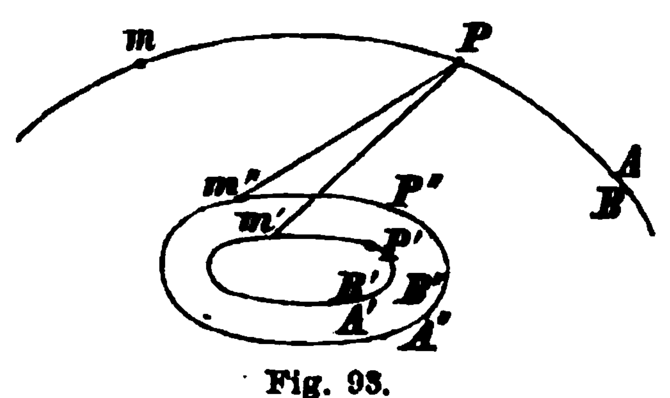


Fig. 93.

$$\Sigma \frac{\varrho' dv'}{m' P} = \frac{\varrho' a' b' c'}{\varrho a b c} \Sigma \frac{\varrho\, dv}{m P'}$$

$$\Sigma \frac{\varrho'' dv''}{m'' P} = \frac{\varrho'' a'' b'' c''}{\varrho a b c} \Sigma \frac{\varrho\, dv}{m P''}.$$

Da aber P' und P'' beide innere Punkte für die Schicht AB sind, so ist:

$$\Sigma \frac{\varrho\, dv}{m P'} = \Sigma \frac{\varrho\, dv}{m P''};$$

daher erhält man die Proportion:

$$\Sigma \frac{\varrho' dv'}{m' P} : \Sigma \frac{\varrho'' dv''}{m'' P} = \frac{\varrho' a' b' c'}{\varrho'' a'' b'' c''},$$

d. h. die Potentiale zweier unendlich dünner ellipsoidischer Schichten von constanten Dichtigkeiten, begrenzt von ähnlichen Ellipsoiden mit confocalen Aussenflächen in Bezug auf einen äusseren Punkt stehen im Verhältniss der Massen dieser Schichten.

Sind daher x, y, z wie früher die Coordinaten des angezogenen Punktes P in Bezug auf die Hauptaxen der Schichten, so erhält man für die Componenten X', Y', Z'; X'', Y'', Z'' der Attractionskräfte P', P'':

$$X' = \varepsilon\mu \frac{\partial \Sigma \frac{\varrho' dv'}{m' P}}{\partial x}, \quad Y' = \varepsilon\mu \frac{\partial \Sigma \frac{\varrho' dv'}{m' P}}{\partial y}, \quad Z' = \varepsilon\mu \frac{\partial \Sigma \frac{\varrho' dv'}{m' P}}{\partial z},$$

$$X'' = \varepsilon\mu \frac{\partial \Sigma \frac{\varrho'' dv''}{m'' P}}{\partial x}, \quad Y'' = \varepsilon\mu \frac{\partial \Sigma \frac{\varrho'' dv''}{m'' P}}{\partial y}, \quad Z'' = \varepsilon\mu \frac{\partial \Sigma \frac{\varrho'' dv''}{m'' P}}{\partial z},$$

sowie für diese Kräfte $P' = \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}$, $P'' = \sqrt{X''^2 + Y''^2 + Z''^2}$, mithin mit Rücksicht auf die vorstehende Gleichung:

$$X' : X'' = Y' : Y'' = Z' : Z'' = P' : P'' = \varrho' a' b' c' : \varrho'' a'' b'' c'',$$

d. h. die Intensitäten der Attractionskräfte, mit welchen die beiden Schichten auf einen äusseren Punkt wirken, stehen im Verhältniss der Massen beider Schichten.

Von den beiden zuletzt aufgestellten Sätzen bestimmt der erste die Richtung und kann der zweite dazu dienen, die Intensität der Attraction einer Schicht bezüglich eines äusseren Punktes zu bestimmen. Die Richtung ist für alle Schichten der Art dieselbe.

Indem man unendlich dünne Schichten übereinander lagert, gelangt man zu dem, dem letzten Satze entsprechenden Satze für Schichten von endlicher Dicke. Es seien A, A' zwei confocale Ellipsoide, man zerlege sie beide in unendlich dünne Schichten, von denen jede zwischen ähnlichen Ellipsoiden enthalten ist; a, b, c; a', b', c' seien die Halbaxen beider Ellipsoide. Die Halbaxen der äusseren Grenzfläche einer Schicht des einen seien na, nb, nc; die einer Schicht des anderen na', nb', nc'. Ertheilt man n für beide denselben Werth, so bleiben ihre Grenzflächen confocal und ihre Attractionskräfte in Bezug auf einen äusseren Punkt und deren Componenten stehen im Verhältniss $\frac{\varrho abc}{\varrho' a' b' c'}$ ihrer Massen. Die Grössen ϱ, ϱ' können dabei mit n variiren. Aehnliches gilt für die beiden nächstfolgenden Schichten, ebenso für die weiteren. Bleibt nun das Verhältniss $\varrho : \varrho'$ constant, während beide Grössen selbst veränderlich sein können, so stehen die Componentensummen der Attraction, welche von einer Reihe solcher entsprechender Schichtenpaare herrühren, in demselben Verhältnisse, also auch schliesslich wieder die Gesammtattractionskräfte selbst. Dies Verhältniss ist aber zugleich das der Massen der beiden Schichten von endlicher Dicke, welche durch die beiden Schichtenreihen gebildet werden. Daher also der Satz:

Die Attractionskräfte, welche zwei ähnliche ellipsoidische Schichten endlicher Dicke auf einen äusseren Punkt ausüben, stehen im Verhältniss von deren Massen.

Für zwei volle Ellipsoide wurde dieser Satz von Maclaurin zuerst aufgestellt.

Den Satz über die Richtung der Attractionskraft einer unendlich dünnen

Schicht in Bezug auf einen äusseren Punkt hat Poisson (*l'Institut*, 12. Oct. 1833; *Mémoires de l'Acad. des sciences*, T. XIII.) in einer anderen Fassung aufgestellt und Steiner gab dafür einen synthetischen Beweis (Crelle's Journ. d. Math. Bd. XII, S. 141, 1834), wie folgt:

Die Richtung der Attractionskraft einer unendlich dünnen homogenen ellipsoidischen Schicht in Bezug auf einen äusseren Punkt ist die Axe des Kegels, welcher diesen Punkt zum Mittelpunkte hat und der äusseren Grenzfläche der Schicht umschrieben ist.

Der Steiner'sche Beweis gründet sich auf folgenden Satz: Wenn PA, PB (Fig. 94) die Ellipse $ACFB$ in A, B berühren, die Gerade PQ ihren Winkel halbirt und die Berührungssehne AB in Q schneidet, so bildet PQ gleiche Winkel mit je zwei Geraden PC, PD, welche nach den Schnittpunkten einer beliebigen, durch Q gelegten Geraden mit der Ellipse hinlaufen. Ist nämlich PR senkrecht zu PQ, so sind PA, PB; PQ, PR vier harmonische Stralen, weil PQ, PR die Winkel von PA, PB halbiren. Daher sind die Punkte A, B; Q, R harmonisch. Ferner sind, weil P der Pol von AB ist, F, G; Q, P harmonisch. Daher ist PR die Polare von Q oder der Ort aller diesem harmonischen Punkte E zu Q; C, D auf allen durch Q gehenden Geraden DE. Deshalb sind PQ, PE; PC, PD harmonische Stralen und da zwei zugeordnete PQ, PE von ihnen zu einander rechtwinklig sind, so halbiren sie die Winkel der beiden anderen PC, PD.

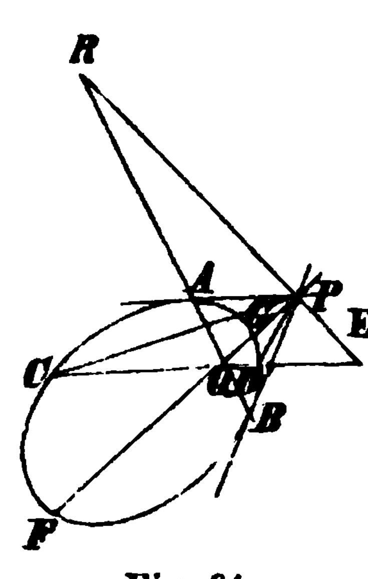


Fig. 94.

Legt man nun durch die Hauptaxe des umschriebenen Kegels, welche in den Innenraum desselben fällt, und irgend einen Punkt C auf der äusseren Grenzfläche der Schicht eine Ebene, welche die äussere Fläche in einer Ellipse $ACBD$, den Kegel in zwei diese berührenden Stralen PA, PB und die Ebene der Berührungscurve in der Sehne AB schneiden wird, so bestimmt die Kegelaxe auf letzterer den Punkt Q, sodass PQ mit PC, PD gleiche Winkel bildet. Denkt man man sich nun Q als Mittelpunkt eines unendlich schmalen Kegels, welcher bei C und D aus der ellipsoidischen Schicht zwei kleine Volumina dv, dv' ausschneidet, so sind die Attractionskräfte p, p' ihrer Massen ϱdv, $\varrho dv'$:

$$p = \frac{\varepsilon\mu\varrho dv}{\overline{QC}^2}, \quad p' = \frac{\varepsilon\mu\varrho dv'}{\overline{QD}^2}.$$

Nach dem Newton'schen Satze sind diese Kräfte gleich und ist folglich

$$\frac{dv}{\overline{QC}^2} = \frac{dv'}{\overline{QD}^2}.$$

Nun ist aber vermöge des oben angezogenen Satzes $QC : QD = PC : PD$, also auch:

$$\frac{\varepsilon\mu\varrho dv}{\overline{PC}^2} = \frac{\varepsilon\mu\varrho dv'}{\overline{PD}^2}.$$

Diese Grössen sind aber die Kräfte, mit welchen die Elemente der Schicht bei C und D den Punkt P anziehen; mithin fällt ihre Resultante in die Halbirungslinie von PC und PD, d. h. in die Hauptaxe PQ des Kegels.

Der Beweis ergibt zugleich noch den Satz:

Eine beliebige durch Q gehende Ebene zerlegt die Schicht in zwei Theile, welche auf P gleiche Anziehung ausüben.

Wir schreiten nun zur Bestimmung der Anziehung einer unendlich dünnen

ellipsoidischen Schicht in Bezug auf einen Punkt ihrer äusseren Grenzfläche, auf welches Problem das der Anziehung für einen äusseren Punkt leicht zurückgeführt werden kann.

Diese Grenzfläche ist eine Niveaufläche der Schicht und mithin hat die Kraft in irgend einem ihrer Punkte P (Fig. 95) die Richtung der Normalen dortselbst. Um die Intensität zu finden, betrachten wir P als die Spitze eines gegen die Dicke der Schicht unendlich dünnen Kegels, welcher aus der Schicht zwei unendlich kleine anziehende Volumina bei Pn und $n'm'$ herausschneidet. Um P beschreiben wir mit der Einheit als Radius eine Kugelfläche; sie bestimmt in dem Kegel ein sphärisches Flächenelement $d\sigma$, welches gegen die Dicke der Schicht unendlich klein ist. In der Entfernung r von P liegt nun im Kegel ein Volumenelement $r^2 d\sigma dr$ von der Masse $\varrho r^2 d\sigma dr$, dessen Anziehung auf P gleich $\varepsilon\mu\varrho d\sigma dr$ ist. Die Summe aller dieser Attractionen, welche die gemeinschaftliche Richtung Pm' haben, durch die Längen Pn und $n'm'$ hindurch integrirt, ist die Attractionskraft der auf dem Strale Pm' liegenden Massentheile der Schicht; sie ist demnach $\varepsilon\mu\varrho d\sigma \cdot (Pn + n'm')$ oder da $n'm' = Pn$ ist: $2\varepsilon\mu\varrho d\sigma \cdot Pn$. Von dieser Kraft brauchen wir nur die Componente längs der Normalen der Aussenfläche der Schicht, nämlich

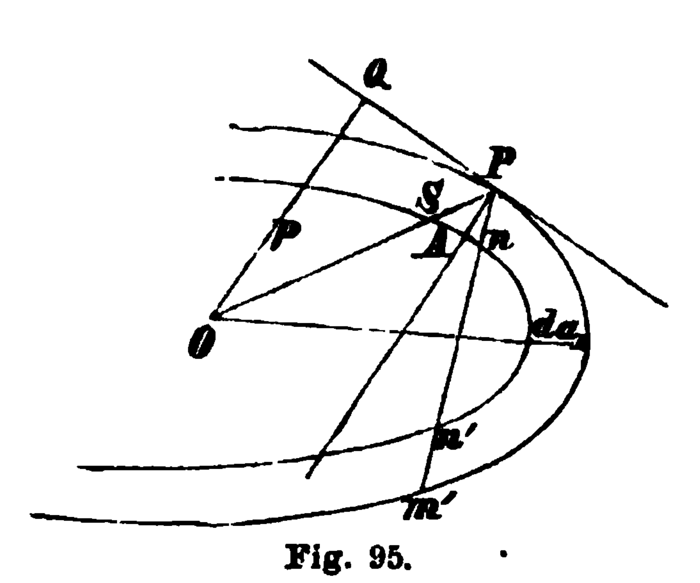


Fig. 95.

$$2\varepsilon\mu\varrho d\sigma \cdot Pn \cos(nPA),$$

indem die Totalattraction die Richtung der Normalen hat und sich folglich alle tangentiellen Componenten tilgen. Da aber die Dicke PA der Schicht unendlich klein ist, so ist dies auch mit dem Dreieck PAn der Fall, welche Richtung auch immer Pn haben möge; es ist daher An immer unendlich klein und da es senkrecht auf PA steht, $\cos(nPA) = \frac{PA}{Pn}$. Hierdurch wird die fragliche Componente $2\varepsilon\mu\varrho d\sigma \cdot PA$. Um nun hieraus die Summe aller ähnlichen Componenten für die Massen, welche längs den verschiedenen Stralen Pm' in der Schicht enthalten sind, d. h. die Gesammtattraction der Masse der Schicht zu finden, hat man diesen Ausdruck über die Halbkugel hinweg zu integriren; denn es liegen nur diesseits der Tangentenebene des Punktes P Massen. Dies liefert für die gesuchte Grösse $4\pi\varepsilon\mu\varrho \cdot PA$, d. h. die Intensität der Kraft, mit welcher eine von ähnlichen Ellipsoiden in ähnlicher Lage begrenzte unendlich dünne Schicht einen Punkt ihrer äusseren Grenzfläche anzieht, ist der Dicke der Schicht, gemessen längs der Normalen der äusseren Grenzfläche im angezogenen Punkte, proportional. Dieser Satz wurde in einer allgemeineren Fassung zuerst von Laplace bewiesen, indem er zeigte, dass wenn irgend eine Schicht von beliebiger Gestalt auf einen inneren Punkt keine Wirkung ausübt, ihre Wirkung auf einen Punkt der äusseren Grenzfläche dem Ausdrucke $4\pi\varrho\delta$ proportional ist, für δ als Dicke der Schicht, wie oben, in normaler Richtung gemessen.

Wir wollen die Dicke PA der Schicht in diesem Satze etwas anders ausdrücken. Fällt man nämlich vom Mittelpunkte O der Schicht auf die Tangentenebene die Normale $OQ = p$ und zieht den Stral OP, welcher die innere Grenzfläche der Schicht in S treffen mag, so ist wegen der ähnlichen Lage der Grenz-

flächen $\frac{PA}{OQ} = \frac{PS}{PO}$ und da das Verhältniss $\frac{PS}{PO}$ durch die ganze Figur hindurch constant bleibt, so kann es, wenn a_1, b_1, c_1 die Halbaxen der Aussenfläche sind und da_1 die Dicke der Schicht längs der Halbaxe a_1 bedeutet, durch $\frac{da_1}{a_1}$ dargestellt werden. Daher hat man

$$\frac{PA}{OQ} = \frac{da_1}{a_1}, \text{ d. h.: } PA = \frac{da_1}{a_1} \cdot p$$

und folglich für die Kraft:

$$4\pi\varepsilon\mu\varrho \frac{da_1}{a_1} \cdot p.$$

Um jetzt die Anziehung einer unendlich dünnen ellipsoidischen Schicht für einen äusseren Punkt auf den eben entwickelten Fall zurückzuführen, legen wir durch den angezogenen Punkt P (Fig. 96) ein mit der äusseren Grenzfläche A der Schicht confocales Ellipsoid A_1, sowie ein diesem ähnliches unendlich nahes zweites Ellipsoid B_1, sodass wir eine unendlich dünne Schicht $(A_1 B_1)$ erhalten, auf deren Aussenfläche P liegt. Die gegebene Schicht (AB), deren Aussenfläche die Halbaxen a, b, c haben möge, übt auf P eine Anziehung aus, welche sich zu der Anziehung der eben construirten Schicht verhält, wie sich die Massen beider Schichten verhalten. Legen wir jener Hülfsschicht die Dichtigkeit ϱ von (AB) bei, so wird dies Verhältniss gleich dem Verhältnisse $\frac{abc}{a_1 b_1 c_1}$ der Volumina der Schichten, wo a_1, b_1, c_1 die Halbaxen der Aussenfläche der Hülfsschicht bedeuten. Die gesuchte Anziehung der gegebenen Schicht folgt daher aus dem obigen Ausdrucke durch Multiplication mit diesem Verhältnisse und wird

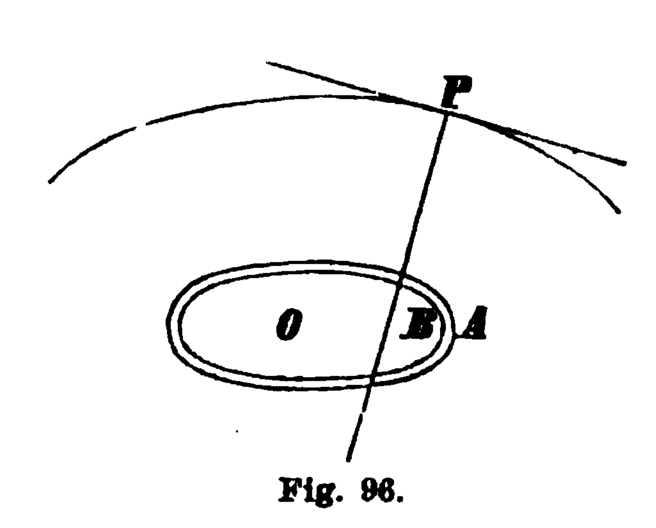


Fig. 96.

$$4\pi\varepsilon\mu\varrho p \cdot \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} \cdot \frac{da_1}{a_1}.$$

Wir wollen nun die Dicke der Hülfsschicht so bestimmen, dass die Flächen A_1, B_1 in demselben Verhältnisse n einander ähnlich seien, wie die Flächen A, B. Dann ist $\frac{da_1}{a_1} = n - 1 = \frac{da}{a}$ und folglich geht der vorige Ausdruck für die Attraction der Schicht über in

$$4\pi\varepsilon\mu\varrho p \cdot \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} \cdot \frac{da}{a}.$$

Die Richtung der Kraft ist die Normale des durch den angezogenen Punkt gelegten, mit der Aussenfläche der anziehenden Schicht confocalen Ellipsoids $(a_1 b_1 c_1)$.

Um die Attraction einer ellipsoidischen Schicht von endlicher Dicke oder eines Ellipsoids darzustellen, zerlegen wir dasselbe in unendlich dünne Schichten, welche zwischen concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Flächen enthalten sind. Alle diese sind mithin auch der äusseren Grenzfläche des Ellipsoids ähnlich. Für jede Schicht, deren Aussenfläche die Halbaxe a, b, c habe, construiren wir durch den angezogenen Punkt (xyz) ein mit dieser Aussenfläche confocales Ellipsoid, dessen Halbaxen a_1, b_1, c_1 seien. Wir bestimmen nun die Componenten der Anziehung der Schicht parallel den Hauptaxen des Ellipsoids,

indem wir den zuletzt entwickelten Ausdruck mit den Richtungscosinussen der Normalen des Ellipsoids $(a_1\, b_1\, c_1)$ im Sinne nach dem Innern desselben genommen multipliciren und die so gewonnenen Ausdrücke durch die Masse des anziehenden Ellipsoids hindurch integriren. Eine Ebene durch die x-Axe und den angezogenen Punkt $(x\,y\,z)$ schneidet das Ellipsoid $(a_1\, b_1\, c_1)$ in einer Ellipse, deren Tangente die x-Axe im Abstande $\frac{a_1^2}{x}$ vom Mittelpunkte trifft und da diese Tangente in die Tangentenebene des Punktes fällt, so trifft diese Ebene die x-Axe in demselben Abstande. Ebenso trifft sie die beiden anderen Axen in den Abständen $\frac{b_1^2}{y}$, $\frac{c_1^2}{z}$ vom Mittelpunkte. Das Perpendikel p, vom Mittelpunkte auf die Tangentenebene gefällt, ist die gemeinschaftliche Projection dieser drei Strecken und sind folglich die Richtungscosinusse der Normalen im Sinne nach Aussen genommen:

$$\frac{px}{a_1^2},\ \frac{py}{b_1^2},\ \frac{pz}{c_1^2}$$

und folglich

$$\frac{1}{p^2} = \frac{x^2}{a_1^4} + \frac{y^2}{b_1^4} + \frac{z^2}{c_1^4}.$$

Man hat daher für die Componenten der Anziehung der Schicht $(a\,b\,c)$ mit Rücksicht auf den Sinn dieser Kraft:

$$4\pi\varepsilon\mu\varrho x \frac{abc}{a_1 b_1 c_1}\frac{p^2}{a_1^2}\frac{da}{a},\quad 4\pi\varepsilon\mu\varrho y \frac{abc}{a_1 b_1 c_1}\frac{p^2}{b_1^2}\frac{da}{a},\quad 4\pi\varepsilon\mu\varrho z \frac{abc}{a_1 b_1 c_1}\frac{p^2}{c_1^2}\frac{da}{a}.$$

Als Integrationsvariabeln wählt nun Chasles die Halbaxe a der Aussenfläche der anziehenden Schicht und vertauscht diese Variabeln später mit $u = \frac{a}{a_1}$. Wir ziehen es vor, um die Untersuchung der Dirichlet'schen Form der Lösung anzuschliessen, den Parameter λ des durch $(x\,y\,z)$ gehenden, mit $(a\,b\,c)$ confocalen Ellipsoids $(a_1\, b_1\, c_1)$ zu wählen. Setzt man nämlich

$$a_1^2 - a^2 = b_1^2 - b^2 = c_1^2 - c^2 = \lambda,$$

sodass
$$a_1^2 = a^2 + \lambda,\quad b_1^2 = b^2 + \lambda,\quad c_1^2 = c^2 + \lambda$$

wird, so besteht die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1,$$

welche ausdrückt, dass $(x\,y\,z)$ auf diesem Ellipsoide liegt. Um die Variabeln a, b, c zu entfernen, setzen wir weiter vermöge der Aehnlichkeit der Fläche $(a\,b\,c)$ mit der Aussenfläche $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ der anziehenden Schicht oder des anziehenden Ellipsoids:

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} = \varkappa,$$

wodurch die Gleichung die Form

$$\frac{x^2}{\alpha^2 + \varkappa^2\lambda} + \frac{y^2}{\beta^2 + \varkappa^2\lambda} + \frac{z^2}{\gamma^2 + \varkappa^2\lambda} = \frac{1}{\varkappa^2}$$

annimmt. Grösserer Einfachheit wegen wählen wir schliesslich $\varkappa^2\lambda = s$ zur Integrationsvariabeln und schreiben diese Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2 + s} + \frac{y^2}{\beta^2 + s} + \frac{z^2}{\gamma^2 + s} = \frac{1}{\varkappa^2},$$

worin s und das Aehnlichkeitsverhältniss $\varkappa = \frac{\alpha}{a}$ von Schicht zu Schicht variiren. Die Differentiation derselben liefert:

$$l\,ds = \frac{2\,d\varkappa}{\varkappa^3} = -\frac{2\,\alpha}{\varkappa^2}\frac{d\,a}{a^2} = -\frac{2}{\varkappa^2}\frac{d\,a}{a},$$

wo

$$l = \frac{x^2}{(\alpha^2+s)^2} + \frac{y^2}{(\beta^2+s)^2} + \frac{z^2}{(\gamma^2+s)^2}.$$

Nach der oben für p entwickelten Formel ist aber

$$\frac{1}{p^2} = \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2} = \left[\frac{x^2}{(\alpha^2+s)^2} + \frac{y^2}{(\beta^2+s)^2} + \frac{z^2}{(\gamma^2+s)^2}\right]\varkappa^4,$$

d. h. $l = \frac{1}{p^2\varkappa^4}$, wodurch wir erhalten:

$$\frac{d\,a}{a} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{ds}{p^2\varkappa^2}.$$

Weiter wird

$$abc = \frac{\alpha\beta\gamma}{\varkappa^3},\quad a_1 b_1 c_1 = \frac{1}{\varkappa^3}\sqrt{(\alpha^2+s)\,(\beta^2+s)\,(\gamma^2+s)},\quad a_1^2 = \frac{\alpha^2+s}{\varkappa^2}$$

und hiermit die x-Componente der Attraction der Schicht:

$$-2\pi\varepsilon\mu\alpha\beta\gamma x\,\frac{\varrho\,ds}{(\alpha^2+s)\sqrt{(\alpha^2+s)\,(\beta^2+s)\,(\gamma^2+s)}}$$

$$= -2\pi\varepsilon\mu x\,\frac{\varrho\,ds}{(\alpha^2+s)\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}.$$

Dieser Ausdruck ist für das volle Ellipsoid zwischen den Werthen von s als Grenzen zu integriren, welche $a = \alpha$ und $a = 0$ entsprechen, wofür $\varkappa = 1$ und $\varkappa = \infty$ und vermöge $\varkappa^2\lambda = s$ die Werthe von s gleich λ und ∞ werden, wo λ die positive Wurzel σ der Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2+\lambda} + \frac{y^2}{\beta^2+\lambda} + \frac{z^2}{\gamma^2+\lambda} = 1$$

ist. Demnach erhalten wir, indem wir zugleich die analogen Integrale bilden:

$$X = -2\pi\varepsilon\mu\cdot x\int_\sigma^\infty \frac{\varrho\,ds}{(\alpha^2+s)\,D},$$

$$Y = -2\pi\varepsilon\mu\cdot y\int_\sigma^\infty \frac{\varrho\,ds}{(\beta^2+s)\,D},$$

$$Z = -2\pi\varepsilon\mu\cdot z\int_\sigma^\infty \frac{\varrho\,ds}{(\gamma^2+s)\,D},$$

$$D = \sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}.$$

Ist die Dichtigkeit von Schicht zu Schicht veränderlich, so ist sie eine Function von dem Aehnlichkeitsverhältniss $\varkappa$ der Grenzfläche der Schicht um Ellipsoid $(\alpha\beta\gamma)$ oder auch von $\frac{1}{\varkappa}$. Diese Grösse ist aber Function von s

vermöge der obigen Gleichung

$$\frac{1}{\varkappa^2} = \frac{x^2}{\alpha^2 + s} + \frac{y^2}{\beta^2 + s} + \frac{z^2}{\gamma^2 + s}.$$

Daher kann ϱ als Function von s dargestellt werden von der Form .

$$\varrho = \varphi\left(\frac{x^2}{\alpha^2 + s} + \frac{y^2}{\beta^2 + s} + \frac{z^2}{\gamma^2 + s}\right).$$

Ist das Ellipsoid kein volles, sind vielmehr α_1, β_1, γ_1 die Halbaxen der inneren Grenzfläche, so ist die Integration bis $a = \alpha_1$ auszudehnen, also, wenn σ_1 die positive Wurzel der Gleichnng

$$\frac{x^2}{\alpha_1^2 + \lambda} + \frac{y^2}{\alpha_1^2 + \lambda} + \frac{z^2}{\gamma_1^2 + \lambda} = 1$$

ist, erhält man:

$$X = -2\pi\varepsilon\mu x \int_{\sigma}^{\sigma_1} \frac{\varrho\, ds}{(\alpha^2 + s)\, D} \text{ u. s. w.}$$

Für einen der Masse angehörigen Punkt $(x\,y\,z)$ trennt ein durch denselben gelegtes mit der Aussenfläche ähnliches Ellipsoid die anziehende Masse in zwei Theile, eine äussere Schicht, welche nach dem Newton'schen Satze keine Wirkung auf den Punkt ausübt und ein Restellipsoid oder eine Restschicht, deren Anziehung die Totalanziehung der Gesammtmasse darstellt, welche nach dem Vorstehenden leicht bestimmt wird.

Die Entwickelung der Attractionstheorie und der Theorie des Potentials lehnt sich vorzugsweise an die Lösung des Attractionsproblems des Ellipsoids an, welche zunächt ein Bedürfniss der Astronomie war. Bereits Newton fand den Satz, dass eine ellipsoidische Schicht keine Wirkung auf einen inneren Punkt ausübt (*Principia phil. nat.* lib. I, propos. 91). Er fand ferner, dass zwei concentrische Rotationsellipsoide ähnlicher Gestalt und Lage auf zwei homologe Punkte ihrer Oberfläche Anziehungen von derselben Richtung und proportional dem Abstande vom Mittelpunkte ausüben. Hieran knüpfte Maclaurin an (*Treatise on fluxions* l. I, ch. XIV, *De causa physica fluxus et refluxus maris; Académ. des sciences*, T. IV) und bestimmte die Attraction eines Rotationsellipsoids für einen Punkt seiner Axe und einen äusseren in der Ebene des Aequators liegenden Punkt und bewies, dass zwei confocale Ellipsoide auf einen Punkt einer Hauptaxe Wirkungen ausüben in der Richtung dieser Axe und proportional ihren Massen. Lagrange dehnte diesen Satz für alle Punkte eines Hauptschnitts aus (*Nouveaux mémoires de l'Académie de Berlin*, 1773). Die vollständige Lösung dieses Problems gelang erst Laplace (*Mém. de l'Académie des sciences*, 1782; *Mécanique céleste*, liv. III, chap. 1). Seitdem wurde das Problem von fast allen bedeutenden Mathematikern behandelt. Ivory gab ein Reductionstheorem für die Attraction eines äusseren Punktes auf die für einen inneren (*On the attractions of homogeneous ellipsoids, Philosoph. Transactions*, 1809); Gauss, *theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata* (*Commentatt. Goetting. recent.* T. II (1813) oder Werke, Bd. 5, p. 1 u. 279); Legendre (*Traité des fonctions elliptiques*, T. I, p. 539); Poisson, *Mémoire sur l'attraction d'un ellipsoïde*

homogène (*Mém. de l'Académie des sciences*, T. XIII); Chasles, *Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes* [*Journ. de l'école polytechn.*, Cah. XXV, p. 244 (1837)]; *Comptes rendus de l'Acad. des sciences*, T. VI, p. 902 (1838); *Nouvelle solution du problème de l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène sur un point extérieur*, *Journ. de math. p. Liouville*, T. V (1840); Dirichlet, Ueber eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale (Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1839, oder *Comptes rendus de l'Acad. des sciences*, T. VIII, p. 156 und in Dirichlet's Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte, herausgeg. v. Grube, Leipzig, bei Teubner 1876, S. 37—51); Jacobi, *Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville* (*Journ. de math.*, T. XI, p. 341; 1846). Boole, *on the attraction of a solid of revolution on an external point* (Cambridge and Dublin methem. Journal T. II, p. 1; 1847). — Collins, *The attraction of ellipsoids considered geometrically* (Ibid. T. IX, p. 255; 1854). — Cayley, *On a multiple integral connected with the theory of attraction*, Ibid. T. II, p. 219; *on the attraction of an ellipsoid* (*Legendre's method*), Ibid. T. IV, p. 50; *on the attraction of an ellipsoid* (*Jacobi's method*), Ibid. T. V, p. 217; *on Rodrigues' method for the attraction of ellipsoids; Quarterly Journal of pure and appl. math.* T. II, p. 333 (1859); *Note on the theory of attraction*, Ibid. p. 338; *on Laplace's method for the attraction of ellipsoids*, Ibid. T. I, p. 285 (1857); *on Gauss' method for the attraction of ellipsoids*, Ibid. T. I, p. 162. — Grube, über die Anziehung des homogenen Ellipsoids; Crelle's Journal B. 69, p. 359. — Mertens, Bestimmung des Potentials eines homogenen Ellipsoids, Crelle's Journ. B. 70, p. 1. — Somoff gab eine Vereinfachung und Modification des Gauss'schen Verfahrens, *Bulletin de l'Acad. des sciences de St. Pétersbourg*, T. XIX, p. 215—225 oder Theoretische Mechanik, übers. von Ziwet, II, p. 192—211.

Ausdehnung der Sätze über die Attraction des Ellipsoids auf die andern Flächen 2. Ordnung gaben: Bourget, *Note sur l'attraction des paraboloïdes elliptiques* [*Journ. de math.*, 2ième *Série*, T. II, p. 81 (1857)]. — Hirst, *sur le potentiel d'une conche infiniment mince comprise entre deux paraboloïdes elliptiques* [*Journ. de math.* 2ième *Série*, T. II, p. 385 (1857)]. — Bourget, *Note à l'occasion du mémoire de M. Hirst sur l'attraction des paraboloïdes elliptiques*, Ibid. T. III, p. 47. — Mehler, über die Anziehung einer von zwei ähnlichen Flächen zweiten Grades begrenzten Schaale (Crelle's Journal, B. 60, p. 321).

Andere werthvolle hierher gehörige Arbeiten sind: Joachimsthal, *on the attraction of a straight line* (Cambridge and Dublin math. Journ. T. III, p. 93); Attraction der Geraden (Crelle's Journ. Bd. 58, S. 135). — Cayley, *On the attraction of a terminated straight line* (Philos. Magaz. 4. Ser. Vol. 41, p. 318). — Heine, das Potential eines homogenen Kreises (Crelle's Journ. B. 76, p. 271). — Mehler, Ueber die Anziehung einer mit Masse belegten abwickelbaren Fläche auf einen materiellen Punkt (Crelle's Journ. Bd. 58, S. 240); über die Anziehung eines homogenen Polyeders (Crelle's Journ. Bd. 66, p. 375, aus den Schriften der naturf. Gesellsch. zu Danzig). — Grube, Ueber die Anziehungscomponente eines geraden elliptischen Cylinders in der Richtung der Axe, wenn die Elementaranziehung irgend einer Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist (Crelle's Journ. Bd. 65, p. 62). — Röthig, das Potential eines homogenen rechtwinkligen Parallelepipedes (Crelle's Journ. Bd. 58, p. 249); über das Potential eines homogenen rechtwinkligen Cylinders (Crelle's Journ. Bd. 61, p. 180); Bemerkung hierzu von Clebsch (Bd. 61, p. 187). — Mertens, Bestimmung des Potentials eines homogenen Polyeders (Crelle's Journ. Bd. 69, p. 286).

§. 10. Auch die zweiten und höheren Differentialquotienten des Potentials sind für Punkte, welche der Masse nicht angehören, bestimmte endliche Functionen von x, y, z. Für Punkte der Masse findet dies nicht immer statt, vielmehr gibt es besondere kritische Punkte, Linien und Flächen, in welchen bei Discontinuität der Dichtigkeit auch eine Discontinuität der zweiten Differentialquotienten eintritt, sodass diese an solchen Stellen zwei verschiedene Werthe erlangen. Beim Durchgang des angezogenen Punktes durch die Oberfläche der Masse z. B., wenn die Dichtigkeit plötzlich Null wird, ereignet sich dies.

Bildet man z. B. $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, indem man

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int \frac{a - x}{r^3} \varrho \, dv$$

nochmals differentiirt, welches liefert

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \int \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3\,(a - x)^2}{r^5}\right) \varrho \, dv$$

und transformirt diesen Ausdruck auf Polarcoordinaten, wobei

$$dv = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi, \quad \frac{a - x}{r} = \cos \vartheta$$

wird, so erhält man die Form

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \int\int\int \frac{-1 + 3 \cos^2 \vartheta}{r} \varrho \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi,$$

in welcher sich der Factor r nicht mehr hinweghebt und aus welcher man also in unserem Falle nichts über die Natur von $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ erkennen kann. Es muss daher hierfür eine ganz andere Methode der Discussion eintreten. Diese besteht darin, dass man das dreifache Integral, welches $\frac{\partial V}{\partial x}$ darstellt, in ein Doppelintegral umwandelt, welches über die Oberfläche der Masse zu erstrecken ist.

In Bezug auf die zweiten Derivirten des Newton'schen Potentials besteht folgender Satz:

Abgesehen von den Punkten, in welchen die Dichtigkeit plötzlich ihren Werth ändert, sind auch die drei Grössen $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ endliche und eindeutige Functionen von x, y, z und bestehen für sie die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\varrho,$$

erstere für einen äusseren, letztere für einen in der Masse liegenden Punkt, der sich an einer Stelle (xyz) befindet, an welcher die Dichtigkeit ϱ ist.

Von diesen beiden Gleichungen wurde die erstere von Laplace gegeben, die letztere, welche eine Verallgemeinerung der ersteren ist, indem sie für einen äusseren Punkt, für welchen der mit ihm zusammenfallende Massenpunkt die specifische Masse $\varrho = 0$ besitzt, mit der ersteren zusammenfällt, rührt von Poisson her. Die Grösse $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ nennt man mit Lamé den Differentialparameter zweiter Ordnung von V.

Drücken wir das Massenelement $dm = \varrho\, dv$ durch $\varrho\, da\, db\, dc$ aus, so ist:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int\!\!\int\!\!\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \varrho\, da\, db\, dc.$$

Aus $r^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2$ folgt aber $r\frac{\partial r}{\partial x} = -(a - x)$ und andererseits $r\frac{\partial r}{\partial a} = a - x$; daher wird $\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial r}{\partial a}$ und also weiter $-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial a}$, d. h.:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(-\frac{1}{r}\right).$$

Hierdurch geht aber der Ausdruck für $\frac{\partial V}{\partial x}$ über in

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int\!\!\int\!\!\int \frac{\partial}{\partial a}\left(-\frac{1}{r}\right) \varrho\, da\, db\, dc = \int\!\!\int db\, dc \int \frac{\partial}{\partial a}\left(-\frac{1}{r}\right) \varrho\, da.$$

Denkt man sich nun über dem verschwindend kleinen Rechteck $db\, dc$ senkrecht zur Ebene der yz ein unendlich schmales Parallelepiped errichtet, so ist die Integration nach a auszudehnen über die Masse, welche dasselbe aus der Gesammtmasse herausschneidet. Es trete (Fig. 96) die Kante des Parallelepipeds, deren Punkte die Coordinaten b, c haben, bei M_1 in die Masse ein, bei M_2 aus, bei M_3 wieder ein, bei M_4 wieder aus u. s. f. und seien $r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots$ die Radienvectoren $PM_1, PM_2, PM_3, \ldots$, welche vom angezogenen Punkte P nach diesen Punkten hinführen, sowie $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ die Werthe von ϱ in denselben und $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ihre Coordinatenwerthe a. Nun ist allgemein:

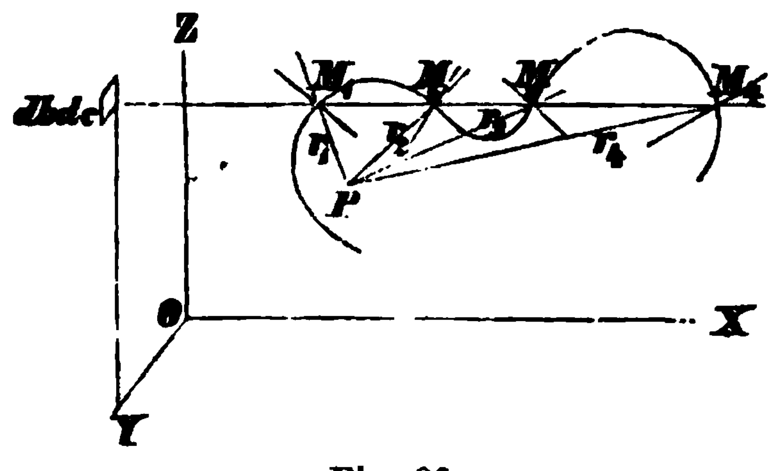


Fig. 96.

$$\int \frac{\partial}{\partial a}\left(-\frac{1}{r}\right) \varrho\, da = -\frac{\varrho}{r} + \int \frac{1}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial a}\, da$$

und indem man dies Integral von a_1 bis a_2, von a_3 bis a_4 u. s. f. nimmt, erhält man:

$$\int \frac{\partial}{\partial a}\left(-\frac{1}{r}\right)\varrho\, da = -\frac{\varrho_2}{r_2} + \frac{\varrho_1}{r_1} - \frac{\varrho_4}{r_4} + \frac{\varrho_3}{r_3} - \cdots + \int \frac{1}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial a}\, da,$$

die beiden hier angedeuteten Integrationen längs der mit Masse belegten Kante des Parallelepipeds geführt gedacht. Demnach wird:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int\!\!\int db\, dc\left(\frac{\varrho_1}{r_1} - \frac{\varrho_2}{r_2} + \frac{\varrho_3}{r_3} - \frac{\varrho_4}{r_4} + \cdots\right) + \int\!\!\int db\, dc \int \frac{1}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial a}\, da.$$

Die Elemente der Oberfläche der Masse, welche das Parallelepiped bei M_1, M_2, M_3, ... trifft, seien nun ds_1, ds_2, ds_3, ... und die Winkel, welche die nach aussen gerichtete Normale der Oberfläche in diesen Punkten mit der x-Axe bildet, seien α_1, α_2, α_3, ... Diese Winkel sind der Reihe nach abwechselnd stumpf und spitz, stumpf bei jedem Eintritt in die Masse, spitz beim Austritt aus derselben und sind also $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_3$, $\cos\alpha_5$, ... negativ, $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha_4$, ... positiv. Nun stellt $db\, dc$ die gemeinschaftliche Projection aller Flächenelemente ds_1, ds_2, ... auf die yz-Ebene dar und wird also erhalten, indem man diese Elemente mit den Cosinussen ihrer Neigung gegen die yz-Ebene multiplicirt. Jedes Element bildet aber mit dieser Ebene einen Winkel, wie die Normale mit der x-Axe und da $db\, dc$ den absoluten Werth der Projection darstellt, so sind die Cosinusse der stumpfen Winkel α durch die Cosinusse ihrer spitzen Nebenwinkel zu ersetzen. Man hat daher

$$db\, dc = -ds_1\cos\alpha_1 = +ds_2\cos\alpha_2 = -ds_3\cos\alpha_3 = +ds_4\cos\alpha_4 = \cdots$$

und wenn man in dem ersten Integrale von $\frac{\partial V}{\partial x}$ unter dem Intégralzeichen die Multiplication mit $db\, dc$ ausführt und in jedem Bestandtheile der Summe für dieses Elementarrechteck seinen Ausdruck durch das dem betreffenden r und ϱ entsprechende Flächenelement ds einführt, wodurch man erhält:

$$-\cos\alpha_1\cdot\frac{\varrho_1}{r_1}ds_1 - \cos\alpha_2\cdot\frac{\varrho_2}{r_2}ds_2 - \cos\alpha_3\cdot\frac{\varrho_3}{r_3}ds_3 - \cdots,$$

so ist die Bedeutung des Integrales die, dass die Summe aller Elemente $-\frac{\varrho}{r}\cos\alpha\cdot ds$ über die ganze Oberfläche hinweg erstreckt, gebildet werden solle. Bezeichnen wir dies Oberflächenintegral mit

$$-\int \frac{\varrho}{r}\cos\alpha\cdot ds$$

und schreiben in dem zweiten Bestandtheile von $\frac{\partial V}{\partial x}$ wieder dv für $da\,db\,dc$, so kommt

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\int \frac{\varrho}{r}\cos\alpha\cdot ds + \int \frac{1}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial a}\, dv,$$

das erste Integral über die Oberfläche der Masse, das zweite über die

körperliche Masse selbst erstreckt. Diese Gleichung gilt für einen äusseren Punkt, wie für einen inneren; für einen inneren Punkt hat man die Masse einer kleinen Kugel um diesen Punkt herum auszuscheiden und den Grenzwerth zu suchen, welchem sich die rechte Seite nähert, wenn diese Kugel selbst die Null zur Grenze hat. Uebrigens setzt die Gleichung voraus, dass ϱ durch die ganze Masse hindurch continuirlich sei, damit $\frac{\partial \varrho}{\partial a}$ niemals unbestimmt werde.

Differentiiren wir jetzt die Gleichung nach x, welcher Operation nichts im Wege steht, da r blos in erster Potenz im Nenner vorkommt, und bilden die beiden analogen Gleichungen für $\frac{\partial V}{\partial y}$ und $\frac{\partial V}{\partial z}$, so erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\int \frac{a-x}{r^3} \varrho \cos \alpha \, ds + \int \frac{a-x}{r^3} \frac{\partial \varrho}{\partial a} dv,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\int \frac{b-y}{r^3} \varrho \cos \beta \, ds + \int \frac{b-y}{r^3} \frac{\partial \varrho}{\partial b} dv,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\int \frac{c-z}{r^3} \varrho \cos \gamma \, ds + \int \frac{c-z}{r^3} \frac{\partial \varrho}{\partial c} dv,$$

worin α, β, γ die Richtungswinkel der nach aussen gerichteten Normale der Oberfläche der Masse bedeuten. Die Addition dieser drei Gleichungen liefert weiter:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\int \left(\frac{a-x}{r} \cos \alpha + \frac{b-y}{r} \cos \beta + \frac{c-z}{r} \cos \gamma \right) \frac{\varrho}{r^2} ds$$
$$+ \int \left(\frac{a-x}{r} \frac{\partial \varrho}{\partial a} + \frac{b-y}{r} \frac{\partial \varrho}{\partial b} + \frac{c-z}{r} \frac{\partial \varrho}{\partial c} \right) \frac{dv}{r^2}.$$

Zur Interpretation des ersten der beiden Integrale rechts dient die Bemerkung, dass der Cosinus des Winkels σ, den der Radiusvector r mit der Normalen der Oberfläche bildet,

$$\cos \sigma = \frac{a-x}{r} \cos \alpha + \frac{b-y}{r} \cos \beta + \frac{c-z}{r} \cos \gamma$$

ist und mithin das erste Integral, das wir mit N bezeichnen wollen, die Bedeutung hat:

$$N = \int \frac{\cos \sigma}{r^2} \varrho \, ds.$$

Behufs des zweiten Integrales, dessen Werth mit M bezeichnet werden möge, differentiiren wir die Gleichungen für Richtungscosinusse $\cos g$, $\cos h$, $\cos i$ des Radiusvectors r, nämlich:

$$r \cos g = a - x, \quad r \cos h = b - y, \quad r \cos i = c - z$$

so, dass blos der Radiusvector r und a, b, c als veränderlich gedacht werden,

nicht aber seine Richtung. Dies liefert:

$$\cos g = \frac{\partial a}{\partial r}, \quad \cos h = \frac{\partial b}{\partial r}, \quad \cos i = \frac{\partial c}{\partial r}$$

und hiermit wird:

$$\frac{a-x}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial a} + \frac{b-y}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial b} + \frac{c-z}{r}\frac{\partial r}{\partial c} = \frac{\partial \varrho}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial r} + \frac{\partial \varrho}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial r} + \frac{\partial \varrho}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial \varrho}{\partial r},$$

wodurch M übergeht in

$$M = \int \frac{\partial \varrho}{\partial r}\frac{dv}{r^2}.$$

Demnach ist jetzt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -N + M,$$

$$N = \int \frac{\cos \sigma}{r^2} \varrho\, ds, \quad M = \int \frac{\partial \varrho}{\partial r}\frac{dv}{r^2}.$$

Jetzt verwandeln wir das Raumintegral M in ein Oberflächenintegral. Sein Werth fällt verschieden aus, je nachdem der Punkt $P(xyz)$ der Masse angehört oder ausserhalb derselben liegt. Um P beschreiben wir eine Kugelfläche mit dem Radius 1 und zugleich durch das Oberflächenelement ds einen unendlich schmalen Kegel; derselbe schneidet aus der Kugel ein sphärisches Element $d\tau$ heraus, welches den körperlichen Winkel des Kegels misst. Das Volumenelement wird dann $dv = r^2 d\tau\, dr$ und mithin:

$$M = \int \frac{\partial \varrho}{\partial r}\frac{\partial v}{r^2} = \int \frac{\partial \varrho}{\partial r}\, dr\, d\tau.$$

Integriren wir nach r und bezeichnen mit $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots$ die Dichtigkeit in P und den Punkten, in welchen der Radiusvector die Oberfläche trifft (Fig. 97), so wird:

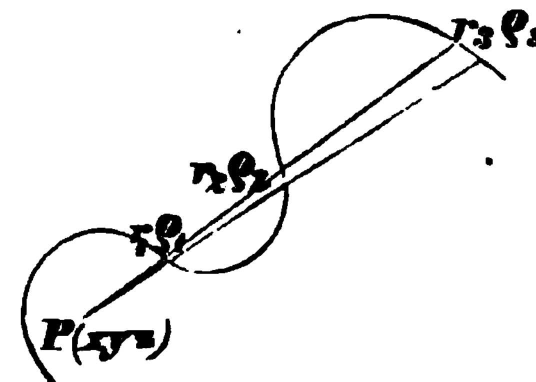


Fig. 97.

$$M = \int (-\varrho + \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \cdots)\, d\tau,$$

welches Integral über die Kugelfläche oder einen Theil derselben auszudehnen ist, je nachdem P im Innern der Masse liegt oder nicht.

Für den inneren Punkt erstreckt sich das Integral über die ganze Kugelfläche. Der erste Bestandtheil $\int -\varrho\, d\tau$ liefert $-4\pi\varrho$, der Rest $\int (\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots)\, d\tau$ lässt sich leicht auf das Integral N reduciren. Sind nämlich $r_1, r_2, r_3, \ldots$ die Radienvectoren für die Schnittpunkte mit der Oberfläche, $ds_1, ds_2, ds_3, \ldots$ die Flächenelemente und $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ die Winkel, welche die Normale daselbst mit dem Radiusvector bildet, so ist, weil r_1, ds_1, σ_1 dem ersten Austritt aus der Oberfläche, r_2, ds_2, σ_2 dem folgenden Wiedereintritt u. s. f. entsprechen:

$r_1^2 d\tau = + ds_1 \cdot \cos\sigma_1, \; r_2^2 d\tau = - ds_2 \cdot \cos\sigma_2, \; r_3^2 d\tau = + ds_3 \cdot \cos\sigma_3, \ldots,$
indem beide Seiten dieser Gleichungen die Projectionen der Flächenelemente auf die mit den Radien r_1, r_2, r_3, ... beschriebenen Kugelflächen ausdrücken. Hieraus folgt:

$$d\tau = \frac{\partial s_1}{r_1^2} \cos\sigma_1 = - \frac{\partial s_2}{r_2^2} \cos\sigma_2 = \frac{\partial s_3}{r_3^2} \cos\sigma_3 = \cdots$$

und indem man diese Werthe einführt, hat man die Summe

$$\varrho_1 \frac{\cos\sigma_1}{r_1^2} ds_1 + \varrho_2 \frac{\cos\sigma_2}{r_2^2} ds_2 + \varrho_3 \frac{\cos\sigma_3}{r_3^2} ds_3 + \cdots,$$

welche sich auf die Richtung ein und desselben Radiusvectors bezieht, über die ganze Oberfläche zu integriren, d. h.: $\int \frac{\cos\sigma}{r^2} \varrho ds$ zu bilden, welches Integral mit N übereinstimmt. Es ist daher für einen inneren Punkt:

$$M = -4\pi\varrho + N$$

und also schliesslich:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -N + M = -4\pi\varrho,$$

unter ϱ die Dichtigkeit des mit P zusammenfallenden Massenpunktes verstanden.

Für einen äusseren Punkt liefert die Integration nach r:

$$M = \int (-\varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3 + \varrho_4 - \cdots) d\tau$$

und weil jetzt beim ersten Schnittpunkte des Radiusvectors mit der Oberfläche ein Eintritt ins Innere, beim zweiten ein Austritt erfolgt u. s. f., so ist:

$$d\tau = - \frac{ds_1}{r_1^2} \cos\sigma_1 = + \frac{ds_2}{r_2^2} \cos\sigma_2 = - \frac{ds_3}{r_3^2} \cos\sigma_3 = \cdots$$

und hiermit erhält man für M folgendes, ebenfalls über die ganze Oberfläche auszudehnende Integral

$$M = \int \frac{\cos\sigma}{r^2} \varrho\, ds = N$$

und hiermit:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Der Beweis des Satzes setzt zwar voraus, dass die Dichtigkeit an keiner Stelle sich sprungweise ändere, indessen lässt sich diese Beschränkung unter gewissen anderen Bedingungen hinwegräumen, sodass der Satz auch dann noch Gültigkeit behält, wenn die Dichtigkeit Discontinuitäten zeigt. Es sei die Masse längs einer Fläche discontinuirlich. Auf einen äusseren Punkt hat dies keinen Einfluss, da man mit Hülfe dieser Fläche die Masse in zwei Theile zerlegen kann, sodass in jedem die Dichtigkeit continuirlich ist, also für jeden Theil das Potential

der Laplace'schen Gleichung genügt, mithin auch das Gesammtpotential, welches die Summe der Potentiale beider Theile ist, ihr gleichfalls genügt. Aehnliches gilt, wenn die specifische Masse längs einer Linie oder in einzelnen Punkten discontinuirlich wird, indem man diese Gebilde als Grenzfläche von Flächen ansehen kann.

Für einen inneren Punkt, der aber nicht an einer Discontinuitätsstelle liegen darf, kann man die Poisson'sche Gleichung dadurch beweisen, dass man um den Punkt einen Raum abgrenzt, innerhalb welches die Dichtigkeit durchaus continuirlich ist. Das Potential für diesen Raum sei V', das Potential für den übrigen Raum, für welchen der Punkt ein äusserer ist, V'', dann ist das Gesammtpotential $V = V' + V''$. Nach dem Vorstehenden ist aber

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial z^2} = -4\pi\varrho \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 V''}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V''}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V''}{\partial z^2} = 0,$$

mithin wenn man beide Gleichungen addirt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\varrho.$$

Liegt der Punkt aber an einer Scheidestelle, so haben daselbst $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ doppelte Werthe und lassen acht verschiedene Combinationen zu, sodass in Folge dessen die Summe $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ achtwerthig wird.

Der vorstehende Beweis rührt bis auf kleine formelle Verschiedenheiten von Gauss her (Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. Leipzig 1840, oder Resultate der magnetischen Beobachtungen für 1836, oder Liouville, Journal de mathém., T. VII). Andere Beweise gaben Weingarten (Crelle's Journal, Bd. 49, S. 367) mit Hülfe der Fourier'schen Doppelintegrale und Kronecker (Crelle's Journal, Bd. 70, S. 246) auf einer Grundlage von ausserordentlicher Allgemeinheit. Für einen äusseren Punkt ist die folgende Entwickelung zulässig. Aus $r^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2$ erhält man

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{a-x}{r} = -\cos g, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r^2 - (a-x)^2}{r^3} = \frac{1}{r}\sin^2 g$$

und hiermit

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\cos g}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{2}{r^3}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{r^3}(-1 + 3\cos^2 g),$$

sowie die analogen, auf die Axen der y und z bezüglichen Derivirten. Hiermit wird

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \int dm \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$= \int \frac{dm}{r^3}\left[-3 + 3(\cos^2 g + \cos^2 h + \cos^2 i)\right] = 0,$$

wo h, i sich auf die Axen der y, z beziehen.

§. 11. Die Eigenschaften des Potentials V, dass es selbst und seine Derivirten continuirlich und endlich, sowie dass $V\delta$

und $\frac{\partial V}{\partial s}\delta^2$ an feste Grenzen m und $m:\varepsilon\mu$ gebunden sind, welche sie nicht überschreiten können (§. 6), dass ferner die zweiten Derivirten, abgesehen von Discontinuitäten längs Flächen, Linien oder in einzelnen Punkten, bestimmte eindeutige Werthe haben und V der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\varrho$$

genügt, sind für das Potential charakteristisch, sodass es keine zwei verschiedene Functionen derselben Eigenschaften gibt. Die Function, welche ihnen genügt, ist daher das Potential.

Dieser Satz, welcher von Dirichlet herrührt (Crelle's Journal, Bd. 32, S. 80) ergibt sich folgendermassen. Gesetzt, es seien V und V' zwei Functionen, welche den Bedingungen genügen und sei $V'-V=u$; man kann zeigen, dass u constant und gleich Null ist. Zunächst ist klar, dass auch u den beiden ersten Bedingungen genügt, während aus

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V'}{\partial z^2}=-4\pi\varrho,\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\varrho$$

für u die Differentialgleichung folgt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Integriren wir den Ausdruck zur Linken dieser Gleichung, mit u multiplicirt, über den Raum eines um den Coordinatenursprung als Mittelpunkt beschriebenen Würfels, dessen Kanten die Länge $2a$ und die Richtung der Axen haben, so sind die Discontinuitäten, da sie nicht durch einen körperlichen Raum hindurch, sondern höchstens auf Flächen stattfinden, ohne Einfluss auf diese dreifache Integration und ist

$$\int\int_{-a}^{+a}\int u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz=0.$$

Nun ist aber vermöge der partiellen Integration:

$$\int_{-a}^{+a} u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx=\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{-a}^{+a}-\int_{-a}^{+a}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx,$$

$$\int_{-a}^{+a} u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy=\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{-a}^{+a}-\int_{-a}^{+a}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy,$$

$$\int_{-a}^{+a} u\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz=\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{-a}^{+a}-\int_{-a}^{+a}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dz$$

und folglich, wenn man diese Gleichungen der Reihe nach mit $dy\,dz$, $dz\,dx$, $dx\,dy$ multiplicirt, sie addirt und das Resultat noch zweimal zwischen den Grenzen $-a$, $+a$ integrirt, vermöge der vorigen Relation:

$$\int\int_{-a}^{+a}\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz$$

$$=\int\int_{-a}^{+a}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{-a}^{+a}dy\,dz+\int\int_{-a}^{+a}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{-a}^{+a}dy\,dz+\int\int_{-a}^{+a}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{-a}^{+a}dy\,dz.$$

Vermöge der Bedingungen für V und V' hinsichtlich der Grenzen folgt, dass auch $xu<\lambda$, also $u<\frac{\lambda}{x}$ und ebenso $x^2\frac{\partial u}{\partial x}<\mu$, also $\frac{\partial u}{\partial x}<\frac{\mu}{x^2}$ und folglich

$$u\frac{\partial u}{\partial x}<\frac{\lambda\mu}{x^3}\quad\text{und}\quad\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{-a}^{+a}<\frac{\varkappa}{a^3},$$

wo λ, μ, $\varkappa$ bestimmte constante Werthe sind. Daher wird

$$\int\int_{-a}^{+a}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{-a}^{+a}dy\,dz<\frac{\varkappa}{a^3}\int\int_{-a}^{+a}dy\,dz,\ \text{d. h.}<\frac{4\varkappa}{a}$$

und mithin bleibt

$$\int\int_{-a}^{+a}\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz<\frac{12\varkappa}{a}.$$

Da das Integral links positiv ist und die Grösse rechts für $a=\infty$ verschwindet, so folgt, dass sein Werth Null ist und hiermit weiter, dass $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ sämmtlich verschwinden, d. h. dass u constant ist. Dieser Werth kann aber nur Null sein, denn es ist auch für $x=\infty$ stets $xu<\lambda$.

§. 12. Als Beispiel zum vorigen Paragraphen wollen wir das **Potential einer sphärischen Schicht bestimmen, wenn die Dichtigkeit auf concentrischen Kugelflächen constant ist**, d. h. mit dem **Abstande** s **vom Mittelpunkte variirt.**

Vermöge der vorausgesetzten Massenvertheilung und der geometrischen Natur der Kugelfläche ist das Potential blos eine Function des Abstandes s des angezogenen Punktes $P\,(x\,y\,z)$ vom Mittelpunkte. Wir können daher die Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\varrho$$

so transformiren, dass sie blos die Derivirte von V nach s enthält. Es ist nämlich:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{ds} \cdot \frac{\partial s}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{d^2 V}{ds^2} \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \frac{dV}{ds} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{dV}{ds} \cdot \frac{\partial s}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{d^2 V}{ds^2} \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + \frac{dV}{ds} \frac{\partial^2 s}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{dV}{ds} \cdot \frac{\partial s}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{d^2 V}{ds^2} \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 + \frac{dV}{ds} \frac{\partial^2 s}{\partial^2 z}$$

und hierzu liefert die Gleichung $s^2 = x^2 + y^2 + z^2$:

$$s \frac{\partial s}{\partial x} = x, \quad s \frac{\partial s}{\partial y} = y, \quad s \frac{\partial s}{\partial z} = z,$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + s \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 1, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + s \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = 1, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 + s \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 1.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in die vorigen Gleichungen bildet man leicht:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{d^2 V}{ds^2} \left[\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{dV}{ds} \left[\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right]$$

$$= \frac{d^2 V}{ds^2} + \frac{2}{s} \frac{dV}{ds}.$$

Demnach geht die Laplace-Poisson'sche partielle Differentialgleichung über in die folgende lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen zwei Variabeln V, s:

$$\frac{d^2 V}{ds^2} + \frac{2}{s} \frac{dV}{ds} = -4\pi\varrho.$$

Für einen der Masse nicht angehörenden Punkt ist $\varrho = 0$, mithin die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 V}{ds^2} + \frac{2}{s} \frac{dV}{ds} = 0.$$

Setzt man $\frac{dV}{ds} = u$, so nimmt sie die Gestalt an:

$$\frac{du}{ds} + \frac{2}{s} u = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{du}{u} + 2 \frac{ds}{s} = 0,$$

woraus $us^2 = \alpha$ folgt, unter α eine willkürliche Constante verstanden. Hiermit ist weiter $u = \frac{dV}{ds} = \frac{\alpha}{s^2}$, also $V = \frac{\alpha}{s} + \beta$, wobei für das willkürliche $-\alpha$ wiederum α geschrieben ist. Der Punkt kann nun entweder im inneren Hohlraume der Schicht oder im Aussenraume liegen, wenn er der Masse nicht angehören soll. Für den inneren Hohlraum muss $\alpha = 0$ sein, weil sonst das Potential im Mittelpunkte der Schicht (für $s = 0$) unendlich werden könnte, was nach §. 5 unzulässig ist. Daher ist $V = \beta$, also constant, die Differentialquotienten von V sind Null und die Schicht übt auf den Punkt keine Wirkung aus. Um die Constante β zu finden, kann man V für den Mittelpunkt direct bilden. Es ist, wenn r die Entfernung des Massenelementes dm von diesem Punkte bedeutet,

$$dm = \varrho r^2 d\sigma\, dr$$

für $d\sigma$ als Element des Körperwinkels und folglich

$$V = 4\pi \int_a^b \varrho r\, dr = \beta,$$

wenn a und b den inneren und äusseren Radius der Schicht bedeuten. Für die

Punkte des Aussenraumes ist $\beta = 0$, weil V für $s = \infty$ verschwinden muss. Es bleibt demnach $V = \frac{\alpha}{s}$ und da sV sich für wachsende s der Masse m als Grenze nähert, so muss $\alpha = m$ sein. Demnach ist $V = \frac{m}{s}$,

$$m = 4\pi \int_a^b \varrho r^2 \, dr.$$

Die Derivirten von V nach x, y, z sind:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{m}{s^2} \cdot \frac{x}{s}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{m}{s^2} \cdot \frac{y}{s}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{m}{s^2} \cdot \frac{z}{s}$$

und folglich

$$X = -\frac{\varepsilon \mu m x}{s^3}, \quad Y = -\frac{\varepsilon \mu m y}{s^3}, \quad Z = -\frac{\varepsilon \mu m z}{s^3}, \quad P = \frac{\varepsilon \mu m}{s^2}.$$

Die Schicht zieht einen Punkt des Aussenraumes so an, als ob ihre Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre.

Für einen der Masse angehörigen Punkt ist die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 V}{ds^2} + \frac{2}{s} \frac{dV}{ds} = -4\pi\varrho.$$

Sie geht, wenn man sie mit s^2 multiplicirt, über in

$$\frac{d}{ds}\left(s^2 \frac{dV}{ds}\right) = -4\pi\varrho s^2$$

und liefert, wenn man von $s = a$ an integrirt, für welchen Werth $V = \beta$, also $\frac{\partial V}{\partial s} = 0$ ist:

$$s^2 \frac{dV}{ds} = -4\pi \int_a^s \varrho s^2 ds.$$

Hierin bedeutet, da ϱ mit s variirt, die rechte Seite, abgesehen vom Zeichen, die Masse einer Schicht, welche zu Radien a und s hat, deren äussere Grenzfläche also durch den angezogenen Punkt geht. Ist ihre Masse m', so wird $\frac{dV}{ds} = -\frac{m'}{s^2}$, d. h. eine durch den angezogenen Punkt concentrisch zur Schicht gelegte Kugelfläche theilt dieselbe in zwei Schichten, von denen die äussere nicht auf den Punkt wirkt, während die Wirkung der inneren dieselbe ist, als ob ihre Masse im Mittelpunkte concentrirt wäre. Dies harmonirt mit der vorigen Untersuchung, indem für die erstere Schicht der Punkt ihrem inneren Hohlraume angehört.

Für einen inneren Punkt einer homogenen Vollkugel folgt aus $\frac{dV}{ds} = -\frac{m'}{s^2}$ wegen $m' = \frac{4}{3}\pi\varrho s^3$ der Werth $\frac{dV}{ds} = -\frac{4}{3}\pi\varrho s$, d. h. die Attractionskraft ist proportional der ersten Potenz des Abstandes des afficirten Punktes vom Mittelpunkt.

§. 13. Wir wollen zeigen, dass die §. 9 für das Potential des homogenen Ellipsoids in Bezug auf einen inneren und einen äusseren Punkt gefundenen Ausdrücke, nämlich

$$V = \pi\varrho \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2 + s} + \frac{y^2}{\beta^2 + s} + \frac{z^2}{\gamma^2 + s}\right) \frac{ds}{D},$$

und
$$V = \pi\varrho \int_\sigma^\infty \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2+s} - \frac{y^2}{\beta^2+s} - \frac{z^2}{\gamma^2+s}\right)\frac{ds}{D},$$
wo σ die positive Wurzel der Gleichung $\frac{x^2}{\alpha^2+\sigma} + \frac{y^2}{\beta^2+\sigma} + \frac{z^2}{\gamma^2+\sigma} = 1$ und $D = \sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}$ ist, den Bedingungen des §. 11 genügen.

Zunächst liefert die Differentiation der Gleichung
$$\frac{x^2}{\alpha^2+\sigma} + \frac{y^2}{\beta^2+\sigma} + \frac{z^2}{\gamma^2+\sigma} = 1$$
die Grössen $\frac{\partial\sigma}{\partial x}, \frac{\partial\sigma}{\partial y}, \frac{\partial\sigma}{\partial z}$, nämlich:
$$l\frac{\partial\sigma}{\partial x} = \frac{2x}{\alpha^2+\sigma}, \quad l\frac{\partial\sigma}{\partial y} = \frac{2y}{\beta^2+\sigma}, \quad l\frac{\partial\sigma}{\partial z} = \frac{2z}{\gamma^2+\sigma},$$
wenn
$$l = \frac{x^2}{(\alpha^2+\sigma)^2} + \frac{y^2}{(\beta^2+\sigma)^2} + \frac{z^2}{(\gamma^2+\sigma)^2}.$$
Die Differentiation des Potentials V für den inneren Punkt gibt unmittelbar de Werth:
$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi x \int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha^2+\sigma)D},$$
während die für den äusseren Punkt, weil auch σ veränderlich ist, liefert:
$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi\varrho x \int_\sigma^\infty \frac{ds}{(\alpha^2+s)D} + \pi\varrho\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_\sigma^\infty\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2+s} - \frac{y^2}{\beta^2+s} - \frac{z^2}{\gamma^2+s}\right)\frac{ds}{D}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial x}.$$
Nach einem bekannten Satze über die Differentiation bestimmter Integrale ist aber allgemein:
$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_\sigma^b \psi(s)\,ds = -\psi(\sigma).$$
Daher wird im vorliegenden Falle der zu suchende Differentialquotient nach σ gleich
$$\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2+\sigma} - \frac{y^2}{\beta^2+\sigma} - \frac{z^2}{\gamma^2+\sigma}\right)\cdot\frac{1}{D_\sigma}$$
und verschwindet vermöge der Definitionsgleichung für σ und da $\frac{\partial\sigma}{\partial x}$ nicht unbestimmt wird, so bleibt auch für den äusseren Punkt
$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi\varrho x \int_\sigma^\infty \frac{ds}{(\alpha^2+s)D}.$$

Dass die Ausdrücke für V und $\frac{\partial V}{\partial x}$, sowie die analog gebildeten für $\frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ continuirliche Functionen von x, y, z für den inneren sowohl, wie für den äusseren Punkt sind, erhellt aus denselben unmittelbar, ebenso dass die Continuität beim Durchgange des Punktes durch die Oberfläche des Ellipsoids nicht unterbrochen wird.

Die Bedingungen, dass xV, yV, zV, $x^2\frac{\partial V}{\partial x}$, $y^2\frac{\partial V}{\partial y}$, $z^2\frac{\partial V}{\partial z}$ oder also auch δV und $\delta^2\frac{\partial V}{\partial s}$ an gewisse Grenzen gebunden sind, bewahrheiten sich für den inneren Punkt unmittelbar, denn es ist

$$V < \pi\int_0^\infty \frac{ds}{D}, \quad \text{also} \quad xV < \pi x\int_0^\infty \frac{ds}{D}$$

und ebenso

$$x^2\frac{\partial V}{\partial x} < \varrho x^3\int_0^\infty \frac{ds}{\alpha^2+s}$$

und es ist x an die Grösse der Halbaxe des Ellipsoids, welche in die Richtung der x-Axe fällt, als Grenze gebunden. Um sie aber für einen äusseren Punkt zu verificiren, sei λ die kleinste der drei Halbaxen α, β, γ des Ellipsoids. Es ist dann vermöge $D = \alpha\beta\gamma\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)(\gamma^2+s)} > \alpha\beta\gamma(\lambda^2+s)^{\frac{3}{2}}$

$$V < \pi\varrho\,\alpha\beta\gamma\int_\sigma^\infty \frac{ds}{(\lambda^2+s)^{\frac{3}{2}}},$$

d. h.:

$$V < \frac{2\pi\varrho\,\alpha\beta\gamma}{(\lambda^2+\sigma)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ferner ist absolut genommen:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial V}{\partial x} < 2\pi\varrho\,\alpha\beta\gamma\int_\sigma^\infty \frac{ds}{(\lambda^2+s)^{\frac{5}{2}}},$$

d. h.:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial V}{\partial x} < \frac{4\pi\varrho\,\alpha\beta\gamma}{3(\lambda^2+\sigma)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nun erhält man aus der Gleichung für σ hierzu $\frac{x}{(\alpha^2+\sigma)^{\frac{1}{2}}} < 1$ und hiermit werden

$$xV < 2\pi\varrho\,\alpha\beta\gamma\left(\frac{\alpha^2+\sigma}{\lambda^2+\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x^2\frac{\partial V}{\partial x} < \tfrac{4}{3}\pi\varrho\,\alpha\beta\gamma\left(\frac{\alpha^2+\sigma}{\lambda^2+\sigma}\right)^{\frac{3}{2}},$$

welche Ungleichheiten ihre Gültigkeit bewahren, wenn auch x und damit σ ins Unendliche wächst.

Um zu zeigen, dass die Ausdrücke für V auch der Laplace-Poisson'schen Gleichung genügen, hat man

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -2\pi\varrho\int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha^2+s)D},$$

sowie

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -2\pi\varrho\int_\sigma^\infty \frac{ds}{(\alpha^2+\sigma)D} + \frac{2\pi x}{(\alpha^2+\sigma)D_\sigma}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial x}$$

und daher mit Hülfe der analog gebildeten Ausdrücke einerseits für den inneren Punkt:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -2\pi\varrho\int_0^\infty\left(\frac{1}{\alpha^2+s} + \frac{1}{\beta^2+s} + \frac{1}{\gamma^2+s}\right)\frac{ds}{D},$$

andererseits für den äusseren:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -2\pi\varrho \int_\sigma^\infty \left(\frac{1}{\alpha^2 + s} + \frac{1}{\beta^2 + s} + \frac{1}{\gamma^2 + s}\right) \frac{ds}{D}$$

$$+ \left(\frac{2x}{\alpha^2 + \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{2y}{\beta^2 + \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{2z}{\gamma^2 + \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z}\right) \frac{\pi\varrho}{D_\sigma}.$$

Nun ist aber

$$\int \left(\frac{1}{\alpha^2 + s} + \frac{1}{\beta^2 + s} + \frac{1}{\gamma^2 + s}\right) \frac{ds}{D} = -\frac{2}{D} + Const.,$$

folglich, da $\frac{1}{D}$ für $s = \infty$ verschwindet:

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\alpha^2 + s} + \frac{1}{\beta^2 + s} + \frac{1}{\gamma^2 + s}\right) \frac{ds}{D} = 2.$$

Daher wird die rechte Seite der Gleichung für den inneren Punkt $-4\pi\varrho$, wie es die Poisson'sche Gleichung verlangt. In Betreff der Gleichung für den äusseren Punkt hat man vermöge der zu Anfang dieser Untersuchung aufgestellten Relationen:

$$l \left(\frac{2x}{\alpha^2 + \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{2y}{\beta^2 + \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{2z}{\gamma^2 + \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z}\right)$$

$$= 4 \left(\frac{x^2}{(\alpha^2 + \sigma)^2} + \frac{y^2}{(\beta^2 + \sigma)^2} + \frac{z^2}{(\gamma^2 + \sigma)^2}\right) = 4l.$$

Daher wird der vom Integralzeichen freie Bestandtheil auf der rechten Seite gleich $\frac{4\pi\varrho}{D_\sigma}$. Der erste Bestandtheil ist aber

$$-2\pi\varrho \int_\sigma^\infty \left(\frac{1}{\alpha^2 + s} + \frac{1}{\beta^2 + s} + \frac{1}{\gamma^2 + s}\right) \frac{ds}{D} = -2\pi\varrho \cdot \frac{2}{D_\sigma} = -\frac{4\pi\varrho}{D_\sigma}$$

und wird mithin für den äusseren Punkt die Laplace'sche Gleichung erfüllt.

Man bemerke, dass die zweiten Derivirten der Potentialausdrücke auf der Oberfläche des Ellipsoids nicht zusammenfallen.

§. 14. Nach Behandlung des Potentials von Massen, welche im Raume von drei Dimensionen vertheilt sind, würden wir zu dem Potentiale der massig gedachten Flächen und Linien fortzuschreiten haben. Bei Flächen zeigt sich, dass bereits die ersten Derivirten des Potentials nach den Coordinaten des angezogenen Punktes beim Durchgange durch die Fläche discontinuirlich werden und mit ihnen die Componenten der Kraft. Wir können übrigens die Untersuchung der Flächen- und Linienpotentiale nicht in den Bereich unseres Lehrbuches ziehen, sondern verweisen in dieser Hinsicht auf Gauss, Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältniss des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte, Art. 12 u. s. w., Clausius, die Potentialfunction und das Potential. 3. Aufl. Leipzig 1877. Moigno, *Leçons de mécanique analytique* p. 562.

Ebenso müssen wir eine grosse Anzahl von Sätzen über Körperpotentiale, welche Gauss und Chasles gefunden haben, übergehen; man vgl. neben der Gauss'schen Abhandlung auch die Gauss'sche Lösung des Attractionsproblems des Ellipsoids (*Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum homogeneorum me-*

thodo nova tractata. Gauss' Werke, B. 5, S. 1 u. 279), sowie Jullien, *problèmes de mécanique rationelle*, T. II, p. 307.

Dagegen wollen wir der Anziehung zweier räumlich ausgedehnter Massen aufeinander noch in Kürze gedenken.

Wir wollen annehmen, zwei unveränderliche Systeme Σ, Σ' wirken gegenseitig aufeinander ein, sodass jeder Punkt P des ersten auf jeden Punkt P' des zweiten und umgekehrt jeder Punkt P' des zweiten auf jeden Punkt P des ersten wirkt; die Kräfte, welche diese Einwirkungen darstellen, sollen an Intensität gleich, dem Produkte beider Massen und einer Function der Entfernung beider Punkte proportional, dem Sinne nach aber entgegengesetzt sein. Sämmtliche an den Punkten des Systems Σ wirkenden Kräfte, welche von den Punkten des Systems Σ' herrühren, reduciren wir für irgend einen Punkt O (Fig. 98) des Raumes auf ihre Resultante R und ihr resultirendes Paar H. An allen Punkten des Systems Σ' wirken dieselben Kräfte, nur in entgegengesetztem Sinne genommen; wir wollen auch sie für denselben Punkt O reduciren und erhalten hierdurch ebenfalls eine Resultante R' und ein resultirendes Paar H'. R' und H' sind an Grösse und Richtung gleich R und H, dem Sinne nach jedoch entgegengesetzt. Führt man daher die Construction für die Centralaxe aus, so erkennt man, dass die Centralaxen für beide Systeme in dieselbe Gerade fallen und dass die Paare H_0, H'_0, welche ihr entsprechen, entgegengesetzt gleich sind. Hieraus ergibt sich der Satz:

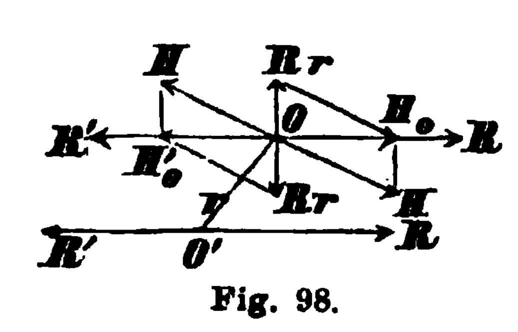


Fig. 98.

Die Kräfte, mit welchen die Massen zweier veränderlicher Systeme, deren Punkte sich proportional dem Produkte ihrer Massen und einer Funktion der Entfernung anziehen oder abstossen, auf einander wirken, sind äquivalent zwei Resultanten R, R' und zwei Kräftepaaren H_0, H'_0 und zwar sind die beiden Resultanten gleich an Intensität, entgegengesetzten Sinnes und fallen in dieselbe Gerade, nämlich die gemeinschaftliche Centralaxe beider Systeme und haben die beiden Paare gleiche Momente, aber entgegengesetzte, der Centralaxe parallele Axen.

Die Kraft R kann man in jedem Punkte der Centralaxe angreifend denken, ebenso die ihr gleiche und entgegengesetzte R'. Nun kann man fragen, in welcher Entfernung von einander die Massen M, M' der beiden Systeme in zwei Punkten vereinigt gedacht werden können, wenn sie sich mit den Kräften R, R' anziehen oder abstossen sollen. Ist $\varphi(r)$ die Function der Entfernung, welche dem zu Grunde liegenden Attractionsgesetze entspricht, so hat man r aus der Gleichung $\varepsilon M M' \varphi(r) = R$ zu suchen. Für die Newton'sche Attraction ist $\varphi(r) = \frac{1}{r^2}$, also $\frac{\varepsilon M M'}{r^2} = R$, mithin $r = \sqrt{\frac{\varepsilon M M'}{R}}$. Demnach kann man sich die Wirkung der beiden Systeme auf einander vorstellen als die Wirkung zweier Punkte aufeinander, in welchen die Massen der Systeme concentrirt gedacht werden, beide auf der gemeinschaftlichen Centralaxe liegend, in Verbindung mit zwei entgegengesetzten Kräftepaaren von gleichen Momenten und Axen parallel der Centralaxe. Die gegenseitige Einwirkung zweier Systeme ist also eine translatorische und eine rotatorische, beides bei beiden in entgegengesetztem Sinne.

In besonderen Fällen können die beiden Paare verschwinden, sodass blos die beiden Resultanten übrig bleiben. Dies tritt ein 1. wenn eines der Systeme sich auf einen einzigen Punkt reducirt; 2. wenn eines der Systeme eine homogene oder concentrisch geschichtete Kugel ist (denn die Resultante der Kräfte, mit welchen ein Punkt der nicht kugelförmigen Masse auf die Elemente der Kugel wirkt, geht durch den Kugelmittelpunkt, folglich auch R als die Resultante aller dieser Resultanten). — Sind die Massen zwei Kugeln von der eben erwähnten Beschaffenheit, so findet dasselbe doppelt statt. Die Kugeln wirken auf einander blos translatorisch, wie wenn ihre Massen in ihren Mittelpunkten vereinigt wären.

Wir wollen jetzt annehmen, die beiden Systeme wirken aus sehr grosser Entfernung auf einander. Je weiter sich Σ' von Σ entfernt, desto mehr nähern sich die Richtungen der an Σ angreifenden Kräfte dem Parallelismus und reduciren sich dieselben immer mehr auf eine blose Resultante R, welche durch den Mittelpunkt der parallelen Kräfte hindurchgeht; um so mehr nähert sich also das Paar H_0 der Null. Aehnliches gilt vom System Σ'. Daher der Satz:

Je weiter sich zwei Systeme von einander entfernen, desto geringer ist die drehende Wirkung, welche sie aufeinander ausüben und um so genauer fällt die Richtung ihrer anziehenden oder abstossenden Wirkung in die Verbindungslinie der Mittelpunkte ihrer Massen.

Vgl. über die hier aufgestellten Sätze: Schell, Ueber die Reduction der Attractionskräfte zweier Massen (Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys. B. III, 1858, S. 80.)

§. 15. Man kann die Untersuchung der Newton'schen Attraction zweier Massensysteme Σ, Σ' auf einander von einer Grösse abhängig machen, welche das Potential V beider Massen auf einander genannt wird. Ist nämlich r der Abstand zweier Massenelemente dm, dm', deren Coordinaten $x, y, z;\ x', y', z'$ sein mögen, wodurch $r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$ wird, so ist diese Grösse

$$V = \int\int \frac{dm\,dm'}{r},$$

wobei von den Integrationen die eine über Σ, die andere über Σ' auszudehnen ist. Um den Zusammenhang von V mit den Componenten X, Y, Z der Resultanten R und L, M, N des resultirenden Paares H aller an Σ angreifenden Kräfte zu erkennen, drücken wir die Aequivalenz aller Anziehungskräfte $\varepsilon\,\frac{dm\,dm'}{r^2}$ mit R und H oder das Gleichgewicht zwischen ihnen und $-X, -Y, -Z;$ $-L, -M, -N$ mit Hülfe des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten aus. Nun ist die virtuelle Arbeit der Attractionskraft, welche am Elemente dm angreift, gleich $-\frac{\varepsilon\,dm\,dm'}{r^2}\cdot\delta r$, wenn δr so verstanden wird, dass in r blos x, y, z sich ändern, oder also $\delta\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\varepsilon\,dm\,dm'$ und die Summe aller dieser virtuellen Arbeiten ist mithin $\varepsilon\int\int\delta\left(\frac{1}{r}\right)\cdot dm\,dm'$ oder $\varepsilon\,\delta V$. Sind ferner $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ unendlich kleine Verschiebungen parallel den Axen, $d\vartheta$, $d\vartheta'$, $d\vartheta''$ unendlich kleine Rotationsamplituden um Axen parallel denselben, so wird

$$-X_1\,\delta\xi - Y_1\,\delta\eta - Z_1\,\delta\zeta - L\delta\vartheta - M\delta\vartheta' - N\delta\vartheta''$$

die virtuelle Arbeit von R und H darstellen und wird man haben

$$\varepsilon \delta V = X \delta \xi + Y \delta \eta + Z \delta \zeta + L \delta \vartheta + M \delta \vartheta' + N \delta \vartheta''.$$

Es stellt demnach die Aenderung des Potentials beim Uebergange des Systems aus einer Lage in die unmittelbar folgende Lage, multiplicirt mit der Kraft, welche zwischen zwei Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung wirkt, die Elementararbeit aller am System angreifenden Attractionskräfte dar.

Das Potential V hängt nun von den Dimensionen, der Massenvertheilung und der relativen Lage beider Systeme gegen einander ab. Ist $O\,(\xi\,\eta\,\zeta)$ irgend ein Punkt von Σ, $O'\,(\xi'\,\eta'\,\zeta')$ ein anderer von Σ' und sind $(\lambda\,\mu\,\nu)$, $(\lambda'\,\mu'\,\nu')$, $(\lambda''\,\mu''\,\nu'')$ die Richtungen dreier in Σ fester, durch O gehender Axen, sowie $(\lambda_1\,\mu_1\,\nu_1)$, $(\lambda'_1\,\mu'_1\,\nu'_1)$, $(\lambda''_1\,\mu''_1\,\nu''_1)$ die Richtungen dreier solcher durch O' gehender, Σ' angehöriger Axen, so ist V eine Function von $\xi, \eta, \zeta;\ \xi', \eta', \zeta'$ und von sechs Winkelgrössen, welche aus den λ und μ gebildet werden können. Ertheilt man nun dem System Σ virtuelle Verschiebungen parallel den absoluten Coordinatenaxen, so ändern sich ξ, η, ζ und ergibt sich

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \xi} = X, \qquad \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \eta} = Y, \qquad \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \zeta} = Z,$$

indem in der Gleichung der virtuellen Arbeit jedesmal alle Verschiebungen bis auf eine verschwinden. Ebenso wenn dem System nach und nach drei Rotationen um Axen parallel den Coordinatenaxen ertheilt werden:

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = L, \qquad \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \vartheta'} = M, \qquad \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \vartheta''} = N,$$

wo aber die hier bezeichneten Differentiationen in solche nach den drei Winkelgrössen, welche die Lage von Σ bestimmen, umzusetzen sind.

Uebrigens erhält man unmittelbar:

$$X = \varepsilon \int\!\!\int \frac{x - x'}{r^3}\, dm\, dm', \qquad L = \varepsilon \int\!\!\int \frac{y z' - y' z}{r^3}\, dm\, dm',$$

$$Y = \varepsilon \int\!\!\int \frac{y - y'}{r^3}\, dm\, dm', \qquad M = \varepsilon \int\!\!\int \frac{z x' - z' x}{r^3}\, dm\, dm',$$

$$Z = \varepsilon \int\!\!\int \frac{z - z'}{r^3}\, dm\, dm', \qquad N = \varepsilon \int\!\!\int \frac{x y' - x' y}{r^3}\, dm\, dm',$$

Die Bedingung, dass die Paare verschwinden, ist:

$$LX + MY + NZ = 0.$$

Ein hierher gehöriges Beispiel bietet die Attraction zweier homogener Ellipsoide dar (vgl. Mertens, Crelle's Journ. B. 68, S. 360). Dirichlet gibt in der §. 9 citirten Abhandlung am Schlusse Andeutungen über die Behandlung dieser Aufgabe, hat aber darüber nichts weiter mitgetheilt.

§. 16. Bei der Fülle des Stoffes, den unser Buch zu bewältigen hat, dürfen wir die Theorie der Attraction nicht weiter verfolgen, müssen uns vielmehr mit der Angabe der nothwendigsten Literatur begnügen. Der Gegenstand ist mit einer grossen Zahl von Gebieten der mathematischen Forschung aufs Engste verknüpft, mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und der allgemeinen Functionentheorie, mit der von Lamé und in neuester Zeit von Somoff sorgfältig studirten Theorie der Differentialparameter, mit der Electrostatik und Electrodynamik, der Theorie der Elasticität, der Wärme und des Magnetismus, mit der

Theorie der Gestalt der Erde u. s. w. Es verdient aber insbesondere hervorgehoben zu werden, dass die ganze Attractionstheorie auf einer geometrischen Grundlage aufgebaut werden kann und die complicirtesten Betrachtungen derselben, welche den Inhalt der Green'schen Sätze bilden, nicht unmittelbar an die Vorstellung von Kräften geknüpft zu werden brauchen. Es hat dies insbesondere Somoff im 2. Bande seiner theoretischen Mechanik gezeigt.

Wir führen noch eine Reihe von Arbeiten an, an welche sich in der einen oder anderen Richtung ein Fortschritt der Attractionstheorie anknüpft.

Laplace, (*Mécan. céleste*, l. II, §. 11., die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung enthaltend). — Poisson's Gleichung (*Bulletin de la société philomatique*, T. III, p. 368). — Green, *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism.* Nottingham 1828, abgedruckt mit kurzer Biographie und anderen einleitenden Notizen von Thomson in Crelle's Journal Bd. 39, p. 73; 44, p. 356; 47, p. 161 u. 195. Von Green rührt der Name Potential her. — Gauss, Allgemeine Lehrsätze, s. oben S. 328. — Chasles, *Mémoire sur l'attraction d'une conche ellipsoïdale infiniment mince, et les rapports qui ont lieu entre cette attraction et les lois de la chaleur en mouvement dans un corps en équilibre de température. Journ. de l'école polytechn.*, Cah. 25, p. 266 (1837); *Enoncé de deux théorèmes généraux sur l'attraction des corps et la théorie de la chaleur. Comptes rendus* 1839; *Theorèmes généraux sur l'attraction des corps. Addit. à la connaiss. des temps p. l'an* 1845 (*publ. en* 1842). — Dirichlet, *sur un moyen général de vérifier l'expression du potentiel relatif à une masse quelconque, homogène ou hétérogène*, Crelle's Journ. Bd. 32, p. 80. — Despeyrous, *Recherches sur les surfaces isothermes et sur l'attraction des ellipsoïdes* (Crelle's Journ. Bd. 31, p. 136). — Sturm, *Note sur un mémoire de M. Chasles* (*Journ. de math.* T. VII, p. 345). — Thomson, *Note sur la théorie de l'attraction* (*Journ. de math.* T. IX, p. 239). — Liouville (*Addit. à la connaissance des temps* p. 1845). — Briot, *sur l'attraction* (*Journ. de math.* T. XI, p. 174). — Heine, Beitrag zur Theorie der Anziehung und der Wärme (Crelle's Journ. Bd. 29, p. 185; Theorie der Anziehung des Ellipsoids, ebend. Bd. 42, p. 70). — Weingarten, Zur Theorie des Potentials (Crelle's Journ. Bd. 49, p. 367). — Amsler, Zur Theorie der Anziehung und der Wärme (Crelle's Journ. Bd. 42, p. 316; neue geometrische Eigenschaft der Niveauflächen, Bd. 42, p. 314). — Scheibner; Ueber das Flächenpotential (Crelle's Journ. Bd. 54, p. 77). — Christoffel, Zur Theorie der einwerthigen Potentiale (Crelle's Journ. Bd. 64, p. 321). — Roch, Ueber eine Transformation des Potentials (Crelle's Journ. Bd. 63, p. 9). — Kronecker, Zur Potentialtheorie (Crelle's Journ. Bd. 70, S. 246). — Grünwald, Zur Theorie des Potentials (Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys. B. 14, S. 521). — Neumann, Ueber die Integration der Gleichung $\Delta \Phi = 0$ (Crelle's Journ. B. 59, S. 335—366). Zur Theorie des Potentials (Mathem. Annal. B. II, S. 574; Revision einiger Sätze aus der Theorie des Newton'schen Potentials (Ebendas. B. III, S. 424); Revision einiger Sätze aus der Theorie des logarithmischen Potentials (Ebendas. B. III, S. 325); Zur Theorie des logarithmischen und Newton'schen Potentials (Ebendas. B. II, S. 558). — Schwarz, Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen (Monatsber. d. Berliner Acad. 1870, S. 767). — Weber, Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varkappa^2 u = 0$

(Math. Annal. B. I, S. 1). — Kötteritzsch, Zur Potentialtheorie (Schlömilch's Zeitschr. f. Mathem. u. Phys., B. 17, S. 232 u. 257); Beitrag zur Mechanik ellipsoidischer Körper (Ebendas. B. 18, S. 252); über das logarithmische Potential (Ebendas. B. 20, S. 341). — Meutzner, Untersuchungen im Gebiete des logarithmischen Potentials (Mathem. Annalen B. 8, S. 319—358).

§. 17. Noch wollen wir aufmerksam machen auf die Untersuchungen über Linien und Flächen gleicher Anziehung, nämlich:

Hirst, *On equally attracting bodies* (*Phil. Magazine*, IV. Ser., Vol. 13 [1857], pp. 305—324; Vol. 16 [1858], pp. 161—177, 266—284); *Note sur les corps qui exercent des attractions égales sur un point matériel* (*Comptes r.* T. XLVII [1858], pp. 274—276).

Auch möge noch auf einige Aufgaben hinsichtlich der Transformation des Potentials und gewisser mit dem Potential in Verbindung stehender Flächen hingewiesen werden:

Didon, *Questions* 1156 *et* 1158 in den *Nouv. annales de Mathém.* II. Ser., Vol. 14 (1875), p. 94 mit den Lösungen von Durrande, Vol. 15 (1876), p. 226 und Morel-Blanc, ibid. p. 41.

Ebenso auf gewisse Aufgaben über Maxima und Minima:

Schellbach, Welche Gestalt muss ein Körper haben, wenn er auf einem Punkt seiner Oberfläche die stärkste Anziehung ausüben soll? (Mechan. u. math. Probleme; Progr. des Friedrich-Wilhelms-Gymn. zu Berlin, 1845.)

Wir wollen eine Bearbeitung des Inhaltes der Schellbach'schen Abhandlung über die Körperform der Maximalanziehung einer homogenen Masse hier anfügen.

Man nehme an, der Punkt A (Fig. 99), die Masseneinheit enthaltend sei der Anziehung aller Punkte des Raumes nach dem Gesetze $\varkappa : r^n$ unterworfen, wo r den Abstand eines anziehenden Punktes, $\varkappa$ die Anziehung in der Entfernung gleich Eins und n irgend eine Zahl bedeute. Auf dem Strale AB wird es dann in der Richtung AB nur einen Punkt B geben, welcher A mit einer Intensität anzieht, welche gleich der Entfernung AB ist. Ist a der Abstand dieses Punktes von A, so muss er der Bedingung $\varkappa : a^n = a$ oder $a^{n+1} = \varkappa$ genügen.

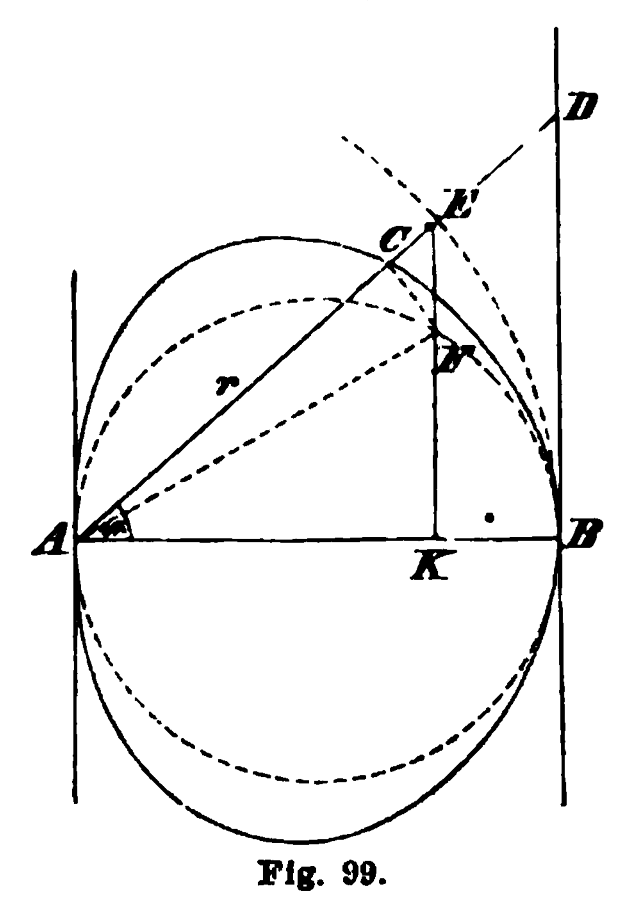


Fig. 99.

Errichtet man in B eine Ebene senkrecht auf AB, so wird man ebenso auf allen Stralen, welche von A nach den Punkten D dieser Ebene führen, Punkte C so finden können, dass die Anziehungkraft von C in Bezug auf A gleich AD ist. Bildet der Radiusvector $AC = r$ eines solchen Punktes C mit AB den Winkel ϑ, so wird wegen $AD \cdot \cos\vartheta = a$ die Gleichung $\varkappa : r^n = a : \cos\vartheta$ oder mit Rücksicht auf $\varkappa = a^{n+1}$ die Gleichung $r^n = a^n \cos\vartheta$ die Rotationsfläche darstellen, welche alle solche Punkte C enthält. Diese Fläche geht durch A und B hindurch und ihr Meridian ist die Curve $(x^2 + y^2)^{n+1} = a^{2n} x^2$ vom Grade $2(n+1)$ in Bezug auf AB als x-Axe und die in A zu ihr senkrechte Gerade der Schnittebene als y-Axe. Die Kraft AD, mit welcher C den Punkt A an-

zieht, zerfällt in zwei Componenten, eine gleich $AB = a$ und eine dazu senkrechte gleich BD. Daher ist die Rotationsfläche der Ort aller Punkte C, welche A in der Richtung AB mit derselben Componente a angreifen.

Für $n = 1$ ist die Meridiancurve der Kreis $r = a \cos \vartheta$ und die Rotationsfläche die Kugel vom Durchmesser AB; für $n = 2$ nimmt sie die Gestalt (Fig. 99) an und kann ihre Gleichung $r^2 = a^2 \cos \vartheta$ leicht construirt werden, indem man sie so schreibt: $r^2 = a \cdot a \cos \vartheta$. Ein Kreis um A mit dem Radius a schneidet nämlich den unter dem Winkel ϑ gegen AB geneigten Stral AC in E so, dass die Projection von AE auf AB gleich $AK = a \cos \vartheta$ wird und ein weiterer Kreis über AB als Durchmesser trifft das Perpendikel EK in F so, dass

$$AF^2 = a \cdot AK = a^2 \cos \vartheta = r^2$$

wird. Daher ist $AF = AC$ auf AD als Radiusvector r aufzutragen. Die Curve ist vom 6. Grade.

Die Rotationsfläche $r^n = a^n \cos \vartheta$, der Ort aller Punkte des Raumes, welche A in der Richtung AB mit derselben Kraft a anziehen, scheidet diejenigen, welche ihn in dieser Richtung stärker anziehen, von denen, deren Wirkung auf ihn schwächer ist. Erstere liegen im Innenraume, letztere im Aussenraume der Fläche. Bringt man daher eine gegebene homogene Masse M in den Innenraum, sodass sie denselben continuirlich erfüllt und dabei homogen bleibt, während sie zu diesem Behufe vielleicht eine Condensation oder Dilatation erleiden muss, so zieht sie den Punkt A der Axe AB mit einer Kraft an, welche grösser ist, als die Anziehung, welche sie ausüben würde, wenn sie bei derselben Dichtigkeit, mit welcher sie den Innenraum der Fläche erfüllt, in irgend eine andere Form gebracht wurde. Denn da die Dichtigkeit keine Aenderung erleiden soll, so ist mit der Aenderung der Form nothwendig ein Austritt von Masse aus dem Innenraum in den Aussenraum verknüpft. Die Anziehung der Masse hat übrigens die Richtung AB, da sämmtliche Componenten senkrecht zu AB sich paarweise tilgen.

Für die Intensität R der Anziehung der Masse M in der Form der Fläche $r^n = a^n \cos \vartheta$ ergibt sich, wenn ϱ ihre Dichtigkeit ist,

$$R = 2\pi\varkappa\varrho \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta \int_0^{a \cos^{\frac{1}{n}} \vartheta} r^{2-n} dr = \frac{2\pi\varrho n}{9-n^2} a^4,$$

indem $\varkappa = a^{n+1}$ ist. Man sieht zugleich, dass die ganze Betrachtung für $n \geqq 3$ nicht mehr gilt, indem in solchen Fällen das Integral nach r unendlich wird. Die Dichtigkeit ϱ ergibt sich aus der Gleichung

$$M = 2\pi\varrho \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{a \cos^{\frac{1}{n}} \vartheta} r^2 dr = \frac{2\pi\varrho n}{3(3+n)} a^3,$$

nämlich

$$\varrho = \frac{3(3+n)}{2\pi n} \frac{M}{a^3}, \text{ und also } R = \frac{3}{3-n} Ma.$$

Für $n = 2$ wird $R = \frac{4}{5} \pi\varrho a^4$, $M = \frac{4}{15} \pi\varrho a^3$, $R = 3Ma$. Bringt man die Masse M bei der Dichtigkeit ϱ, welche sie in der Form der Maximalattraction hat, in der Form einer Kugel, so ergibt sich deren Radius r aus

der Gleichung $M = \frac{4}{3}\pi\varrho r^3 = \frac{4}{15}\pi\varrho a^3$, nämlich $r = a\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$. Die Attraction R' der Kugel auf den Punkt A ihrer Oberfläche wäre $R' = \frac{\varkappa M}{r^2} = aM\sqrt[3]{25}$. Mithin wird

$$R : R' = \sqrt[3]{\frac{27}{25}} = 1.02598.$$

Gauss gibt dies Resultat an in seiner Abhandlung: *Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii* (*Commentatt. soc. regiae sc. Goetting.* Vol. VII [1830] oder Werke, Bd. V, S. 31, Anm.).

XIV. Capitel.

Reduction der Widerstände von Flächen und Curven.

§. 1. Wir haben bereits mehrfach des Widerstandes gedacht, welchen Flächen und Curven von Systemen gegenseitig leisten müssen, wenn sie durch Kräfte in Berührung erhalten werden, sei es, dass letztere sich im Gleichgewichte befinden oder Beschleunigungen hervorrufen. Es wurde dabei aber vorzugsweise der Normalwiderstand berücksichtigt und war von der tangentiellen Componente des Gesammtwiderstandes, der Reibung, nur vorübergehend die Rede. Wenn nun auch eine umfassende theoretische Behandlung der letzteren und insbesondere ihre Reduction auf Resultante und resultirendes Paar bei dem dermaligen Zustande der Wissenschaft noch nicht in allen Fällen geleistet werden kann, so dürfen wir dennoch diesen Gegenstand nicht bei Seite schieben, müssen vielmehr eine Darstellung der betreffenden Lehren geben, welche wenigstens der Hauptsache nach als befriedigend angesehen werden darf. Die praktischen Fragen behandeln wir dabei nicht, weil wir die Gebiete der theoretischen und der angewandten Mechanik möglichst scharf scheiden müssen.

Sind zwei unveränderliche Systeme Σ, Σ' genöthigt, sich mit Flächen oder Curven zu berühren, so kann dieser Zwang durch Kräfte dargestellt werden, welche zu den ohnehin an ihnen wirkenden Kräften hinzutreten. Diese Kräfte heissen Widerstände und zwar sagt man, dass an Σ Widerstände angreifen, welche von Σ' und an Σ' solche, welche von Σ herrühren. Wie auch immer dieselben beschaffen sein mögen, in allen Fällen werden sie an jedem Systeme einer Resultanten und einem resultirenden Paare äquivalent sein.

Wir wollen den Fall betrachten, dass beide Systeme Σ, Σ' sich mit zwei Flächen S, S' berühren, dass die Berührungsstelle ein einziger Punkt A sei und die Kräfte sich im Gleichgewicht befinden, wobei übrigens die

Systeme in Ruhe oder in Bewegung begriffen sein können. Sind die beiden Flächen glatt, so erfährt Σ von Σ' in A einen Widerstand R, welcher eine längs der gemeinsamen Normale wirkende Einzelkraft ohne Kräftepaar ist, welche die Resultante der gegebenen Kräfte, welche nothwendig durch A hindurchgehen muss, tilgt. Ebenso findet dies für Σ' statt. Sind dagegen die sich berührenden Flächen rauh, so wird der Widerstand nicht normal, vielmehr kann er je nach Beschaffenheit der Kräfte und dem Grade der Rauhheit der Fläche mehr oder weniger gegen die Normale geneigt sein; und wenn die gegebenen Kräfte nicht einer durch den Punkt A hindurchgehenden Einzelhraft äquivalent sind, so tritt zu ihm noch ein Widerstand leistendes Paar hinzu, welches mit ihm zusammen die Gesammtwirkung von Σ auf Σ darstellt. Nehmen wir an, die gegebenen Kräfte seien einer durch A hindurchgehenden Einzelkraft äquivalent. Der Fall, dass ein Widerstandspaar auftritt, kann allgemein noch nicht behandelt werden, wielmehr muss in Bezug auf ihn bei jedem einzelnen Problem eine besondere Methode gesucht werden. Legen wir durch die Richtung des Widerstandes und die Normale eine Ebene, so zerfällt in ihr R in zwei Componenten, eine in der Richtung der Normalen wirkende, den Normalwiderstand R_n und eine andere, welche in die Schnittlinie dieser Ebene mit der Tangentenebene in A fällt, die Reibung R_r. Bei glatten Flächen bringt die geringste Aenderung in den an Σ angreifenden Kräften eine sofortige Störung des Gleichgewichtes hervor, sodass Beschleunigung eintritt. In diesem Falle ist $R = R_n$, $R_r = 0$; bei rauhen Flächen kann man aber jene Kräfte sich ändern lassen und es ändert dann R seine Intensität und Neigung gegen die Normale. Lassen wir jene Kräfte sich so ändern, dass R in derselben Normalebene bleibt, also R_r dieselbe Richtung in der Tangentenebene beibehält. Je mehr sich R von der Normalen abbiegt, desto grösser wird das Verhältniss $R_r : R_n$. Bei gegebenem Rauhigkeitszustande in der Richtung von R_r wird diese davon abhängige Componente des Widerstandes bis zu einer gewissen Grenze trotz der Aenderung der Kräfte das Gleichgewicht zu erhalten vermögen, über jene Grenze hinaus aber wird sofort Beschleunigung von A eintreten. Aehnliches gilt für Aenderungen der Kräfte, denen entsprechend R auf die andere Seite der Normalen fällt und der Sinn von R_r sich umkehrt. In der betrachteten Normalebene lassen sich demzufolge durch A zwei Stralen ziehen, welche die äussersten Grenzen der Richtung des Widerstandes bezeichnen, für welche derselbe überhaupt noch Gleichgewicht herbeizuführen im Stande ist. Diese beiden Stralen bestimmen zwei Paar Scheitelräume, in deren einen die Normale fällt. Alle Stralen dieses Scheitelraumes sind mögliche Widerstandsrichtungen, in den anderen Scheitelraum kann der Widerstand nicht fallen.

Man kann sich nun die an Σ angreifenden Kräfte auch so geändert denken, dass R in andere Normalebenen fällt. Da für jede derselben sich die nämlichen Betrachtungen anstellen lassen, so folgt, dass der Berührungspunkt A der Flächen S, S' der Mittelpunkt eines Kegels ist, dessen Erzeugungslinien die äussersten Grenzlagen des noch möglichen Widerstandes der Flächen bezeichnen und dessen die Normale umschliessender Scheitelraum die Richtungen aller möglichen Widerstände erhält. Dieser Kegel heisst der Reibungskegel der beiden Flächen im gemeinsamen Berührungspunkte. Seine Beschaffenheit hängt ab von dem Grade der Rauhigkeit beider Flächen. Er ist ein gerader Kreiskegel mit der Normalen als Axe, wenn in der gemeinschaftlichen Tangentenebene nach allen Richtungen vom Berührungspunkte aus gleiche Rauhigkeit stattfindet, seine Erzeugungslinien biegen sich mehr oder weniger von der Normalen ab, wenn längs den Schnittlinien der durch sie gelegten Normalebenen mit der Tangentenebene ein grösserer oder geringerer Rauhigkeitsgrad stattfindet, also auch ein grösserer oder geringerer Reibungswiderstand geleistet werden kann. Für glatte Flächen zieht sich der Kegel auf die Normale zusammen.

§. 2. Das Verhältniss $R_r : R$ der Componenten des Widerstandes R mag der Coefficient des Widerstandes heissen; er ist die Tangente des Winkels, welchen R mit der Normalen bildet und welcher der Widerstandswinkel genannt wird. Für den Fall, dass der Widerstand eine Erzeugungslinie des Reibungskegels ist, heissen dieser Coefficient und dieser Winkel Reibungscoefficient und Reibungswinkel. Bezeichnen wir sie resp. mit μ und ϱ, so wird

$$\frac{R_r}{R_n} = \mu = \operatorname{tg} \varrho, \quad R_r = \mu R_n, \quad R_n = \frac{R}{\sqrt{1 + \mu^2}} = R \cos \varrho.$$

Der Reibungswiderstand R_r, welcher der äussersten Grenze für irgend eine Richtung in der Tangentenebene entspricht, wird daher erhalten, indem man den Normalwiderstand R_n mit dem Reibungscoefficienten multiplicirt.

Der Reibungscoefficient variirt für ein und denselben Berührungspunkt der sich reibenden Flächen mit der Richtung in der gemeinschaftlichen Tangentenebene und mit der Rauheit der beiden Punkte, welche im Berührungspunkte zusammentreten und kann bis jetzt nicht theoretisch bestimmt werden. Man bedient sich daher in den Anwendungen constanter, durch Versuche festgestellter Mittelwerthe, wie sie die zahlreichen Tafeln der Reibungscoefficienten enthalten.

§. 3. Sobald das Gleichgewicht zwischen den am System angreifenden Kräften und dem Widerstande aufhört, sagt man, es werde die Reibung

überwunden. Für diesen Zustand hat der Widerstand die Grenzlage einer Erzeugungslinie des Reibungskegels und während der Bewegung passirt seine Richtung fortwährend andere und andere Erzeugungslinien der verschiedenen Kegel, welche den verschiedenen Berührungspunkten der Reibungsflächen angehören. Befindet sich das System in Ruhe, so kann Bewegung nur dann eintreten, wenn die Reibung überwunden wird und also die Widerstandsrichtung in die Kegelfläche eingetreten ist. Mit diesem Eintritt besteht noch Gleichgewicht und erst dann, wenn die angreifenden Kräfte die Richtung des Widerstandes nöthigen, in den Aussenraum des Kegels zu treten, erfolgt Beschleunigung.

Für alle Lagen der Widerstandsrichtung im Innern des Reibungskegels besteht Gleichgewicht und zwar ist dasselbe sicher, für alle Lagen in der Kegelfläche selbst wird es unsicher. Ist der Reibungskegel ein gerader Kreiskegel mit der Normalen als Axe, so findet das Maximum der Sicherheit des Gleichgewichtes statt, wenn der Widerstand in die Axe des Kegels fällt.

§. 4. Für das Gleichgewicht von Kräften in Verbindung mit dem Widerstande R der Fläche $U(x, y, z) = 0$, dessen Richtung $(\lambda\,\mu\,\nu)$ sei, hat man wenn die Kräfte äquivalent einer durch den Berührungspunkt gehenden Einzelkraft sind, an der äussersten Grenze des Gleichgewichts die Gleichungen

$$X + R\cos\lambda = 0, \quad Y + R\cos\mu = 0, \quad Z + R\cos\nu = 0,$$

woraus

$$\frac{\cos\lambda}{-X} = \frac{\cos\mu}{-Y} = \frac{\cos\nu}{-Z} = \frac{1}{R},$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

und für den Widerstandswinkel ϑ:

$$\cos\vartheta = \left(X\frac{\partial U}{\partial x} + Y\frac{\partial U}{\partial y} + Z\frac{\partial U}{\partial z}\right) : RW,$$

$$W = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}$$

folgt. Es findet aber auch noch Gleichgewicht für alle Werthe von X, Y, Z statt, wofür $\cos\vartheta$ bis zu Null herabsinkt.

§. 5. Berühren sich die reibenden Flächen mit mehreren Punkten oder längs einer Linie oder im Bereiche eines endlichen Flächenraumes, so kann man den Widerstand, welcher in je einem Punkte, in je einem Linien- oder Flächenelemente auftritt, in eine Normal- und eine Tangentialcomponente zerlegen und alle sammt den ohnehin am System angreifenden Kräften für irgend einen Punkt des Systems reduciren. Die Bedingungen

des Gleichgewichts werden alsdann auch noch innerhalb eines gewissen Spielraums bis zu einem Grenzreibungswiderstande erfüllt werden können, darüber hinaus aber nicht mehr. Es tritt aber hierbei zu der Resultanten ein resultirendes Paar des Widerstandes hinzu, welches der Reibung seinen Ursprung verdankt. Eine allgemeinere Untersuchung dieses Gegenstandes fehlt bis jetzt in der Literatur, einen speciellen Fall werden wir weiter unten behandeln.

§. 6. Wenn ein System Σ genöthigt ist, mit einer Curve einen Punkt gemeinschaftlich zu haben, so kann ein Widerstand R die Curve vertreten. Derselbe kann in eine Componente R_r längs der Tangente und eine andere R_n, welche in die Normalebene fällt, zerlegt werden. Die erstere heisst wieder die Reibung, letztere der Normalwiderstand, das Verhältniss beider $R_r : R_n$ der Widerstandscoefficient und der Winkel, den R mit der Normalebene der Curve bildet, der Widerstandswinkel. Der von der Curve zu leistende Widerstand ist seiner Intensität und Richtung nach von den am System angreifenden Kräften, der Beschaffenheit der Curve und des Systems in dem gemeinschaftlichen Punkte abhängig, jedoch so, dass bei Aenderung der Kräfte eine Grenze von R_r nicht überschritten werden darf, ohne dass Gleichgewicht zwischen jenen Kräften und dem Widerstande aufhört, möglich zu sein. Die Grenzlagen aller Widerstandsrichtungen, für welche Gleichgewicht noch möglich ist, bilden einen Kegel, welcher in den extremsten Fällen in die Normalebene degenerirt. Das Verhältniss $R_r : R_n$ für eine Grenzlage des Widerstandes heisst der Reibungscoefficient μ auf der Curve und der Winkel ϱ, den sie mit der Normalebene der Curve bildet und für welchen $\tang \varrho = \mu$ ist, der Reibungswinkel.

Für den Fall des Gleichgewichtes auf der Curve $x = \varphi(z)$, $y = \psi(z)$ hat man, wenn die Kräfte einer Einzelkraft äquivalent sind,

$$X + R\cos\lambda = 0, \quad Y + R\cos\mu = 0, \quad Z + R\cos\nu = 0,$$

$$\frac{\cos\lambda}{-X} = \frac{\cos\mu}{-Y} = \frac{\cos\nu}{-Z} = \frac{1}{R}, \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

und für den Winkel ϑ, den der Widerstand mit der Normalebene bildet:

$$\sin\vartheta = \frac{X}{R}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{R}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{R}\frac{dz}{ds}, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

jedoch findet auch Gleichgewicht statt für alle X, Y, Z, wofür ϑ bis zu Null abnimmt.

§. 7. Damit Kräfte, welche an einem System angreifen, welches sich mit einem Punkte auf eine Fläche oder Curve stützt, und sich auf eine blose Resultante reduciren, welche durch den Stützpunkt geht, im Gleichgewichte seien, ist erforderlich, dass diese gegen die Fläche oder Curve andrückt und in den Innenraum des Reibungskegels oder auf dessen Ober-

fläche fällt. Im ersteren Falle ist das Gleichgewicht sicher, im zweiten unsicher. Um nun, während die Kräfte ihre Richtung und Intensität beibehalten, den Stützpunkt in irgend einer Richtung soweit zu verschieben, dass für dieselbe die Grenze des Gleichgewichts erreicht wird, ist eine positive Arbeit einer Kraft erforderlich und zwar von endlicher Grösse. Sobald dies erreicht ist, genügt eine fernere unendlich kleine Arbeit, um den Punkt zu beschleunigen. Da dieselbe gleichfalls positiv sein muss, weil sie den Punkt, der die Beschleunigung Null besass, beschleunigt, so folgt, dass die Elementararbeit der Resultanten der gegebenen Kräfte und des Widerstandes zusammen negativ ist, an der Grenze des Gleichgewichts aber Null wird, und da die virtuelle Arbeit der Kräfte der virtuellen Arbeit ihrer Resultanten gleich ist, so folgt weiter, dass für jede virtuelle Verschiebung des Stützpunktes aus der Lage des sicheren Gleichgewichts die Summe der Elementararbeiten aller Kräfte und des Widerstandes negativ ist und dass dasselbe bis an die Grenze des möglichen Gleichgewichts gilt. Die Arbeit des Widerstandes zerfällt dabei in zwei Theile, die des Normalwiderstandes und die der Reibung. Für unveränderliche Flächen und Curven ist erstere Null.

Jedes beliebige veränderliche System kann in Theilsysteme zerlegt werden von endlicher oder unendlicher Anzahl mit äusseren und inneren Kräften, welche an freien Punkten oder an Punkten angreifen, welche auf Flächen oder Curven zu bleiben gezwungen sind, welche letzteren im Allgemeinen Reibungswiderstände darbieten werden. Zum Gleichgewichte des ganzen Systems ist dann erforderlich und hinreichend, dass in jedem Angriffspunkte von Kräften die Resultante aller verschwinde, bei einem freien Punkte, oder in das Innere oder auf die Fläche des Reibungskegels falle, bei Stützpunkten.

Zum Gleichgewichte des Systems ist aber auch erforderlich und hinreichend, dass die Summe aller virtuellen Arbeiten, der äusseren, inneren und der Widerstandskräfte für jede mit der Natur des Systems verträgliche Verschiebung Null oder negativ sei. Null ist sie für solche Gleichgewichtszustände, welche an der Grenze des Eintritts von Beschleunigung stehen, negativ für alle übrigen.

§. 8. Beispiele und Anwendungen.

1. **Ein biegsamer Faden ist über eine ebene Curve hingespannt; dieselbe ist rauh und bietet in Bezug auf den Faden in allen Punkten constanten Reibungswiderstand dar; an den Enden ziehen zwei Kräfte P, Q tangential. Man soll die Spannung und den Widerstand für den Fall des Gleichgewichts bestimmen.**

Projicirt man die im Punkte M der Curve sich Gleichgewicht haltenden Kräfte, die Spannungen $T + dT$, $-T$ und den Gesammtwiderstand R (auf die Längeneinheit bezogen) auf die Tangente und Normale, so erhält man, wenn ds

der Contingenzwinkel, ϱ der Krümmungshalbmesser, μ der Widerstandscoefficient R_n und R_r die Componenten von R sind $(T + T) \sin d\varepsilon - R_n ds = 0$, $(T + dT) \cos d\varepsilon - T - \mu R_n ds = 0$, oder abgekürzt, wegen $ds = \varrho d\varepsilon$:

$$T = R_n \cdot \varrho\,, \quad dT - \mu R_n ds = 0$$

und hiermit weiter $\frac{dT}{T} = \mu \frac{ds}{\varrho} = \mu d\varepsilon$, folglich $T + Ce^{\mu\varepsilon}$, wenn ε den Winkel bedeutet, den die Tangente in M mit einer festen Richtung bildet, dessen Differential also der Contingenzwinkel $d\varepsilon$ ist. Auf die Endspannungen P, Q angewandt gibt diese Gleichung

$$P = Ce^{\mu\varepsilon_1}, \quad Q = Ce^{\mu\varepsilon_2},$$

wenn ε_1, ε_2 die Winkel ε für die Endrichtungen sind. Hieraus folgt

$$T = Pe^{\mu(\varepsilon - \varepsilon_1)}$$

und die Bedingung des Gleichgewichts:

$$\frac{P}{Q} \leqq e^{\mu(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)},$$

wodurch μ näher bestimmt wird. Das Gleichheitszeichen gilt für den Grenzzustand des Gleichgewichts. Sobald μ bekannt ist, erhält man weiter

$$R_n = \frac{T}{\varrho} = \frac{P}{\varrho} e^{\mu(\varepsilon - \varepsilon_1)}, \quad R_r = \mu R_n = \frac{\mu P}{\varrho} e^{\mu(\varepsilon - \varepsilon_1)},$$

$$R = R_n \sqrt{1 + \mu^2} = \frac{P}{\varrho} \sqrt{1 + \mu^2} \cdot e^{\mu(\varepsilon - \varepsilon_1)}.$$

Sind P und Q parallel und von demselben Sinne, so ist $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = -\pi$, mithin die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{P}{Q} \leqq e^{\mu\pi}.$$

2. Ein biegsamer Faden wird von zwei Endkräften P, Q über eine rauhe krumme Fläche gespannt, für welche bezüglich des Fadens in jedem Punkte der Reibungskegel bekannt ist: man soll Spannung und Flächenwiderstand für den Fall bestimmen, dass die Fadencurve in der Grenzlage des Gleichgewichts ist, dass eine geringe Aenderung einer der Endkräfte hinreicht, sie auf der Fläche gleiten zu machen.

Indem man die in einem beliebigen Punkte M der Fadencurve sich Gleichgewicht haltenden Kräfte $T + dT$, $-T$, R, welche in der Schmiegungsebene des Punktes M liegen, auf die Tangente und Hauptnormale projicirt, erhält man, wie bei der vorigen Aufgabe,

$$T = R_n \varrho\,, \quad dT + \mu R_n ds = 0,$$

unter ϱ den Krümmungshalbmesser der Fadencurve verstanden. Aus diesen Gleichungen folgt

$$\frac{dT}{T} = -\mu \frac{ds}{\varrho} = -\mu d\varepsilon,$$

wenn wieder $d\varepsilon$ den Contingenzwinkel bedeutet. Die Integration liefert mit Rücksicht auf P und Q:

$$T = Pe^{-\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \mu d\varepsilon}, \quad \frac{P}{Q} = e^{-\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \mu d\varepsilon};$$

ε_1, ε_2 sind die Winkel, welche auf der abgewickelten Tangentenfläche der Fadencurve die Endtangenten, oder also die Richtungen von P und Q mit einer festen Richtung bilden und $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ ist die Summe der Contingenzwinkel.

Der Widerstandscoefficient μ ist die Tangente des Winkels, den R mit der Normalen der Fläche bildet. Die Normalebene der Fläche, welche durch R geht, bildet mit der die Curve berührenden Normalebene einen Winkel ψ, welcher im vorliegenden Falle Null sein muss. Denn die Punkte der Fadencurve beginnen eben in den Tangenten derselben beschleunigt zu werden und die Richtung der Reibung ist immer entgegengesetzt der beginnenden Beschleunigung. Die Schnittlinie der Normalebene, welche durch R geht, mit der Tangentenebene ist aber die Richtung, in welcher R_r wirkt, weshalb sie mit der Tangente zusammenfallen muss. Der Winkel ψ ergibt sich nun im Allgemeinen so. Die Schmiegungsebene und die Normalebene der Fadencurve bestimmen mit der Normalebene der Fläche, welche den Widerstand enthält, ein sphärisches Dreieck $RN\varrho$ (Fig. 100), dessen zwei Ecken N ϱ durch die Richtungen der Flächennormalen und der Hauptnormalen der Curve bezeichnet werden. Die Seite RN ist der Reibungswinkel, also $\operatorname{tg} RN = \mu$, die Seite $N\varrho = \alpha$ ist die Neigung der Schmiegungsebene der Fadencurve gegen die sie berührende Normalebene der Fläche, die dritte Seite wird gebildet von dem Winkel zwischen dem Widerstande R und der Hauptnormalen der Curve; ihre Tangente sei $\varkappa$. Von den Winkeln des Dreiecks ist $(R\varrho, \alpha) = \frac{1}{2}\pi$ und $(RN, \alpha) = \frac{1}{2}\pi - \psi$. Demnach hat man

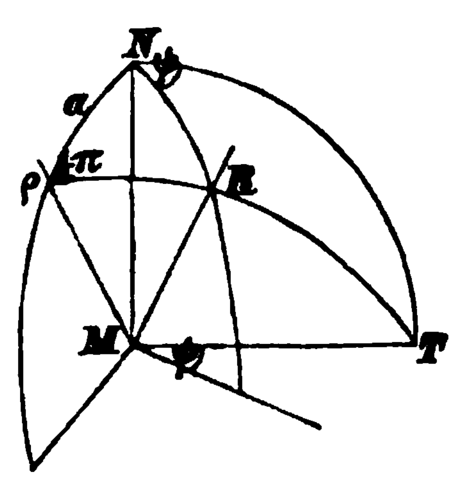


Fig. 100.

$$\cos RN = \cos R\varrho \cdot \cos\alpha, \qquad \sin RN = \frac{\cos R\varrho}{\cos\psi},$$

woraus

$$\cos\psi \cdot \operatorname{tg} RN = \frac{\operatorname{tg} R\varrho}{\cos\alpha},$$

d. h.

$$\cos\psi = \frac{\varkappa}{\mu} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$$

folgt. Nach dem **Meunier'schen** Satze besteht aber zwischen den Krümmungshalbmessern ϱ_0 und ϱ des berührenden Normalschnitts und der berührten Curve die Relation $\varrho = \varrho_0 \cos\alpha$, daher wird schliesslich

$$\cos\psi = \frac{\varkappa}{\mu} \cdot \frac{\varrho_0}{\varrho}.$$

Die Bedingung der Aufgabe fordert, dass diese Grösse 1, also $\varrho : \varrho_0 = \varkappa : \mu$ werde. Dieselbe wird nur durch die kürzeste Linie als Fadencurve befriedigt denn wenn ψ verschwindet, fällt R in die Ebene des berührenden Normalschnitts, wird $\mu = \varkappa$, also $\varrho = \varrho_0$ und fällt die Schmiegungsebene mit jener Normalebene zusammen. **Die kürzeste Linie ist demnach die Gleichgewichtsform des Fadens, auch bei Reibung an der Grenze des Gleichgewichts.**

Für den Kreiscylinder als Fläche und die Schraubenlinie (kürzeste Linie) als Gleichgewichtsform hat man die Gleichgewichtsbedingung für die Grenze am Gleiten bei constantem μ:

$$\frac{P}{Q} = e^{-\mu\int\limits_0^s \frac{ds}{\varrho}} = e^{-\frac{\mu}{\varrho}s},$$

da ϱ constant ist. Bezeichnet α den Winkel der Schraubenlinie gegen die Erzeugungslinie des Cylinders, a den Radius des Kreisschnitts, so wird

$$\varrho = \frac{R}{\sin^2\alpha}, \quad s = \frac{2n\pi a}{\sin\alpha},$$

wenn n die Anzahl der Umwickelungen des Fadens ist und hiermit

$$\frac{P}{Q} = e^{-2n\pi\mu\sin\alpha}.$$

Für grosse Q wird bei α nahezu gleich $\frac{1}{2}\pi$ und bei vielen Umwickelungen P sehr klein. Hieraus ergibt sich leicht, welchen Vortheil man in den Anwendungen von der Reibung in diesem Sinne ziehen kann.

3. Eine homogene Gerade vom Gewichte G und der Länge $2a$ liegt mit ihrem Schwerpunkte S auf einer verticalen ebenen Curve in C auf; sie wird an den Enden A und B mit Gewichten P und $P+p$ belastet; in welcher Grenzlage (Fig. 101) wird Gleichgewicht eintreten, wenn der Reibungscoefficient μ ist?

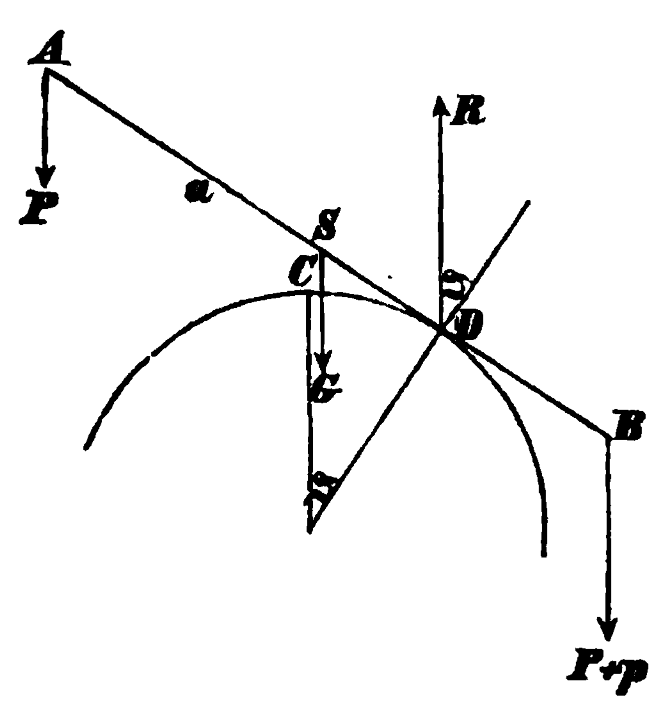


Fig. 101.

Ist D der Berührungspunkt für die Grenzlage des Gleichgewichtes, an welchem der Widerstand R wirkt und reduciren wir die Kräfte für den Punkt S, so folgt, wenn $SD = \text{Bog}\, CD = s$ gesetzt wird:

$$R = 2P + p + G, \quad Rs = pa.$$

Um s zu finden, sei $y = f(x)$ die Gleichung der Curve, bezogen auf eine horizontale x-Axe und verticale y-Axe. Da R vertical ist und mit der Normalen den Reibungswinkel bildet, so ist μ gleich der Tangente des Winkels, den die Gerade mit der x-Axe bildet, d. h. $f'(x) = \mu$. Der grösste Werth ξ von x, welcher dieser Gleichung genügt, liefert

$$s = \int_0^\xi dx \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Für einen Kreis vom Radius r z. B. ist der Reibungswinkel gleich dem Winkel ϑ der Normalen in C und D, also $\operatorname{tg}\vartheta = \mu$ und folglich wegen $s = r\vartheta$

$$(2P + G)\, r\vartheta = p\,(a - r\vartheta)$$

die Bedingung des äussersten Gleichgewichtes.

4. Ueber einen homogenen vertical stehenden Kreis vom Radius a (Fig. 102) ist ein Faden gelegt, welcher von zwei Gewichten P, $P+p$ gespannt wird. Der Kreis berührt mit Reibung eine feste Horizontale und besitzt das Gewicht G. Welchen Widerstand hat die Horizontale zu leisten für den Fall der äussersten Grenze des Gleichgewichts?

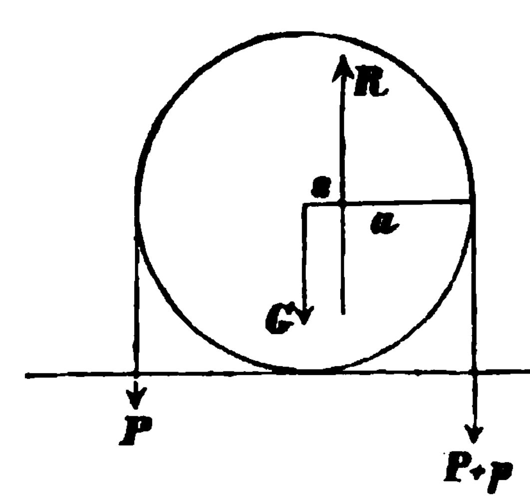


Fig. 102.

Die Kräftereduction für den Berührungspunkt des Kreises liefert eine Resultante $2P + p + G$ und ein resultirendes Paar pa, welchen der Widerstand Gleich-

gewicht zu halten hat. Hierzu genügt ein Widerstand R, welcher im Abstande s vom Berührungspunkte vertical aufwärts gerichtet ist, so beschaffen, dass

$$R = 2P + p + G, \quad Rs = pa$$

wird. Sobald p um ein Weniges zunimmt, rollt der Kreis auf der Geraden. $\frac{s}{a}$ heisst der Reibungscoefficient des Rollens; es ist

$$\frac{s}{a} = \frac{p}{2P + p + G}.$$

In der Theorie der Bewegung der Systeme werden wir noch Gelegenheit haben, über Fragen vorliegender Art zu sprechen. Vgl. übrigens Dorna, *nozioni teoretiche sull' attrito* [Battaglini, *Giornale di matematica*, Vol. III (1865), p. 202].

Vierter Theil.

Theorie der durch Kräfte erzeugten Bewegung
(Kinetik oder Dynamik im engeren Sinne).

I. Capitel.

Allgemeine Erörterungen. Kinetik der Momentankräfte am unveränderlichen System.

§. 1. Die Kinetik behandelt die aus der Wirkung von Kräften folgenden Bewegungszustände. Aus einem System von Momentankräften entspringt ein Geschwindigkeitszustand, aus einem System continuirlicher Kräfte erster Ordnung ein Beschleunigungszustand erster Ordnung, aus einem Kräftesystem 2., 3., ... n^{ter} Ordnung ein Beschleunigungszustand 2., 3., ... n^{ter} Ordnung. Die individuelle Natur dieser Bewegungszustände hängt ab von der speciellen Beschaffenheit des beweglichen Systems, an welchem die Kräfte angreifen; sie sind andere für das unveränderliche, wie für das veränderliche System. Vermöge des Zusammenhanges, welcher einerseits zwischen den Bewegungszuständen der aufeinanderfolgenden Ordnungen, andererseits zwischen den Kräften verschiedener Ordnungen besteht, steigt die Kinetik von einem Bewegungszustande höherer Ordnung zu den Bewegungszuständen niederer Ordnung mit Hülfe der Integration von Differentialgleichungen auf. Indem sie diese Aufgabe löst, erweist sie sich als die Umkehrung der Kinematik, welche mit Hülfe der Differentiation von den Bewegungszuständen niederer Ordnung zu denen höherer Ordnung fortschreitet. Ebenso kann die Kinetik aus einem Kräftesystem irgend einer Ordnung Kräftesysteme niederer Ordnung ableiten, welche die Bewegungszustände niederer Ordnung hervorrufen können. Es verdient daher dieser Zweig der Mechanik in doppeltem Sinne den Namen einer umgekehrten Methode, nämlich der umgekehrten Methode der Bewegung und der Kräfte. Wenn auch zugegeben werden kann, dass diese Duplicität an sich überflüssig sei und wenn man selbst vermuthen darf, dass die Kräfte mit der Zeit aus der Mechanik verschwinden werden, so ist man doch

heutzutage noch nicht berechtigt, den Ueberfluss bei Seite zu schieben, vielmehr verpflichtet, möglichst viel Nutzen von ihm zu ziehen.

Wir beginnen mit der Reduction der Momentankräfte, welche einem unveränderlichen System einen gegebenen Geschwindigkeitszustand zu ertheilen vermögen.

§. 2. Nach S. 5 hat die Momentankraft, welche einem Punkte von der Masse m die Geschwindigkeit v augenblicklich zu ertheilen vermag, die Intensität mv, fällt in die Richtung der Tangente an die Bahn des Punktes und stimmt dem Sinne nach mit v überein.

Das unveränderliche Punktsystem besitze zur Zeit t eine Translationsgeschwindigkeit v. Die Momentankräfte mv, welche Richtung und Sinn mit v gemein haben, liefern für irgend einen Reductionspunkt O die Momentanresultante $R = \Sigma mv = v\Sigma m = Mv$ derselben Richtung und desselben Sinnes, wobei M die Gesammtmasse des Systems bezeichnet und ein Paar dessen Axenmoment N senkrecht zu R ist und mit Hülfe eines ebenen Polygons der Axenmomente aus den Axenmomenten mvp, $m'v'p'$, ... als deren geometrische Summe hervorgeht, wo die Grössen p die Abstände der Momentankräfte mv vom Punkte O darstellen. Die Reduction (R, N) für den Punkt O, resp. für den Stral μ des Punktes O von der Richtung der Translationsgeschwindigkeit v, hat daher die Elemente

$$R = Mv, \quad [N] = \Sigma [mvp].$$

Nach B. I, S. 54 ist das System der Momentankräfte äquivalent der Einzelkraft $R = Mv$ längs der Centralaxe und besitzt einen Mittelpunkt, welcher, weil die Kräfte den Massen der Angriffspunkte proportional sind und die Grösse v aus den Gleichungen herausfällt nach B. I, S. 74 mit dem Massenmittelpunkte identisch ist (denn für seine Coordinaten bestehen die Gleichungen $Mvx_1 = \Sigma mvx, \ldots$, d. h. $Mx_1 = \Sigma mx, \ldots$). Daher der Satz:

Die Momentankräfte, welche einem unveränderlichen System von der Masse M die Translationsgeschwindigkeit v, die dasselbe zur Zeit besitzt, augenblicklich zu ertheilen vermögen, sind äquivalent einer Einzelresultanten $R = Mv$, gleich dem Producte aus der Translationsgeschwindigkeit und der Gesammtmasse des Systems, deren Richtung durch den Massenmittelpunkt hindurchgeht und mit der Translationsgeschwindigkeit parallel und gleichen Sinnes ist.

Diese Momentankraft R vermag einem Punkte von der Masse M die Geschwindigkeit v zu ertheilen; indem man zu diesem Punkte den Massenmittelpunkt wählt, folgt weiter:

Die Resultante R besitzt eine Intensität, vermöge welcher sie dem Massenmittelpunkte, wenn in ihm die Gesammtmasse

des Systems vereinigt wäre, die Geschwindigkeit v zu ertheilen vermöchte.

§. 3. Das System besitze eine Winkelgeschwindigkeit ω um eine Momentanaxe c (Fig. 103). Vermöge derselben hat ein Punkt M im Abstande $MP = r$ von c die Geschwindigkeit ωr senkrecht zur Ebene (cr) und ist die Momentankraft, welche ihm dieselbe zu ertheilen vermag, gleich $m\omega r$, wenn m die Masse des Punktes ist. Wir wollen alle diese Momentankräfte für den Punkt O reduciren, in welchem die Axe c von

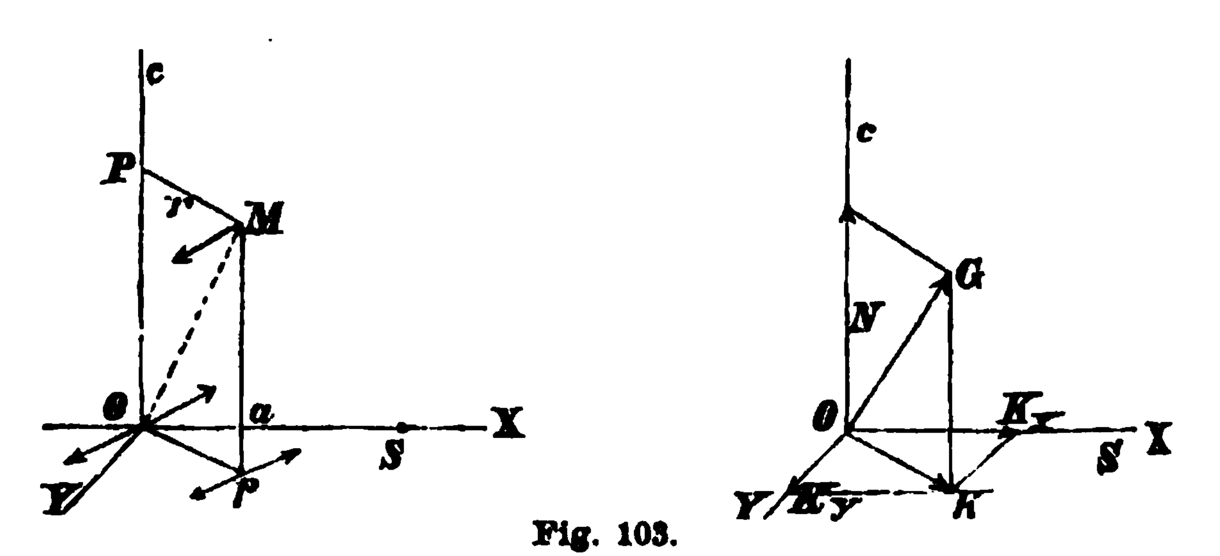


Fig. 103.

einer durch den Massenmittelpunkt S des Systems gehenden, zu ihr senkrechten Ebene geschnitten wird. Den Punkt O wählen wir zum Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y, z, dessen positive x-Axe in OS fällt, dessen z-Axe nach Richtung und Sinn mit c zusammenfällt und dessen y-Axe so gerichtet ist, dass der Drehungssinn von der positiven x-Axe zur positiven y-Axe mit dem Sinne von ω harmonirt. Um die Reductionsresultante $[R] = \Sigma[m\omega r]$ darzustellen, sei α der Neigungswinkel von r gegen die x-Axe; dann sind $\frac{1}{2}\pi + \alpha$, α die Winkel, welche die Kraft $m\omega r$ mit den Axen der x, y bildet, und also $-y:r$, $x:r$ deren Richtungscosinusse. Daher sind die Componenten X, Y von R nach diesen Axen

$$X = -\omega\Sigma my = -\omega My_1 = 0, \quad Y = \omega\Sigma mx = \omega Ma,$$

wenn $a = OS$ den Abstand des Massenmittelpunktes S von O und M die Masse des Systems bedeutet. Hiermit wird

$$R = \omega Ma$$

und ist senkrecht zur xz-Ebene, dem Sinne nach mit ω übereinstimmend. Da ωa die Geschwindigkeit von S ist, so würde R einem Punkte von der Masse M die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes ertheilen können.

Das Axenmoment G des resultirenden Paares der Momentankräfte ist die geometrische Summe der Axenmomente $m\omega r \cdot OM$, welche den Ebenen (cr) parallel laufen. Um G bequemer zu bilden, spalten wir jedes Paar in zwei andere, indem wir an dem Fusspunkte p der z-Coordinate von M zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte $m\omega r$ anbringen. Das eine dieser Paare fällt in die xy-Ebene und stimmt mit dem Sinne von ω überein, das andere

ist senkrecht zur Ebene (cr). Das Axenmoment des ersteren ist $m\omega r^2$ und stimmt nach Richtung und Sinn mit ω, das des zweiten ist $m\omega rz$ und dem Sinne nach entgegengesetzt mit r. Sämmtliche Axenmomente der ersteren Paare liefern daher ein Paar vom Axenmomente $N = \omega \Sigma mr^2$, parallel und gleichen Sinnes mit ω; die Axenmomente der letzteren wollen wir aber wieder, jedes in zwei andere spalten. Die Richtungscosinusse von $m\omega rz$ sind $-x:r$, $-y:r$; es zerfällt daher dies Axenmoment in die beiden Axenmomente $-m\omega xz$ und $-m\omega yz$, parallel der x- und y-Axe. Daher liefern sämmtliche Axenmomente $m\omega rz$ parallel diesen Axen die Axenmomente $K_x = -\omega \Sigma mxz$, $K_y = -\omega \Sigma myz$, welche zu einem Axenmomente K parallel der xy-Ebene zusammentreten, welches wir sofort näher angeben wollen. Um abzukürzen, wollen wir ähnlich, wie wir das Trägheitsmoment Σmr^2 durch das Product aus der Masse M des Systems und dem Quadrate des Trägheitsradius $\varkappa$ darstellen können, auch die Quotienten der Deviationsmomente und der Masse, nämlich die Grössen $\Sigma mxz : M$ und $\Sigma myz : M$ mit λ^2 und μ^2 bezeichnen, so dass wir überhaupt setzen

$$\Sigma mr^2 = M\varkappa^2, \quad \Sigma mxz = M\lambda^2, \quad \Sigma myz = M\mu^2.$$

Dabei verdient jedoch bemerkt zu werden, dass während der Trägheitsradius $\varkappa$ stets reell ist, die Radien λ, μ der Deviationsmomente Σmxz, Σmyz auch imaginär werden können, wenn nämlich diese Momente negativ ausfallen. Wir erhalten daher

$$N = \omega M\varkappa^2, \quad K_x = -\omega M\lambda^2, \quad K_y = -\omega M\mu^2$$

und

$$K = (K_x^2 + K_y^2)^{\frac{1}{2}} = \omega M (\lambda^4 + \mu^4)^{\frac{1}{2}},$$

sowie für die Neigung ε von K gegen die x-Axe

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{K_y}{K_x} = \frac{\mu^2}{\lambda^2}.$$

Aus N und K erhalten wir G und seine Neigung ψ gegen die Axe c mit Hülfe der Gleichungen:

$$G = (N^2 + K^2)^{\frac{1}{2}} = \omega M (\varkappa^4 + \lambda^4 + \mu^4)^{\frac{1}{2}}, \ \operatorname{tg} \psi = \frac{K}{N} = \frac{1}{\varkappa^2} (\lambda^4 + \mu^4)^{\frac{1}{2}}.$$

Dies liefert uns den Satz:

Die Momentankräfte eines unveränderlichen Systems, welches eine Winkelgeschwindigkeit ω um eine Momentanaxe c besitzt, sind äquivalent einer Resultanten R, senkrecht zu der Ebene, welche den Massenmittelpunkt S und die Axe c enthält in Verbindung mit einem Paare, dessen Axenmoment G im Allgemeinen gegen die Momentanaxe geneigt ist. Die Resultante besitzt eine der Masse M des Systems der Winkelgeschwindigkeit ω und dem Abstande a der Axe c vom Massenmittelpunkte proportio-

nale Intensität $R = M\omega a$ und stimmt der Richtung und dem Sinne nach mit der Geschwindigkeit ωa des Massenmittelpunktes überein, sodass sie diesem Punkte, wenn in ihm die Masse des Systems vereinigt wäre, die Geschwindigkeit ωa zu ertheilen vermöchte, welche derselbe der Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe verdankt. Das Axenmoment G des resultirenden Paares ist der Winkelgeschwindigkeit ω proportional und zerfällt in zwei Componenten, von denen die eine parallel, die andere senkrecht zur Momentanaxe ist. Für den Schnittpunkt der zur Momentanaxe senkrechten Ebene des Massenmittelpunktes als Reductionspunkt ist die zu c parallele Componente $N = \omega M\varkappa^2$ das Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit und dem Trägheitsmomente des Systems in Bezug auf die Momentanaxe und zerfällt die zur Axe c senkrechte Componente K in zwei andere zu einander rechtwinklige Componenten K_x, K_y parallel und senkrecht zum Abstande a des Massenmittelpunktes und der Momentanaxe. Diese Componenten $K_x = -\omega M\lambda^2$, $K_y = -\omega M\mu^2$ sind den Deviationsmomenten $\Sigma mxz = M\lambda^2$, $\Sigma myz = M\mu^2$ proportional, welche der Ebene der Momentanaxe, welche den Massenmittelpunkt enthält und der zu ihr senkrechten Ebene der Momentanaxe entsprechen.

Aus diesem Satze ergeben sich sofort die weiteren Folgerungen:

1. Die Resultante $R = M\omega a$ verschwindet blos dann, wenn $a = 0$ ist, d. h. die Momentankräfte sind stets, aber auch nur dann einem Paare äquivalent, wenn die Momentanaxe durch den Massenmittelpunkt hindurchgeht.

2. Das Axenmoment G ist nur dann zur Momentanaxe c parallel, wenn diese eine Hauptaxe ist. Denn es müssen hierfür die Deviationsmomente Σmxz und Σmyz verschwinden.

Wir können die Reduction (R, G) der Momentankräfte für den Punkt O auf den Massenmittelpunkt S übertragen, indem wir in S zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte R und $-R$ zufügen und das Axenmoment $-Ra = -\omega Ma^2$ des sich hierdurch bildenden Paares $(R, -R)$ mit G verbinden. Da dies Axenmoment parallel N ist, so summirt es sich mit ihm zu dem N des Punktes S, welches wir mit N_0 bezeichnen, nämlich $N_0 = M\varkappa^2 - \omega Ma^2$. Bezeichnen wir das Trägheitsmoment des Systems in Bezug auf die zu c parallele Axe c_0 des Punktes S mit $M\varkappa_0^2$, so wird $M\varkappa^2 = M\varkappa_0^2 + Ma^2$ und wird mithin $N_0 = \omega M\varkappa_0^2$. Wählen wir ferner S zum Ursprung des Coordinatensystems bei denselben Axenrichtungen, wie bisher, so geht Σmxz über in $\Sigma m(a + x)z = a\Sigma mz + \Sigma mxz = \Sigma mxz$, während Σmyz ungeändert bleibt. Hieraus folgt, dass die Reduction

der Momentankräfte, welche dem System eine Winkelgeschwindigkeit ω um eine Axe c zu ertheilen vermögen für den Massenmittelpunkt S in Bezug auf das resultirende Axenmoment dieselbe ist, als ob die mit c parallele Axe c_0 des Punktes S die Axe der Winkelgeschwindigkeit wäre. Die Reduction (R, G_0) für den Massenmittelpunkt liefert daher

$$R = M\omega a, \quad G_0^2 = N_0^2 + K_0^2, \quad N_0^2 = \omega M \varkappa_0^2,$$

$$K_0^2 = K_0^{(x)2} + K_0^{(y)2}, \quad K_0^{(x)} = -\omega M \lambda_0^2, \quad K_0^{(y)} = -\omega M \mu_0^2,$$

wo $\mu_0 = \mu$.

Wir suchen endlich auch die Reduction der Momentankräfte, welche die Winkelgeschwindigkeit ω um c zu geben vermögen, für die Centralaxe derselben. Nach B. I, S. 45 ist das Axenmoment G dieser Reduction die Projection des Axenmomentes, welches irgend einer Reduction entspricht, auf die Richtung der Resultanten R. Nun sind, mögen wir von der Reduction für O oder für S ausgehen, die Componenten N und K_x oder N_0, $K_0^{(x)}$ senkrecht zu R und reducirt sich daher G auf $K_0^{(y)}$. Um die Lage der Centralaxe zu finden, suchen wir zunächst auf der Richtung OS (Fig. 103) den Punkt O' so, dass die Verlegung der Resultanten R an ihn ein Paar $R \cdot SO'$ hervorruft, welches N_0 tilgt. Dies erfordert, dass O' mit O auf entgegengesetzten Seiten von S liege und der Abstand $SO' = a'$ der Bedingung $N_0 = Ra'$ genüge. Setzt man die Werthe $N_0 = M\varkappa_0^2$ und $R = M\omega a$ ein, so folgt $aa' = \varkappa_0^2$ und erkennt man, dass die Punkte O, O' homologe Punkte einer Involution gleichartiger Lage auf der Geraden OS, der Linie des kürzesten Abstandes des Massenmittelpunktes von der Momentanaxe c, sind, deren Constante das Quadrat des Trägheitsradius $\varkappa_0$ für die zu c parallele Axe des Massenmittelpunktes ist. Um auch das Paar $K_0^{(x)}$ zu tilgen, ziehen wir durch den so gefundenen Punkt O' eine Gerade c' parallel zu c und suchen auf ihr diesseits oder jenseits von O' je nach dem Sinne von $K_0^{(x)}$ den Punkt C so, dass durch die Verlegung der Resultanten R von O' nach C ein Paar $R \cdot O'C = Rb$ erwächst, welches entgegengesetzt gleich $K_0^{(x)}$ wird. Setzt man in die Gleichung $K_0^{(x)} = Rb$ die Werthe für $K_0^{(x)}$ und R ein, so ergibt sich $ab = -\lambda_0^2$. Trägt man auf c' gleichen Sinnes mit ω die Strecke $O'C' = a$ auf, so sind C, C' homologe Punkte einer zweiten Involution und liegen diese Punkte bei positivem $K_0^{(x)}$ auf entgegengesetzten, bei negativem $K_0^{(x)}$ auf derselben Seite von O', d. h. es

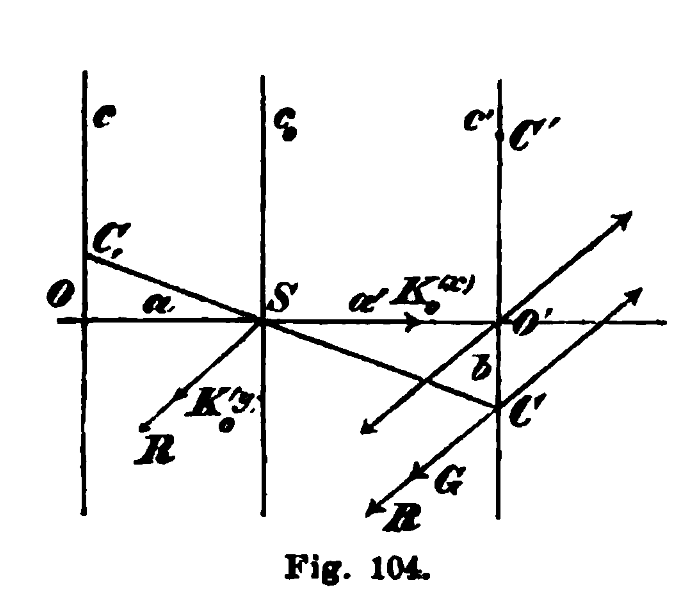


Fig. 104.

ist die Involution von gleichartiger Lage im ersten und von entgegengesetzter Lage im zweiten Falle. Zieht man durch C und S die Linie CC_1, welche die Axe c in C_1 trifft, so sieht man leicht, dass C, C_1 homologe Punkte einer dritten, stets gleichliegenden Involution sind, deren Constante $(\varkappa_0^4 + \lambda^4)^{\frac{1}{2}}$ ist. Aus dem Umstand, dass in involutorischen Punktreihen die homologen Punkte sich doppelt entsprechen, folgt sofort, dass, wenn die Momentanaxe c statt durch C_1 zu gehen, durch C ginge, d. h. in c' fiele, die Resultante R durch C_1 gehen würde.

Diese Entwickelungen liefern uns den Satz:

Die Centralaxe der Momentankräfte eines unveränderlichen Systems, welches eine Winkelgeschwindigkeit ω um eine Momentanaxe c besitzt, ist rechtwinklig zur Ebene, welche durch diese Axe und den Massenmittelpunkt S geführt werden kann und trifft diese Ebene in einem Punkte C, dessen Lage von der Lage der Momentanaxe, nicht aber von der Winkelgeschwindigkeit abhängt. Zieht man in dieser Ebene durch S zwei Gerade, die eine parallel, die andere senkrecht zu c, so fällt C mit der Momentanaxe auf entgegengesetzte Seiten der ersteren dieser beiden Geraden und ist sein Abstand a' von ihr so beschaffen, dass er mit dem Abstande a der Momentanaxe von ihr ein Rechteck aa' gleich dem Quadrate $\varkappa_0^2$ des Trägheitsradius für die zur Momentanaxe parallele Gerade des Massenmittelpunktes bildet, in Bezug auf die zur Momentanaxe senkrechte Gerade liegt er diesseits oder jenseits, je nach der besonderen Art der Massenvertheilung des Systems. Der Stral CS schneidet die Momentanaxe in einem reciproken Punkte C, sodass, wenn die Momentanaxe unter Beibehaltung ihrer Richtung durch C, statt durch C_1 ginge, die Centralaxe durch C_1, statt durch C gehen würde. Das der Centralaxe entsprechende Axenmoment ist $K_0^{(y)} = -\omega M\mu_0^2$. Die Momentankräfte sind einer Einzelresultante $R = M\omega a$ äquivalent, wenn $K_0^{(y)} = 0$, d. h. $\Sigma myz = 0$ ist.

§. 4. Das System besitze eine Windungsgschwindigkeit (ω, u) (Fig. 105) um eine Momentanaxe c im Abstande a vom Massenmittelpunkte S. Die von der Winkelgeschwindigkeit ω herrührenden Momentankräfte reduciren wir für den Massenmittelpunkt S wie im vorigen Paragraphen und erhalten eine Momentankraft $R' = M\omega a$, durch S gehend und senkrecht zur Ebene, welche S und c enthält und ein Paar G_0 mit den Componenten N_0, $K_0^{(x)}$, $K_0^{(y)}$. Die von der Translations-

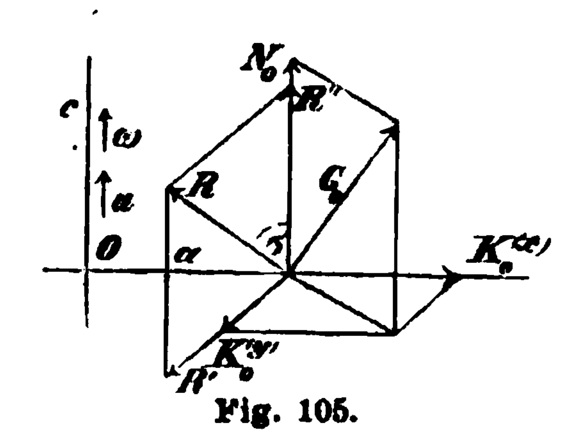


Fig. 105.

geschwindigkeit u veranlassten Momentankräfte mu, welche nach Richtung und Sinn mit u übereinstimmen, liefern nach §. 2 eine Momentankraft $R'' = Mu$ von derselben Richtung und demselben Sinne, wie u, welche gleichfalls durch S hindurchgeht. R' und R'' liefern daher die Resultante R der Momentankräfte $R = M \cdot \sqrt{\omega^2 a^2 + u^2}$. Sie fällt in die zu SO senkrechte Ebene des Massenmittelpunktes, ist gegen die Axe c unter einem Winkel σ geneigt, wofür $\operatorname{tg} \sigma = \frac{\omega a}{u}$ und stimmt nach Richtung und Sinn mit der Geschwindigkeit $v_0 = \sqrt{\omega^2 a^2 + u^2}$ des Massenmittelpunktes überein, welche dieser der Windungsbewegung verdankt. Daher:

Die Momentankräfte eines unveränderlichen Systems, welches eine Windungsgeschwindigkeit (ω, u) um eine Momentanaxe c im Abstande a vom Massenmittelpunkte besitzt, sind äquivalent einer durch den Massenmittelpunkt gehenden Resultanten R und einem resultirenden Paare G. Erstere hat die Richtung und den Sinn der Geschwindigkeit, welche dieser Punkt in Folge der Windungsgeschwindigkeit besitzt und eine Intensität, vermöge welcher sie diesem Punkte dieselbe Geschwindigkeit ertheilen könnte, wenn in ihm die Gesammtmasse des Systems vereinigt wäre. Das resultirende Paar befolgt dieselben Bildungsgesetze, wie wenn das System blos die Winkelgeschwindigkeit ω ohne die Translationsgeschwindigkeit u besässe.

Behufs der Reduction für die Centralaxe können wir von der Reduction für die Centralaxe des Falles (§. 3) ausgehen, indem wir die im Massenmittelpunkte S angreifende, von der Translationsgeschwindigkeit u herrührende, nach Richtung und Sinn mit u übereinstimmende Kraft Mu (Fig. 106) hinzufügen. Indem wir sie in den Stral c' verlegen, haben wir das Paar Mua' mit dem Paare $K_0^{(y)}$ zu verbinden, wodurch wir, da beide Axenmomente zur Ebene (c, S) senkrecht sind, das Axenmoment

$Mua' + K_0^{(y)} = M(ua' - \omega \mu_0^2)$

erhalten, von derselben Richtung wie $K_0^{(y)}$. Dies Axenmoment ist auf die Richtung der Resultanten Mv_0 zu projiciren, um das resultirende Axenmoment G für die Centralaxe zu finden. Zerlegen wir dasselbe nach dieser Richtung und senkrecht darauf, indem wir mit

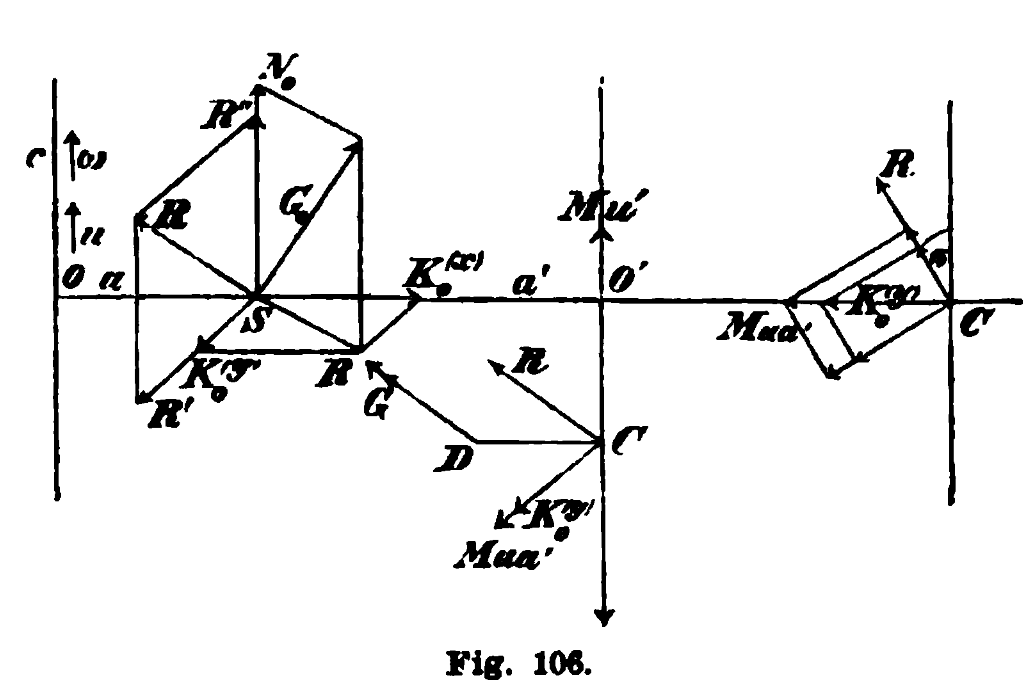


Fig. 106.

$\sin\sigma$, resp. $\cos\sigma$ multipliciren, so zerfällt dasselbe in die beiden Axenmomente

$$G = M(ua' - \omega\mu_0^2)\sin\sigma = \frac{M\omega a}{v_0}(ua' - \omega\mu_0^2) = \frac{M\omega}{v_0}(\varkappa_0^2 u - \omega a\mu_0^2),$$

$$H = M(ua' - \omega\mu_0^2)\cos\sigma = \frac{Mu}{v_0}(ua' - \omega\mu_0^2).$$

Um die Lage der Centralaxe zu finden, ziehen wir durch C die Parallele CD zu $O'S$ und verlegen R parallel mit sich an den Punkt D derselben, sodass das aus dieser Verlegung entspringende Paar Ra'' das Paar H tilgt, wo CD mit a'' bezeichnet ist. Diese Bedingung liefert

$$a'' = \frac{u}{v_0^2}(ua' - \omega\mu_0^2).$$

Ist a_1 der Abstand des Punktes D von der zu SO senkrechten Ebene des Massenmittelpunktes, so wird, wie leicht zu sehen, $a_1 = a' - a''$ und daher wegen $aa' = \varkappa_0^2$ und $\omega^2 a^2 + a^2 = v_0^2$

$$a_1 = \frac{\omega}{v_0^2}(\varkappa_0^2\omega a + \mu_0^2 u).$$

Die Lage der Centralaxe wird durch die Abstände a_1 und $b = -\frac{\lambda_0^2}{a}$, sowie den Winkel σ, den sie mit der Momentanaxe bildet, bestimmt. Statt des Abstandes b können wir auch den kürzesten Abstand b_1 derselben von SO angeben. Derselbe ist $b_1 = b\sin\sigma = \frac{b\omega a}{v_0} = -\frac{\omega}{v_0}\lambda_0^2$. Setzen wir in den Ausdruck für G noch den Werth von a' ein, so erhalten wir als Elemente der Reduction für die Centralaxe übersichtlich zusammengestellt:

$$R = Mv_0, \quad G = \frac{M\omega}{v_0}(\varkappa_0^2 u - \omega a\mu_0^2),$$

$$a_1 = \frac{\omega}{v_0^2}(\varkappa_0^2\omega a + \mu_0^2 u), \quad b_1 = -\frac{\omega}{v_0}\lambda_0^2.$$

Als Specialfälle erwähnen wir folgende:

1. Die Momentankräfte können sich nur dann auf ein Paar reduciren, wenn $v_0 = 0$, also $u = 0$ und $a = 0$ ist, d. h. wenn das System blos Winkelgeschwindigkeit besitzt und die Momentanaxe durch den Massenmittelpunkt geht.

2. Sie sind einer Einzelkraft äquivalent in allen Fällen, in welchen $\omega(\varkappa_0^2 u - \mu_0^2\omega a) = 0$ ist. Dies tritt ein a) wenn $\omega = 0$, d. h. wenn das System blos Translationsgeschwindigkeit besitzt, b) wenn $u = 0$ und $\mu_0 = 0$, d. h. wenn das System blos Winkelgeschwindigkeit besitzt und $K_0^{(y)} = -\omega\Sigma myz = 0$ ist; c) wenn $\varkappa_0^2 u - \omega a\mu_0^2 = 0$, d. h.

$$\frac{\omega a}{u} = \operatorname{tg} \sigma = \frac{\varkappa_0^2}{\mu_0^2} = - \frac{M \varkappa_0^2}{\Sigma m y z}.$$

Der Sinn hiervon ist der, dass die Resultante R senkrecht zu dem aus N_0 und $K_0^{(y)}$ entspringenden Axenmomente ist. Da nämlich $K_0^{(x)}$ in allen Fällen senkrecht zu R ist, so wird alsdann bei der Reduction für den Massenmittelpunkt G senkrecht zu R und liefert nur eine Verlegung von R in die Centralaxe ohne resultirendes Paar.

§. 5. Die Beziehungen zwischen den Richtungen der Momentanaxe und des resultirenden Axenmomentes G, sowie auch zwischen der Grösse des letzteren und der Winkelgeschwindigkeit ω können in ausgezeichneter Weise mit Hülfe des Cauchy-Poinsot'schen und des ihm reciproken Trägheitsellipsoids (B. I, S. 113) dargestellt werden. Reduciren wir zu diesem Zwecke die Momentankräfte für den Massenmittelpunkt S und seien p, q, r die Componenten der Winkelgeschwindigkeit ω, sowie G_x, G_y, G_z die des resultirenden Axenmomentes G parallel den Hauptaxen dieses Punktes. Nach §. 4, S. 356, Nr. 2 sind die Momentankräfte, welche durch die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r eingeführt werden, äquivalent den Paaren G_x, G_y, G_z und bestehen, wenn A, B, C die Trägheitsmomente für die drei Hauptaxen von S sind, die Gleichungen:

$$G_x = Ap, \quad G_y = Bq, \quad G_z = Cr.$$

Vermöge der Bedeutung des Cauchy-Poinsot'schen Centralellipsoids aber, dessen Halbaxen $\alpha = \frac{\varepsilon^2}{a}$, $\beta = \frac{\varepsilon^2}{b}$, $\gamma = \frac{\varepsilon^2}{c}$ sind, ist

$$A = M a^2 = M \frac{\varepsilon^4}{\alpha^2}, \quad B = M \frac{\varepsilon^4}{\beta^2}, \quad C = M \frac{\varepsilon^4}{\gamma^2}.$$

Bezeichnen ferner x, y, z die Coordinaten eines der beiden Punkte J, in welchen die zur Momentanaxe c parallele Axe c_0 des Punktes S das Centralellipsoid durchdringt, sowie l den Semidiameter SJ, so ist weiter:

$$\frac{p}{x} = \frac{q}{y} = \frac{r}{z} = \frac{\omega}{l}.$$

Entnimmt man hieraus die Werthe von p, q, r, so ergeben sich mit ihrer Hülfe G_x, G_y, G_z und G unter der Form

$$G_x = \frac{M \cdot \varepsilon^4 \omega}{l} \cdot \frac{x}{\alpha^2}, \quad G_y = \frac{M \cdot \varepsilon^4 \omega}{l} \cdot \frac{y}{\beta^2}, \quad G_z = \frac{M \cdot \varepsilon^4 \omega}{l} \cdot \frac{z}{\gamma^2}, \quad G = \frac{M \cdot \varepsilon^4 \omega}{l} \cdot \frac{1}{\delta},$$

wo

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2}{\beta^4} + \frac{z^2}{\gamma^4}$$

ist. Die Richtungscosinusse von G gegen die Coordinatenaxen sind daher

$$\frac{G_x}{G} = \frac{\delta x}{\alpha^2}, \quad \frac{G_y}{G} = \frac{\delta y}{\beta^2}, \quad \frac{G_z}{G} = \frac{\delta z}{\gamma^2}.$$

Diese Grössen sind aber zugleich die Richtungscosinusse der Normalen des Centralellipsoids im Punkte $J(xyz)$ und ist δ die Länge der von S auf die Tangentenebene in J gefällten Normalen. Hieraus fliesst der Satz:

Das resultirende Axenmoment G der Reduction der Momentankräfte für den Massenmittelpunkt des Systems ist der Normalen des Cauchy-Poinsot'schen Centralellipsoids in dem Punkte J parallel, in welchem die zur Momentanaxe parallele Axe des Massenmittelpunktes dasselbe durchdringt. Die Grösse $G = M\varepsilon^4 \cdot \frac{\omega}{l\delta}$ des Axenmomentes selbst ist der Winkelgeschwindigkeit direct und dem Produkte des Semidiameters l des Centralellipsoids, welcher die Richtung der Momentanaxe hat und des Abstandes δ der Tangentenebene in J vom Massenmittelpunkte S umgekehrt proportional.

Die Ebene des resultirenden Paares der Momentankräfte ist der Tangentenebene in J parallel, d. h.

Die Ebene des resultirenden Paares der Momentankräfte hat die Richtung der Diametralebene des Centralellipsoids, welche zur Richtung der Momentanaxe conjugirt ist.

Es sind ferner die Trägheitsradien a, b, c der Hauptaxen die Halbaxen des reciproken Centralellipsoids und

$$p = \frac{G_x}{Ma^2}, \quad q = \frac{G_y}{Mb^2}, \quad r = \frac{G_z}{Mc^2}.$$

Bezeichnen nun x, y, z die Coordinaten eines der Punkte Γ, in welchen der zum resultirenden Axenmomente G parallele Semidiameter $S\Gamma = l'$ dies Centralellipsoid schneidet, so wird

$$\frac{G_x}{x} = \frac{G_y}{y} = \frac{G_z}{z} = \frac{G}{l'}$$

und hiermit nehmen p, q, r, ω die Form an

$$p = \frac{G}{Ml'} \cdot \frac{x}{a^2}, \quad q = \frac{G}{Ml'} \cdot \frac{y}{b^2}, \quad r = \frac{G}{Ml'} \cdot \frac{z}{c^2}, \quad \omega = \frac{G}{Ml'\delta'},$$

wo

$$\frac{1}{\delta'^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$$

gesetzt ist.

Hiermit werden aber die Richtungscosinusse der Momentanaxe gegen die Coordinatenaxen:

$$\frac{p}{\omega} = \frac{\delta' x}{a^2}, \quad \frac{q}{\omega} = \frac{\delta' y}{b^2}, \quad \frac{r}{\omega} = \frac{\delta' z}{c^2}.$$

Man erhält daher ähnlich wie oben den Satz:

Die Momentanaxe ist der Normalen des zum Cauchy-Poinsot'schen reciproken Centralellipsoids in dem Punkte Γ parallel, in welchem dasselbe von dem zum resultirenden Axenmomente G parallelen Diameter getroffen wird. Die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{G}{Ml'\delta'}$ ist diesem Axenmomente direct und dem Produkte des zu ihm parallelen Semidiameters l' und des Abstandes δ' der Tangentenebene in Γ vom Mittelpunkte S umgekehrt proportional. Die zur Momentanaxe senkrechte Ebene des Massenmittelpunktes ist conjugirte Diametralebene des reciproken Centralellipsoids zur Richtung des resultirenden Axenmomentes.

§. 6. Die Umkehrung der in den §§. 2—5 durchgeführten Betrachtungen setzt uns in den Stand anzugeben, welchen Geschwindigkeitszustand ein gegebenes System von Momentankräften in einem unveränderlichen Punktsystem hervorruft. Derselbe ist eine Translationsgeschwindigkeit, eine Winkelgeschwindigkeit oder eine Windungsgeschwindigkeit. Reducirt man das gegebene Kräftesystem für den Massenmittelpunkt S auf Resultante R und resultirendes Axenmoment G, so müssen diese Elemente den Reductionselementen der Momentankräfte äquivalent sein, welche aus dem noch unbekannten Geschwindigkeitszustand folgen würden und zwar muss R der sich daraus ergebenden Resultanten und G dem aus ihm folgenden Axenmomente äquivalent sein.

Insbesondere folgt, dass die Resultante R dem System eine Translationsgeschwindigkeit u ertheilt, welche nach Richtung und Sinn mit R übereinstimmt und dass ihre Grösse aus der Gleichung $Mu = R$ folgt, d. h. dass $u = R : M$ ist. Weiter ergibt sich, dass G eine Winkelgeschwindigkeit ω um eine Axe des Massenmittelpunktes erzeugt, deren Axe c_0 der zur Ebene des Paares G conjugirte Diameter J des Cauchy-Poinsot'schen Centralellipsoids ist und dass ω aus der Gleichung

$$\frac{M\varepsilon^4\omega}{l\delta} = G, \quad \text{nämlich} \quad \omega = \frac{l\delta G}{M\varepsilon^4}$$

folgt, wo δ den Abstand der zu G senkrechten Tangentenebene des Centralellipsoids bedeutet. Um ω auch dem Sinne nach unzweideutig zu bestimmen, wird man G nach den Hauptaxen von S in die Componenten G_x, G_y, G_z zerlegen und mit Hülfe von

$$Ap = G_x, \quad Bq = G_x, \quad Cr = G_z$$

zunächst die Componenten p, q, r der Winkelgeschwindigkeit ω nach den Hauptaxen finden, wo A, B, C die Trägheitsmomente um diese Axen bezeichnen. Hieraus folgt sodann

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = \frac{G_x^2}{A^2} + \frac{G_y^2}{B^2} + \frac{G_z^2}{C^2}$$

nebst den Richtungscosinussen α, β, γ der Axe c_0 von ω, nämlich

$$\frac{\alpha}{p} = \frac{\beta}{q} = \frac{\gamma}{r} = \frac{1}{\omega}.$$

Sobald u und ω gefunden sind, wird man u parallel der Axe c_0 und senkrecht dazu in die Componenten $u \cos \psi$ und $u \sin \psi$ zerlegen, wenn ψ den Neigungswinkel von u gegen c_0 bedeutet; die Componente $u \cos \psi$ wird die Translationsgeschwindigkeit parallel der gesuchten Momentanaxe c sein, während die zu c_0 senkrechte Componente $u \sin \psi$ zur Verlegung der Axe c_0 in die ihr parallele Momentanaxe c dient. Die Axe c fällt in die zu $u \sin \psi$ senkrechte Ebene von S, in dem Felde zur Linken eines auf sie von der Pfeilspitze der Componenten $u \sin \psi$ niederblickenden Punktes; ihr Abstand von S ist $a = u \sin \psi : \omega$. Die Combination (ω, $u \cos \psi$) stellt demnach die gesuchte Windungsgeschwindigkeit um c dar. In speciellen Fällen reducirt sich diese auf eine blose Winkelgeschwindigkeit oder eine Translationsgeschwindigkeit.

Als specielle Fälle heben wir besonders hervor:

Ein System von Momentankräften, welches sich auf eine durch den Massenmittelpunkt gehende Einzelkraft reducirt, kann allein dem Punktsystem eine Translationsgeschwindigkeit ertheilen; sie wird erhalten, wenn man die Intensität dieser Kraft durch die Masse des Systems dividirt und stimmt in Richtung und Sinn mit ihr überein.

Ein Momentankräftepaar ertheilt dem System eine Winkelgeschwindigkeit um eine Axe des Massenmittelpunktes S. Ist das Axenmoment des Paares parallel einer Hauptaxe des Punktes S, so fällt die Momentanaxe mit dieser Hauptaxe zusammen.

Ein System von Momentankräften, welches sich auf eine nicht durch den Massenmittelpunkt gehende Einzelkraft reducirt, kann je nach Umständen eine blose Winkelgeschwindigkeit oder eine Windungsgeschwindigkeit erzeugen. Ebenso ein Kräftesystem, welches bei der Reduction auf seine Centralaxe sowohl eine Resultante als ein resultirendes Paar liefert. Um diese Frage zu erörtern, seien wieder R und G Resultante und Axenmoment der gegebenen Momentankräfte bei der Reduction für den Punkt S; R gibt eine Translationsgeschwindigkeit $u = R : U$ und G eine Winkelgeschwindigkeit ω um eine durch S gehende Axe c_0. Damit beide einer blosen Winkelgeschwindigkeit äquivalent seien, muss u und folglich auch R zu c_0 senkreicht sein. Denn dann veranlasst u blos eine Verlegung der Axe c_0 in eine gewisse parallele Axe c und tritt zu ω keine Translations-

geschwindigkeit parallel dieser Axe hinzu. Legen wir also durch S senkrecht zu R eine Ebene E, so enthält sie alle Richtungen, welche c_0 möglicherweise haben kann. Nun ist G normal zur Tangentenebene des Cauchy-Poinsot'schen Centralellipsoids in dem Punkte J, in welchem c_0 einschneidet. Daher kann G senkrecht sein zu irgend einer Tangentenebene des dem Centralellipsoid umschriebenen Cylinders, welcher längs des Schnittes der Ebene E mit ihm dasselbe berührt. Die Richtungen von G erfüllen mithin eine zu den Erzeugungslinien dieses Cylinders senkrechte Ebene E'. Alle Kräftesysteme, für welche G bei demselben R in diese Ebene fällt, liefern blos eine Winkelgeschwindigkeit, alle anderen eine Windungsgeschwindigkeit. Fällt G in eine Hauptebene des Centralellipsoids, so fällt die Ebene E mit E' zusammen und liegt c_0 in derselben Hauptebene; fällt G mit einer Hauptaxe von S zusammen, so ist diese zugleich die Axe c_0. Ganz ähnlich kann auch das reciproke Centralellipsoid zur Entscheidung derartiger Fragen verwandt werden.

§. 7. Wir wollen jetzt die Reduction der Momentankräfte für den Massenmittelpunkt S analytisch einkleiden. In Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Ursprung S ist, sei O $(x_0 y_0 z_0)$ irgend ein Punkt der Momentanaxe c, z. B. der Fusspunkt ihres kürzesten Abstandes d von S; die Winkelgeschwindigkeit ω um sie zerlegen wir in drei Componenten ω_x, ω_y, ω_z um drei zu den Axen der x, y, z parallele Axen des Punktes O; ebenso zerfällen wir die Translationsgeschwindigkeit u des Systems in die drei Componenten u_x, u_y, u_z. Die Translationsgeschwindigkeit veranlasst die Momentankraft Mu, welche durch S hindurchgeht und die drei Componenten Mu_x, Mu_y, Mu_z hat. Um die x-Axe ertheilen wir ferner dem System zwei entgegengesetzt gleiche Winkelgeschwindigkeiten ω_x, d. h. wir substituiren für ω_x um die durch O gehende Axe ein ω_x um die x-Axe und das Rotationspaar $(\omega_x, -\omega_x)$, welches einer Translationsgeschwindigkeit senkrecht zu seiner Ebene äquivalent ist. Indem wir Aehnliches in Bezug auf ω_y, ω_z ausführen, erhalten wir die Componenten ω_x, ω_y, ω_z um die Coordinatenaxen und drei Rotationspaare $(\omega_x, -\omega_x)$, $(\omega_y, -\omega_y)$, $(\omega_z, -\omega_z)$. Diese Paare liefern nach Anleitung der B. I, S. 49 ausgeführten Reduction die drei Momente, d. h. die Translationsgeschwindigkeiten

$$y_0\omega_z - z_0\omega_y, \quad z_0\omega_x - x_0\omega_z, \quad x_0\omega_y - y_0\omega_x$$

parallel den Axen der x, y, z, welche die Momentankräfte

$$M(y_0\omega_z - z_0\omega_y), \quad M(z_0\omega_x - x_0\omega_z) \quad M(x_0\omega_y - y_0\omega_x)$$

herbeiführen. Sie bilden mit den obigen Componenten Mu_x, Mu_y, Mu_z die Resultante R der Reduction für den Punkt S und wenn wir setzen:

$$X = M[u_x + (y_0\omega_z - z_0\omega_y)],$$
$$Y = M[u_y + (z_0\omega_x - x_0\omega_z)],$$
$$Z = M[u_z + (x_0\omega_y - y_0\omega_x)],$$

so wird sie und ihre Richtung (a, b, c) bestimmt durch die Gleichungen:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad \frac{\cos a}{X} = \frac{\cos b}{Y} = \frac{\cos c}{Z} = \frac{1}{R}.$$

Die Resultante R bildet sich ersichtlich aus den beiden Bestandtheilen Mu und $M\omega d$, herrührend von der Translationsgeschwindigkeit u und der Uebertragung von ω um c auf die Axe c_0, oder wie es hier ausgeführt ist, von ω_x, ω_y, ω_z auf die Coordinatenaxen.

Die Winkelgeschwindigkeit ω um c_0 oder ihre Componenten $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ um die Axen der x, y, z ertheilen nun nach B. I, S. 275 dem Systempunkte (x, y, z) die Geschwindigkeitscomponenten

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x,$$

welchen die Componenten der Momentankraft mv_x, mv_y, mv_z entsprechen. Die Reduction derselben liefert die Componenten

$$\Sigma m v_x = \Sigma m(\omega_y z - \omega_z y) = \omega_y \Sigma m z - \omega_z \Sigma m y,$$
$$\Sigma m v_y = \omega_z \Sigma m x - \omega_x \Sigma m z,$$
$$\Sigma m v_z = \omega_x \Sigma m y - \omega_y \Sigma m x,$$

welche aber vermöge der Eigenschaften $\Sigma mx = \Sigma my = \Sigma mz = 0$ des Massenmittelpunktes verschwinden. Sie liefert ferner die Paare:

$$G_x = \Sigma m(yv_z - zv_y), \quad G_y = \Sigma m(zv_x - xv_z), \quad G_z = \Sigma m(xv_y - yv_x),$$

welche nach Einfügung der Werthe von v_x, v_y, v_z übergehen in

$$G_x = \omega_x \Sigma m(y^2 + z^2) - \omega_y \Sigma mxy - \omega_z \Sigma mxz,$$
$$G_y = -\omega_x \Sigma mxy + \omega_y \Sigma m(z^2 + x^2) - \omega_z \Sigma myz,$$
$$G_z = -\omega_x \Sigma mzx - \omega_y \Sigma myz + \omega_z \Sigma m(x^2 + y^2)$$

und mit Hülfe der Bezeichnungsweise der Trägheitsmomente und Deviationsmomente des Systems für die Coordinatenaxen

$$\Sigma m(y^2 + z^2) = A, \quad \Sigma myz = D,$$
$$\Sigma m(z^2 + x^2) = B, \quad \Sigma mzx = E,$$
$$\Sigma m(x^2 + y^2) = C, \quad \Sigma mxy = F$$

die Gestalt annehmen:

$$G_x = A\omega_x - F\omega_y - E\omega_z,$$
$$G_y = -F\omega_x + B\omega_y - D\omega_z,$$
$$G_z = -E\omega_x - D\omega_y + C\omega_z.$$

Ihr resultirendes Paar G und seine Richtungscosinusse λ, μ, ν sind daher

durch die Gleichungen bestimmt:

$$G^2 = G_x^2 + G_y^2 + G_z^2, \quad \frac{\lambda}{G_x} = \frac{\mu}{G_y} = \frac{\nu}{G_z} = \frac{1}{G}.$$

Würde die Reduction der Momentankräfte für einen anderen Punkt als S verlangt, so änderte sich in den vorstehenden Betrachtungen nichts, als dass die Grössen $\Sigma m v_x$, $\Sigma m v_y$, $\Sigma m v_z$ nicht verschwinden, sondern in den Componenten X, Y, Z als weitere Glieder zu den übrigen hinzutreten.

§. 8. Die Summe $2T = \Sigma m v^2$ der lebendigen Kräfte mv^2 der Systempunkte heisst die **lebendige Kraft des Systems**. Wir wollen diese Grösse bilden und ihre Beziehungen zu der Reduction der Momentankräfte aufsuchen. Ist r der Abstand eines Systempunktes von der Momentanaxe c, so wird das Quadrat seiner Geschwindigkeit

$$v^2 = u^2 + \omega^2 r^2$$

und mithin die lebendige Kraft

$$2T = \Sigma m (u^2 + \omega^2 r^2) = M u^2 + \omega^2 \Sigma m r^2,$$

oder wenn wir das Trägheitsmoment um die Axe c durch

$$M\varkappa^2 = M d^2 + M\varkappa_0^2$$

ausdrücken, wo $\varkappa$, $\varkappa_0$ die Trägheitsradien für die Axen c, c_0 und d den Abstand dieser Axen bezeichnen:

$$2T = M(u^2 + \omega^2 d^2) + \omega^2 M \varkappa_0^2.$$

In diesem Ausdrucke stellt $u^2 + \omega^2 d^2$ das Quadrat der Geschwindigkeit v_0 des Massenmittelpunktes S dar und ist daher $M(u^2 + \omega^2 d^2)$ die lebendige Kraft, welche dieser Punkt besitzen würde, wenn in ihm die ganze Masse des Systems vereinigt wäre. Bezeichnen wir sie mit $2T_0$, $\omega^2 M \varkappa_0^2$ aber mit $2T_1$, sodass also $2T_0 = M v_0^2$, $2T_1 = \omega^2 M \varkappa_0^2$, $T = T_1 + T_2$ wird, so folgt der Satz:

Die lebendige Kraft $2T$ eines in Bewegung begriffenen unveränderlichen Systems zerfällt in zwei Theile, $2T_0$ und $2T_1$, von denen der erste $2T_0$ die lebendige Kraft Mv_0^2 des Massenmittelpunktes darstellt, wenn in ihm die Gesammtmasse vereinigt gedacht wird, während der andere Theil $2T_1$ die lebendige Kraft ist, welche das System besitzen würde, wenn es die Winkelgeschwindigkeit ω nicht um die Momentanaxe, sondern um eine zu ihr parallele Axe des Massenmittelpunktes besässe.

Mit dem Bestandtheile $2T_1$ hängen die Componenten G_x, G_y, G_z des resultirenden Paares der Momentankräfte sehr einfach zusammen. Nach B. I, S. 104 ist nämlich das Trägheitsmoment für die Axe c, deren Richtungscosinusse α, β, γ seien:

$$M\varkappa_0^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta.$$

Mit Hülfe von $\omega_x = \alpha\omega$, $\omega_y = \beta\omega$, $\omega_z = \gamma\omega$ erhält man daher:

$$2T_1 = \omega^2 M\varkappa_0^2 = A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 - 2D\omega_y\omega_z - 2E\omega_z\omega_x - 2F\omega_x\omega_y.$$

Differentiiren wir diese Gleichung nach ω_x, ω_y, ω_z, so folgt:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \omega_x} = \quad A\omega_x - F\omega_y - E\omega_z = G_x,$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \omega_y} = - F\omega_x + B\omega_y - D\omega_z = G_y,$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \omega_z} = - E\omega_x - D\omega_y + C\omega_z = G_z,$$

d. h. die partiellen Differentialquotienten der Hälfte des Bestandtheils der lebendigen Kraft, welcher der Winkelgeschwindigkeit um die Axe des Massenmittelpunktes entspricht, nach den Componenten ω_x, ω_y, ω_z der Winkelgeschwindigkeit genommen, sind die Componenten des resultirenden Axenmomentes der Momentankräfte parallel den Axen der x, y, z.

Die Grösse T_1 ist eine homogene Function zweiten Grades von ω_x, ω_y, ω_z, daher ist nach dem Euler'schen Satze über die homogenen Functionen

$$2T_1 = \omega^2 M\varkappa_0^2 = \frac{\partial T_1}{\partial \omega_x}\cdot\omega_x + \frac{\partial T_1}{\partial \omega_y}\cdot\omega_y + \frac{\partial T_1}{\partial \omega}\cdot\omega_z$$
$$= G_x\omega_x + G_y\omega_y + G_z\omega_z$$

und wenn man einmal für ω_x, ω_y, ω_z die gleichbedeutenden Ausdrücke $\alpha\omega$, $\beta\omega$, $\gamma\omega$, das anderemal für G_x, G_y, G_z die Werthe λG, μG, νG setzt, so wird

$$\omega^2 M\varkappa_0^2 = 2T_1 = \omega(\alpha G_x + \beta G_y + \gamma G_z) = G(\lambda\omega_x + \mu\omega_y + \nu\omega_z),$$

d. h. die Componente $\alpha G_x + \beta G_y + \gamma G_z$ des resultirenden Axenmomentes der Momentankräfte parallel der Momentanaxe ist das Produkt $\omega M\varkappa_0^2$ der Winkelgeschwindigkeit und des Trägheitsmomentes für die der Momentanaxe parallele Axe des Massenmittelpunktes. Die Componente $\lambda\omega_x + \mu\omega_y + \nu\omega_z$ der Winkelgeschwindigkeit um die Axe des resultirenden Paares ist $\frac{\omega^2}{G} M\varkappa_0^2$.

Nach B. I, S. 106 ist, wenn ϱ den Semidiameter des Centralellipsoids darstellt, welcher die Richtung der Momentanaxe hat, $\varrho\varkappa_0 = \varepsilon^2$, daher wird

$$2T_1 = M\varepsilon^4\frac{\omega^2}{\varrho^2} \quad \text{oder} \quad \omega = \frac{\varrho\sqrt{2T_1}}{\varepsilon^2\sqrt{M}},$$

d. h. die Winkelgeschwindigkeit ist proportional dem Diameter des Centralellipsoids von der Richtung ihrer Axe und der Quadratwurzel aus dem Bestandtheile der lebendigen Kraft, welcher der Winkelgeschwindigkeit um diesen Diameter entspricht.

Den Satz des §. 5, dass das resultirende Axenmoment die Richtung der Normalen des Centralellipsoids im Punkte J hat, in welchem es von der Axe c_0 durchbohrt wird, beweist man leicht analytisch so. Die Gleichung des Centralellipsoids ist

$$U \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = M\varepsilon^4$$

und sind die Richtungscosinusse der Normalen im Punkte (xyz) proportional den Grössen

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x} = Ax - Fy - Ez = (A\alpha - F\beta - E\gamma)\,\varrho$$

$$= (A\omega_x - F\omega_y - E\omega_z)\,\frac{\varrho}{\omega} = \frac{G_x\varrho}{\omega}$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{G_y\varrho}{\omega}, \quad \tfrac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{G_z\varrho}{\omega},$$

woraus die Behauptung folgt.

Der Cosinus der Neigung ψ der Momentanaxe gegen das Axenmoment G ist

$$\cos\psi = \frac{G_x\omega_x + G_y\omega_y + G_z\omega_z}{G\omega},$$

woraus

$$G\omega\cos\psi = G_x\omega_x + G_y\omega_y + G_z\omega_z = 2T_1,$$

d. h. das geometrische Produkt der Winkelgeschwindigkeit und des resultirenden Axenmomentes ist gleich der lebendigen Kraft, welche der Winkelgeschwindigkeit um die Axe c_0 entspricht.

§. 9. Wählt man die Hauptaxen des Massenmittelpunktes zu Coordinatenaxen, so wird $D = E = F = 0$ und vereinfachen sich die Gleichungen. Setzt man, wie üblich, hierfür

$$\omega_x = p, \quad \omega_y = q, \quad \omega_z = r,$$

so wird

$$G_x = Ap, \quad G_y = Bq, \quad G_z = Cr,$$

$$2T_1 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2, \quad G^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2.$$

Die in den vorstehenden Paragraphen entwickelten Theorien sind so wichtig, dass wir sie in einigen Einzelfällen weiter verfolgen und Beispiele und Anwendungen dazu geben werden.

§. 10. Eine homogene materielle Linie AB (Fig. 107) von der Länge $2l$ und der Dichtigkeit ϱ wird im Punkte c' von einer Momentankraft P unter dem Winkel α getroffen; um welche Momentanaxe und mit welcher Winkelgeschwindigkeit beginnt die Linie zu rotiren?

Die Reduction der Kraft P für den Massenmittelpunkt S liefert daselbst P und ein Paar, dessen Axenmoment $G = Pa'$ senkrecht zur Ebene ist, welche P und AB enthält, wo a' der kürzeste Abstand SC' der Kraft P von S ist. Das Centralellipsoid der Linie AB ist nach B. I, S. 135 ein Rotationscylinder um AB und sind alle Axen von S senkrecht zu AB Hauptaxen mit dem Trägheitsmomente

$M\varkappa_0^2 = \frac{1}{3} Ml^2$, so dass $\varkappa_0^2 = \frac{1}{3} l^2$ ist. Da G die Richtung einer Hauptaxe hat, so fällt die Rotationsaxe c_0 mit der Richtung von G zusammen. Die Gerade AB erlangt also eine Translationsgeschwindigkeit $u = P : M$, der Richtung und dem Sinne nach mit P übereinstimmend und eine Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = Pa' : M\varkappa_0^2 = 3Pa' : Ml^2$$

um die zur Ebene von P und AB senkrechte Axe c_0 des Punktes S. Beide, die Translationsgeschwindigkeit u und die Winkelgeschwindigkeit ω, sind zusammen äquivalent der Winkelgeschwindigkeit ω um die Momentanaxe c, welche $C'S$ im Punkte C auf entgegengesetzter Seite mit C' im Abstande $SC = a$ schneidet, so dass $aa' = \varkappa_0^2 = \frac{1}{3} l^2$ wird. Setzt man $c'S = e$, so wird $a' = e \sin \alpha$ und da $M = 2\varrho l$ ist,

Fig. 107.

$$\omega = \frac{3}{2} \frac{Pc \sin \alpha}{\varrho l^3}, \quad a = \frac{1}{3} \frac{l^2}{e \sin \alpha}.$$

Nimmt man $SD = l$ zur Höhe eines gleichseitigen Dreiecks KDK', so wird $\overline{SK}^2 = \frac{1}{3} l^2 = \varkappa_0^2$ und liefert die zu CK senkrechte Gerade KC den Punkt C, in welchem die Momentanaxe c die Ebene (P, AB) rechtwinklig schneidet.

Für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ fällt C in AB selbst und wird ω bei gegebenem e ein Maximum in Bezug auf α. Der geometrische Ort aller Punkte C, welche bei demselben Abstande e den verschiedenen Richtungen der Kraft P entsprechen, ist eine zu AB senkrechte Gerade, welche AB auf entgegengesetzter Seite mit c' in einem Punkte c schneidet, sodass für $Sc = x$ ihre Gleichung ist $ex = \frac{1}{3} l^2$. Denn es ist $aa' = \frac{1}{3} l^2$ und $a' = e \sin \alpha$, $a = x : \sin \alpha$ u. s. w. Der Ort aller Momentanaxen c ist also eine Ebene.

Soll die Momentanaxe c die Gerade AB im Endpunkte B treffen, so ist $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $a = l$, also $a' = \frac{1}{3} l$, $\omega = 2P : Ml$.

§. 11 **Ein ebenes System wird von einer in seine Ebene fallenden Momentankraft P im Abstande a' vom Massenmittelpunkte getroffen, man soll den Geschwindigkeitszustand bestimmen, welchen dasselbe hierdurch erlangt.**

Reducirt man die Kraft P für den Massenmittelpunkt S, so ertheilt sie daselbst angreifend dem System eine Translationsgeschwindigkeit $u = P : M$, der Richtung und dem Sinne nach mit P übereinstimmend, wenn M die Masse des Systems bezeichnet. Das Axenmoment Pa' des Reductionspaares ist senkrecht zur Ebene des Systems. Nun sind alle zur Ebene des Systems senkrechte Axen Hauptaxen desselben; denn für alle solche sind $\Sigma mxz = 0$, $\Sigma myz = 0$, wenn die z senkrecht zur Ebene genommen werden, da alle z Null sind. Daher erzeugt wie §. 10 (Fig. 107) Pa' eine Winkelgeschwindigkeit um die zur Ebene senkrechte Axe c_0 von S von der Grösse ω, welche sich aus $\omega . M\varkappa_0^2 = Pa'$ ergibt, wenn $\varkappa_0$ den Trägheitsradius für diese Axe bedeutet. Der Sinn von ω harmonirt mit dem Sinne des Paares. Die Translationsgeschwindigkeit u und die Winkelgeschwindigkeit ω sind, da u zu c_0 senkrecht ist, zusammen äquivalent der Winkelgeschwindigkeit ω um die zu c_0 parallele Momentanaxe c, welche mit c_0 die Linie des kürzesten Abstandes SC' des Punktes S von P in einem Punkte C auf der Seite von S, wo C' nicht liegt, trifft, sodass für $SC = a$ die Gleichung $aa' = \varkappa_0^2$ besteht. Errichtet man in der Ebene des Systems in S die Strecke $SK = \varkappa_0$

senkrecht zu $C'S$ und zieht $C'K$, so liefert die zu ihr senkrechte Gerade KC den Punkt C auf $C'S$, in welchem die Momentanaxe die Ebene des Systems schneidet. Vertauschen die Punkte C', C ihre Bedeutung, d. h. geht P durch C, so steht die Momentanaxe c in C' senkrecht auf der Ebene.

Die Punkte C, C' sind homologe Punkte einer gleichliegenden Involution, sodass, wenn C' die Gerade $C'S$ durchläuft, der Punkt C ihm in demselben Sinne folgt und umgekehrt. Die rechtwinkligen Stralen KC', KC bestimmen die Punktpaare der Involution. Geht P durch S, so rückt C ins Unendliche und geht die Rotation um c in eine Translation $u = P : M$ über, da ω verschwindet. Fällt C' ins Unendliche, so tritt C in S ein; wird dabei P unendlich klein, sodass Pa' ein endliches Paar bleibt, so wird ω eine endliche Winkelgeschwindigkeit um die durch S gehende Axe c. Ein Momentankräftepaar ertheilt dem System stets eine Winkelgeschwindigkeit um die durch den Massenmittelpunkt gehende, zur Ebene des Systems senkrechte Axe. Der Abstand CC' homologer Punkte kann jede beliebige Grösse erreichen, aber unter ein gewisses Minimum nicht heruntersinken. Der Werth dieses Minimums ist $CC' = 2\varkappa_0$. Die Aufgabe nämlich, die Punkte C, C' so zu finden, dass $C'S + SC$ ein Minimum werde und $C'S$, SC die Bedingung $C'S \cdot SC = \varkappa_0^2$ erfüllen, ist identisch mit der Aufgabe, unter allen Rechtecken von constantem Inhalte $\varkappa_0^2$ dasjenige zu bestimmen, dessen Umfang $2\,(C'S + SC)$ ein Minimum werde (Fig. 108). Dieser Aufgabe genügt blos das Quadrat $SKS'K'$, dessen Seite $SK = \varkappa_0$ ist; denn soll das Rechteck $SCVC'$ ihm an Fläche gleich sein, so müssen die Rechtecke $CKS'W$ und $K'WVC'$ gleich sein und da die Seite KS' des einen gleich $\varkappa_0$, während die eine $K'W$ des anderen kleiner als $\varkappa_0$ ist, so muss $CK < K'C'$ sein. Daher ist

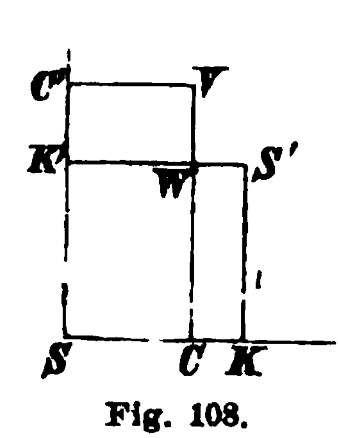


Fig. 108.

$$C'S + SC = \varkappa_0 + K'C' + \varkappa_0 - CK = 2\varkappa_0 + (K'C' - CK) > 2\varkappa_0,$$

während der halbe Umfang des Quadrates gleich $2\varkappa$ ist.

Sind J, J' die homologen Punkte kleinsten Abstandes $2\varkappa_0$, beschreibt man um S mit $\varkappa_0$ als Radius einen Kreis und sucht auf JJ' zu C' den gegen S symmetrisch gelegenen Punkt C'', so sind JJ', CC'' harmonische Punkte und C, C'' conjugirte Pole bezüglich des Kreises.

Lässt man P um einen Punkt C' der Ebene des Systems bei constanter Intensität sich drehen, so beschreibt die Momentanaxe c eine in C auf $C'S$ senkrechte Ebene, indem sie parallel mit sich fortrückt. Denn für irgend eine zweite Lage von P seien γ', γ die homologen Punkte auf dem Perpendikel, welches von S auf P gefällt werden kann, dann ist $\gamma'S \cdot S\gamma = C'S \cdot SC$, woraus folgt, dass γC auf SC senkrecht steht, weil $\gamma'C'$ auf $\gamma'S$ senkrecht ist.

Wir fassen die Resultate dieser Untersuchung in den Satz zusammen:

Erleidet ein ebenes Punktsystem den Stoss einer in seine Ebene fallenden Momentankraft P, so erlangt dasselbe eine Winkelgeschwindigkeit um eine zur Ebene senkrechte Momentanaxe c. Der kürzeste Abstand der Richtungslinien von P und c geht durch den Massenmittelpunkt S, sodass S zwischen die Fusspunkte C', C des kürzesten Abstandes fällt und diesen unabhängig von der Intensität der Kraft P so theilt, dass das Produkt $C'S \cdot SC$ der Segmente dem Quadrate des Trägheitsradius für die in S auf der Ebene errichtete Senkrechten gleich ist. Die Winkelgeschwindigkeit ω, welche

das System um c erlangt, wird erhalten, indem man das Moment $P \cdot C'S$ der Kraft P in Bezug auf den Massenmittelpunkt durch das Trägheitsmoment um die zu c parallele Axe des Massenmittelpunktes dividirt. Die Momentanaxen c, welche den verschiedenen Stralen eines Stralenbüschels C' in der Ebene als Richtungslinien der Kraft P bei gleicher Intensität entsprechen, erfüllen eine zu $C'S$ senkrechte, durch C gehende Ebene.

§. 12. **Wirkung eines Momentankräftesystems, welches einer Einzelkraft P äquivalent ist, deren Richtung eine Hauptebene XY des Massenmittelpunktes S eines räumlichen Punktsystems in einem Punkte C einer Hauptaxe SX im Abstande $SC = a$ normal trifft** (Fig. 109).

1. Die Kräftereduction für den Punkt S gibt die Kraft P an S und das Paar Pa, dessen Axe parallel SY. Von ersterer erlangt das System die Translationsgeschwindigkeit $u = P : M$, letzteres gibt ihm die Winkelgeschwindigkeit $\omega = Pa : M\varkappa_0^2$ um die Hauptaxe SY, wo $\varkappa_0$ den Trägheitsradius für diese Axe bedeutet. u und ω sind zusammen der Winkelgeschwindigkeit ω um die Momentanaxe c äquivalent, welche in der Hauptebene XY der Axe SY im Abstande $SC = a'$ parallel läuft und auf die Seite von SY fällt, auf welcher C nicht liegt. Wie in §. 10 ergibt sich $aa' = \varkappa_0^2$ und liefert ein rechtwinkliges Dreieck die reciproken Punkte C, C'. Die Geschwindigkeit v eines Systempunktes in der Entfernung x von SY, x positiv im Sinne SC gerechnet, ist

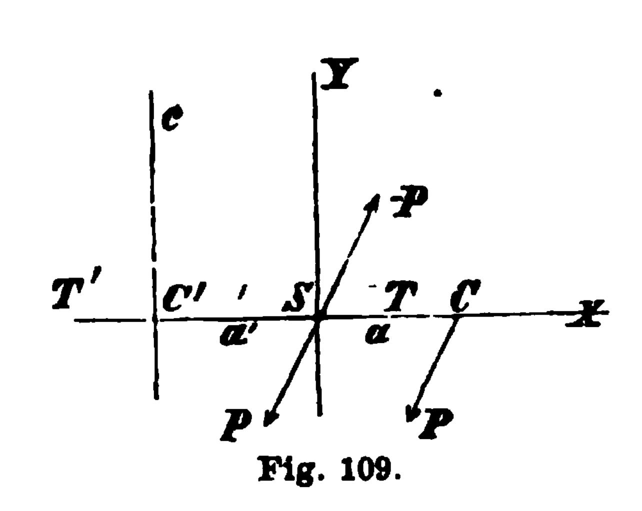


Fig. 109.

$$v = u + \omega x = \frac{P}{M} + \frac{Pa}{M\varkappa_0^2}\, x = \frac{P}{M\varkappa_0^2}\,(\varkappa_0^2 + ax).$$

2. Es treffe das System mit einem Punkte T der Hauptaxe SX, im Abstande $ST = x$ von S auf einen festen Punkt des Raumes. Der momentane Widerstand, den dieser Punkt leistet, vernichtet plötzlich die Geschwindigkeit von T und nöthigt die Systempunkte, die Geschwindigkeiten zu ändern. Um die Intensität $-Q$ dieses Widerstandes zu bestimmen, fügen wir denselben der Kraft P hinzu und stellen die Bedingung auf, dass die Geschwindigkeit des Punktes T gleich Null werde. Da die Geschwindigkeit des Punktes T im Momente, wo sie verrichtet wird, senkrecht zur Ebene XY ist, so ist auch $-Q$ senkrecht zu dieser Ebene. Die Reduction für S ergibt daher die Kraft $-Q$, welche mit P an S zu $P - Q$ sich verbindet, und das Paar $-Qx$, welches mit Pa zusammen ein neues Paar $Pa - Qx$ bildet. Die Kraft $P - Q$ ertheilt dem System die Translationsgeschwindigkeit $u = \frac{P-Q}{M}$ und das Paar $Pa - Qx$ die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{Pa - Qx}{M\varkappa_0^2}$ um die Hauptaxe SY und u und ω zusammen sind äquivalent der Winkelgeschwindigkeit ω um eine neue Momentanaxe c', deren Abstand $-x'$ von S der Bedingung $-xx' = \varkappa^2$ genügen muss. Ein Systempunkt im Abstande ξ von SY erlangt dadurch die Geschwindigkeit $v = \frac{P-Q}{M} + \frac{Pa - Qx}{M\varkappa_0^2} \cdot \xi$. Für $\xi = x$ erhält man die Geschwindigkeit des Punktes T, welche verschwinden muss. Aus der Gleichung $\frac{P-Q}{M} + \frac{Pa - Qx}{M\varkappa_0^2}\, x = 0$

ergibt sich demnach die Stärke Q des Momentanstosses, welchen das System in T erleidet, nämlich $Q = P\frac{\varkappa_0^2 + ax}{\varkappa_0^2 + x^2}$, welche mit Rücksicht auf $aa' = \varkappa_0^2$ die Form $Q = Pa\frac{a' + x}{\varkappa_0^2 + x^2}$ annimmt.

3. Die Intensität des Momentanstosses Q in T variirt mit dem Abstande x; sie verschwindet für $x = -a'$, d. h. wenn der feste Punkt in der Momentanaxe c liegt, wie selbstverständlich. Für alle $x > -a'$ ist Q positiv, für $x < -a'$ negativ. Der Stoss erfolgt daher in verschiedenem Sinne, je nachdem der feste Punkt diesseits oder jenseits C' liegt. Im einen Falle fällt der feste Punkt auf die vordere Seite der Ebene XY, im anderen auf die Hinterseite. Um die Punkte T des Maximalstosses zu finden, ist ihr Abstand x aus der Gleichung $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, d. h. aus $x^2 + 2a'x - \varkappa_0^2 = 0$ zu suchen. Man erhält hieraus

$$x = -a' \pm \sqrt{\varkappa_0^2 + a'^2},$$

welche Gleichung die Formen

$$x + a' = \pm\sqrt{\varkappa_0^2 + a'^2} = \pm\sqrt{a'(a' + a)} = \pm\sqrt{CS \cdot CC'}$$

annehmen kann. Es ist aber $\sqrt{\varkappa_0^2 + a'^2}$ der Trägheitsradius für die Momentanaxe und $x + a'$ der Abstand $C'T$ der Punkte T von der Momentanaxe. Daher gibt es zwei Punkte T, T' des Maximalstosses auf der Axe SX, welche diesseits und jenseits in gleichem Abstande von der Momentanaxe c abliegen. Sie sind die Schnittpunkte von SX mit einem um C' beschriebenen Kreise, dessen Radius $C'K$ (Fig. 110) das geometrische Mittel ist aus den Abständen $C'S$ und $C'C$ der Momentanaxe vom Massenmittelpunkte S und der Momentankraft P, oder was dasselbe ist, dessen Radius den Trägheitsradius der Momentanaxe darstellt. Beide

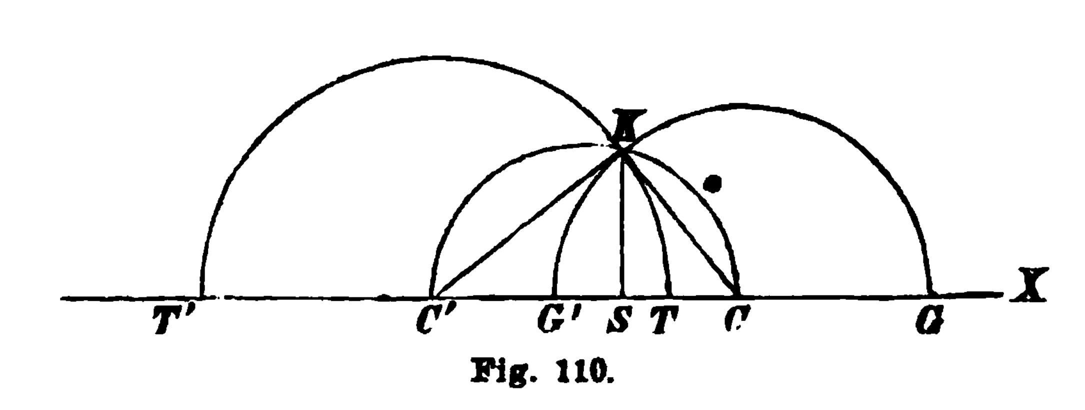


Fig. 110.

Punkte unterscheiden sich von einander durch den Sinn, in welchem sie stossen, indem sie auf entgegengesetzten Seiten der Momentanaxe liegen. Da die beiden Werthe von x, welche ihre Abstände TS, $T'S$ vom Massenmittelpunkte angeben, das Produkt $\varkappa_0^2$ liefern, so sind T, T' homologe Punkte der involutorischen Reihen C, C'. Der eine von ihnen liegt immer zwischen S und C.

Die Intensität des Maximalstosses ist, absolut genommen,

$$(Q) = \tfrac{1}{2}P\left(\sqrt{1 + \frac{a}{a'}} \pm 1\right).$$

Für $x = 0$ und $x = a$ wird die Stossintensität Q beidemal dieselbe, nämlich $Q = P$. Es stossen demnach der Angriffspunkt C der Kraft P und der Massenmittelpunkt gleich stark, aber nicht mit dem Maximum der Intensität; ein Punkt des Maximalstosses

$$(Q) = \tfrac{1}{2}P\left(\sqrt{1 + \frac{a}{a'}} + 1\right)$$

fällt zwischen beide Punkte, ein anderer Maximalstoss

$$(Q) = \tfrac{1}{2} P \left(\sqrt{1 + \frac{a}{a'}} - 1\right)$$

entspricht einem jenseits C gelegenen Stosspunkte.

4. Fällt der Angriffspunkt C der Kraft P in den Massenmittelpunkt S, so ist $a = 0$ und stösst das System im Abstande x von S mit der Intensität $Q = P \frac{\varkappa_0^2}{\varkappa_0^2 + x^2}$. Von den Punkten des Maximalstosses fällt der eine in S, der andere ins Unendliche. **Ein in Translation begriffenes System stösst also mit dem Massenmittelpunkte am heftigsten.**

5. Geht die Momentanaxe durch S, ist also $a' = 0$ und folglich $a = \infty$, welcher Fall einer verschwindend kleinen, unendlich fernen Kraft P, oder also einem Paare $\lim. Pa = N$ entspricht, so wird $Q = N \frac{x}{\varkappa_0^2 + x^2}$ und das Maximum des Stosses findet im Abstande $x = \pm \varkappa_0$ statt. Da aber das Paar beliebig in seiner Ebene gedreht werden kann, so kann jeder Punkt in der Ebene senkrecht zur Momentanaxe SY auf dem Umfange eines Kreises vom Radius $\varkappa_0$ als Punkt des Maximalstosses angesehen werden. **Ein System, welches eine Winkelgeschwindigkeit um eine Hauptaxe des Massenmittelpunktes besitzt, stösst also in allen Punkten, deren Abstand von der Rotationsaxe gleich dem Trägheitsradius derselben ist, mit dem Maximum der Heftigkeit.** Bei einer homogenen parallelepipedischen Stange, welche sich um die zur Länge $2l$ senkrechte Hauptaxe des Massenmittelpunktes dreht, wird der Abstand des Maximalstosses $x = \varkappa_0 = l\sqrt{\tfrac{1}{3}}$; bei einer homogenen Kugel vom Radius r, welche um einen Durchmesser rotirt, ist $x = \varkappa_0 = r\sqrt{\tfrac{2}{5}}$.

Man kann den vorliegenden Fall direct behandeln. Es sei N das Paar der Momentankräfte des Systems, T der Stosspunkt in der Entfernung x von der Hauptaxe SY und Q der Momentanwiderstand des festen Punktes oder die Intensität, mit welcher das System anstösst. Die Reduction der Kräfte für S gibt $-Q$ und das Paar $N - Qx$, welche in T die Geschwindigkeit

$$-\frac{Q}{M} + \frac{N - Qx}{M\varkappa_0^2} x = 0$$

hervorrufen, woraus $Q = N \frac{x}{\varkappa_0^2 + x^2}$ folgt.

6. Der Widerstand $-Q$, welchen der feste Punkt zu leisten hat, auf welchen das System mit dem Punkte T der Hauptaxe SX in der Entfernung $ST = x$ trifft, hat die Intensität $Q = P \cdot \frac{\varkappa_0^2 + ax}{\varkappa_0^2 + x^2}$. Wir zerlegen die Kraft P, welche in C angreift (Fig. 111) nach der Theorie der Parallelkräfte in zwei parallele Componenten, von denen die eine die Intensität Q besitzt, gleichen Sinnes mit P ist und in T angreift, während die andere Q' und ihr Angriffspunkt T' gesucht werden sollen.

Fig. 111.

Man hat dann $Q' + Q = P$ und wenn x' der Abstand des Punktes T' von S ist, $Q(x - a) = Q'(a - x')$, woraus

$$Q' = P \cdot \frac{x^2 - ax}{\varkappa_0^2 + x^2} \quad \text{und} \quad -xx' = \varkappa_0^2$$

folgt. Demnach ist T' der zu T reciproke Punkt in der Involution der Punkte (C, C'). Die Componente Q an T wird durch den Widerstand $-Q$ des festen Punktes vernichtet und bleibt daher von P nur Q' übrig, welche Componente den Geschwindigkeitszustand des Systems bestimmt, den dasselbe nach dem Anprallen an den festen Punkt besitzt. Bei der Reduction von Q' für S ergibt sich die Translationsgeschwindigkeit

$$u' = \frac{Q'}{M} = \frac{P}{M} \frac{x^2 - ax}{\varkappa_0^2 + x^2}$$

und die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega' = \frac{Q'x'}{M\varkappa_0^2} = \frac{P}{M} \frac{a - x}{\varkappa_0^2 + x^2}$$

um die Hauptaxe SY und beide zusammen sind derselben Winkelgeschwindigkeit ω' um eine zu SY parallele Momentanaxe äquivalent, deren Abstand von S ist $-\xi = \frac{u'}{\omega'} = \frac{\varkappa_0^2}{x'}$, sodass $-\xi x' = \varkappa_0^2$ und folglich $\xi = x$ wird. Die Momentanaxe des Geschwindigkeitszustandes nach dem Stosse geht daher durch den Stosspunkt T, wie selbstverständlich, da dessen Geschwindigkeit durch den Stoss auf Null reducirt wird und ist parallel zur ursprünglichen Momentanaxe. Die Grösse und der Sinn der Winkelgeschwindigkeit ω' nach dem Stosse hängt von der Lage des Stosspunktes ab. Für $x = a$ ist $\omega' = 0$, d. h. wenn der Stosspunkt mit dem Angriffspunkte C der Kraft P zusammenfällt, so kommt das System zum Stillstand. Für $x < a$ ist ω' gleichen Sinnes mit der ursprünglichen Winkelgeschwindigkeit ω, für $x > a$ hat sie entgegengesetzten Sinn. Das Maximum von ω' tritt ein für die Werthe von x, welche der Gleichung $x^2 - 2ax - \varkappa_0^2 = 0$ genügen. Für sie wird

$$x - a = \pm \sqrt{a^2 + \varkappa_0^2}.$$

Da die Grösse $\sqrt{a^2 + \varkappa_0^2}$ den Trägheitsradius CK der mit SY parallelen, durch C gehenden Axe darstellt (Fig. 110), so folgt, dass ein um C mit dem Trägheitsradius CK beschriebener Kreis auf SX die Punkte G, G' bezeichnet, mit welchen das System auf einen festen Punkt auftreffen muss, wenn seine Winkelgeschwindigkeit ω' nach dem Stosse so gross als möglich sein soll. Beide Punkte unterscheiden sich durch den verschiedenen Sinn von ω'. Soll $\omega = \omega'$ werden, so muss

$$\frac{Pa}{M\varkappa^2} + \frac{P}{M} \frac{(a - x)}{\varkappa_0^2 + x^2}, \text{ d. h. } x(ax - \varkappa_0^2) = 0,$$

also $x = 0$ oder $x = \frac{\varkappa_0^2}{a} = a$ sein. Die Differenz der Winkelgeschwindigkeiten ω und ω' vor und nach dem Stosse ist

$$\frac{P}{M}\left(\frac{a}{\varkappa_0^2} - \frac{a - x}{\varkappa_0^2 + x^2}\right) = \frac{P}{M\varkappa_0^2} \frac{x(ax - \varkappa_0^2)}{\varkappa_0^2 + x^2}.$$

7. Die Geschwindigkeiten v, v' der Punkte T, T', an welchen Q, Q' angreifen vor dem Stosse, sind:

$$v' = \omega \cdot C'T = \omega(a' + x), \quad v'' = \omega \cdot C'T' = \omega(a' + x') = \omega\left(a' - \frac{\varkappa_0^2}{x}\right).$$

Setzt man nun in die Ausdrücke

$$Q = P \frac{\varkappa_0^2 + ax}{\varkappa_0^2 + x^2}, \quad Q' = P \frac{x^2 - ax}{\varkappa_0^2 + x^2}$$

die Werthe $a = \frac{\varkappa_0^2}{a'}$ und $P = M\omega a'$ ein, so nehmen sie die Form

$$Q = M \frac{\varkappa_0^2}{\varkappa_0^2 + x^2} \omega (a' + x) = M \cdot \frac{\varkappa_0^2}{\varkappa_0^2 + x^2} \cdot v,$$

$$Q' = M \frac{x^2}{\varkappa_0^2 + x^2} \omega \left(a' - \frac{\varkappa_0^2}{x}\right) = M \cdot \frac{x^2}{\varkappa_0^2 + x^2} \cdot v'$$

an, sodass, wenn man die Masse M des Systems in zwei Theile m, m' theilt, welche sich wie $\varkappa_0^2 : x^2$, d. h. wie $\frac{\varkappa_0^2}{x} : x = (-x') : x$ verhalten, nämlich $m = \frac{M\varkappa_0^2}{\varkappa_0^2 + x^2}$, $m' = \frac{Mx^2}{\varkappa_0^2 + x^2}$ setzt, $Q = mv$, $Q' = m'v'$ wird. Denkt man also an die Stelle des stossenden Systems blos die beiden Punkte T, T', resp. mit den Massen m, m' behaftet, die im umgekehrten Verhältniss der Abstände $T'S : TS$ dieser Punkte von S stehen und beide durch eine unveränderliche Linie verbunden, so kann das gegebene System durch dies einfachere ersetzt werden, wenn es sich darum handelt, in T denselben Stoss Q auszuüben. Diese Gerade mit den beiden Massenpunkten hat mit dem System die Masse, den Massenmittelpunkt und das Trägheitsmoment für die Axe SY gemein. Denn die letztere Grösse ist:

$$mx^2 + m' \frac{\varkappa_0^4}{x^2} = m' \frac{\varkappa_0^2}{x^2} \cdot x^2 + m'\varkappa_2 \cdot \frac{\varkappa_0^2}{x^2} = m'\varkappa_0^2 + m\varkappa_0^2 = (m + m')\,\varkappa_0^2 = M\varkappa_0^2,$$

da $m : m' = \varkappa_0^2 : x^2$. Dieselbe Momentankraft P auf diese Linie, wie auf das System wirkend, besitzt demnach dieselbe Momentanaxe, dieselbe Winkelgeschwindigkeit und vermag in allen ihren Punkten zu stossen, wie die entsprechenden Punkte des Systems. Die Punkte des Maximalstosses für den Fall, dass P ins Unendliche verschwindet, aber das Paar $lim.\ Pa$ bleibt, z. B. stossen, da für sie $x = \pm \varkappa_0$ ist, als ob in ihnen die Massen $\frac{1}{2} M$ vereinigt wären.

§. 13. Wirkung eines Momentankräftesystems, welches einer Einzelkraft P äquivalent ist, deren Richtung eine Hauptebene XY des Massenmittelpunktes S in irgend einem Punkte C normal trifft (Fig. 112).

1. Die Kräftereduction für den Punkt S liefert dortselbst die Kraft P und das Paar $G = P \cdot SC$, dessen Ebene senkrecht zur Hauptebene XY und dessen Axe mithin dieser Ebene parallel ist. Nach §. 5 hat diese Axe die Richtung der Normalen des Cauchy-Poinsot'schen Centralellipsoids in dem Punkte J, in welchem die der Momentanaxe c parallele Axe SJ des Massenmittelpunktes diese Fläche durchdringt. Da die Richtung SH der Axe des Paares in die Hauptebene fällt, so steht die Tangentenebene in J senkrecht auf der Hauptebene, fällt die Momentanaxe selbst in sie hinein und ist conjugirt zu SC. Die Kraft P

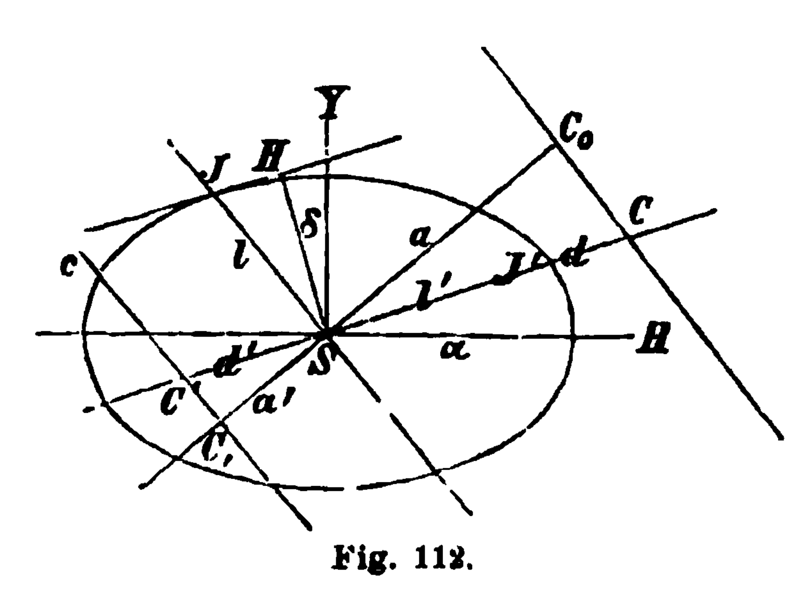


Fig. 112.

an S gibt die Translationsgeschwindigkeit $u = \frac{P}{M}$, das Paar G aber die Winkelgeschwindigkeit ω um die Axe CJ, deren Sinn mit G harmonirt und deren Grösse (§. 5) $\omega = \frac{G}{M\varepsilon^4} \cdot l\delta = \frac{Pd}{M\varepsilon^4} \cdot l\delta$, wenn $SJ = l$, $SH = \delta$, $SC = d$ gesetzt wird. u und ω zusammen liefern, da sie senkrecht zu einander sind, eine Winkelgeschwindigkeit ω um die mit SJ parallele Momentanaxe c, welche auf die Seite von SJ fällt, auf welcher C nicht liegt. Wir ziehen durch den Angriffspunkt C der Kraft P ebenfalls eine Parallele zu CJ und bezeichnen den Durchschnitt von SC und der Momentanaxe c mit C', sowie den Abstand $C'S$ mit d'. Die Schnittpunkte dieser Parallelen und der Axe c mit einer durch S gelegten Senkrechten seien C_0 und C_1 und $SC_0 = a$, $C_1S = a'$. Der Abstand a' der Momentanaxe vom Massenmittelpunkte ist nun $a' = u : \omega = \varepsilon^4 : ld\delta$, oder weil für den Trägheitsradius $\varkappa_0$ der Axe CJ $\varkappa_0^2 l^2 = \varepsilon^4$ ist, $a' = \varkappa_0^2 l : d\delta$, oder vermöge der Proportion $a : d = \delta : l$, $a' = \varkappa_0^2 : a$, sodass also $aa' = \varkappa^2$ wird. Daher:

Die Momentanaxe und eine ihr parallele, durch den Angriffspunkt der Kraft P gelegte Gerade stehen vom Massenmittelpunkte um Strecken ab, deren Produkt gleich dem Quadrate des Trägheitsradius für die ihnen gleichfalls parallele Axe des Massenmittelpunktes ist.

Die Punkte C_0, C_1 sind reciprok. Es sei l' der zu l conjugirte Semidiameter SJ', welcher in die Richtung SC fällt, ferner seien α, β die Halbaxen des vorliegenden Hauptschnitts des Centralellipsoids und ϑ der Winkel zwischen l und l'. Dann ist nach einem bekannten Satze über die Ellipse $ll' \sin\vartheta = \alpha\beta$. Zugleich ist $\delta : l = \sin\vartheta$. Bedenkt man nun, dass $d \sin\vartheta = a$, $d' \sin\vartheta = a'$ ist, so geht die Gleichung $aa' = \varkappa_0^2$ über in $dd' \sin^2\vartheta = \varkappa_0^2$, oder $dd' = \left(\frac{\varkappa_0}{\sin\vartheta}\right)^2 = \varkappa_0^2 \left(\frac{ll'}{\alpha\beta}\right)^2$, oder, weil $\varkappa_0 l = \varepsilon^2$ ist, in $dd' = \left(\frac{\varepsilon^2 l'}{\alpha\beta}\right)^2$, d. h. die Punkte C, C', nämlich die Angriffspunkte C der Kraft P auf einer durch den Massenmittelpunkt gehenden Geraden SC und die Schnittpunkte C' derselben mit der zugehörigen Momentanaxe bilden eine Involution gleichartiger Lage (C und C' liegen auf verschiedenen Seiten von S) für den Massenmittelpunkt als Mittelpunkt derselben. Das Produkt der Abstände $C'S$ und SC ist das Quadrat $\left(\frac{\varkappa_0^2}{\sin\vartheta}\right)^2$ des Trägheitsradius $\varkappa_0$ für die der Momentanaxe parallele Axe von S, dividirt durch den Sinus des Winkels, welchen die Momentanaxe mit der ihr conjugirten Richtung bildet.

Denkt man sich den Angriffspunkt C der Kraft P nach und nach alle Lagen des Hauptschnitts einnehmend, so erhält man für jede Lage der Geraden SC eine Strecke $\lambda = \frac{\varepsilon^2 l'}{\alpha\beta}$, welche den Abstand zweier Punkte auf SC diesseits und jenseits von S bezeichnet, welche homologe Punkte C, C' der Involution auf SC (ideelle Doppelpunkte) sind. Da jedes λ dem Semidiameter l' der Centralellipse $(\alpha\beta)$ proportional ist, welche mit ihm in dieselbe Richtung fällt, so bilden die ideellen Doppelpunkte der Involutionen eine der Centralellipse ähnliche und ähnlich liegende concentrische Ellipse. Das Aehnlichkeitsverhältniss ist $\lambda : l' = \varepsilon^2 : \alpha\beta$ und die Axen der neuen Ellipse sind $\varepsilon^2 : \beta$ und $\varepsilon^2 : \alpha$, resp. in den Richtungen

der Axen α und β der Centralellipse. Construirt man für jeden Punkt C zur Momentanaxe c die symmetrisch gegen S gelegene Gerade c'', so ist letztere die Polare von C in Bezug auf diese neue Ellipse und ergibt sich der Satz:

Auf jedem Diameter der Centralellipse bilden die Angriffspunkte C der Kraft P und die Schnittpunkte C' mit der zugehörigen Momentanaxe c eine Involution gleichartiger Lage. Der Ort der ideellen Doppelpunkte aller dieser Involutionen ist eine der Centralellipse concentrische, ähnliche und ähnlich liegende Ellipse. Die mit den Momentanaxen c symmetrisch gegen den Massenmittelpunkt S gelegenen Geraden c'' sind die Polaren der Angriffspunkte C in Bezug auf diese Ellipse. Die Punkte C und die Momentanaxen sind daher reciproke Systeme, sodass allen Punkten C einer Geraden Momentanaxen entsprechen, welche sich in einem Punkte schneiden und umgekehrt.

Beschreibt C einen Kegelschnitt, so umhüllt c ebenfalls einen Kegelschnitt.

Die Gleichung $\lambda = \varkappa_0 : \sin\vartheta$ oder $\varkappa_0 = \lambda \sin\vartheta$ lässt eine einfache Interpretation zu. $\lambda \sin\vartheta$ ist der Abstand des Endpunktes von λ von der Richtung des ihm conjugirten Diameters. Dieser Abstand ist demnach der Trägheitsradius für diesen conjugirten Diameter.

2. Es treffe das System mit einem Punkte T der Hauptebene XY auf einen festen Punkt, welcher durch seinen Widerstand $-Q$ den Geschwindigkeitszustand modificirt. Um die Intensität desselben zu bestimmen, führen wir $-Q$ ein und setzen die aus P und $-Q$ entspringende Geschwindigkeit des Punktes T gleich Null, welche Bedingung zur Bestimmung von Q für die verschiedenen Lagen von T in der Ebene XY führt. Zu dem Ende ziehen wir (Fig. 113) TE parallel SJ und bringen an E, dem Schnittpunkte von TE mit SC zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte $-Q$ und Q an. Die Kraft $-Q$ an E, welche mit P entgegengesetzten Sinnes ist, behandeln wir mit P zusammen, das Paar $-Q \cdot TE$ appart. Die Reduction von P und Q für den Punkt S liefert nun zunächst dortselbst eine Kraft $P - Q$ und ein Paar $Pd - Qe$, wenn $SE = e$ gesetzt wird. Erstere gibt die

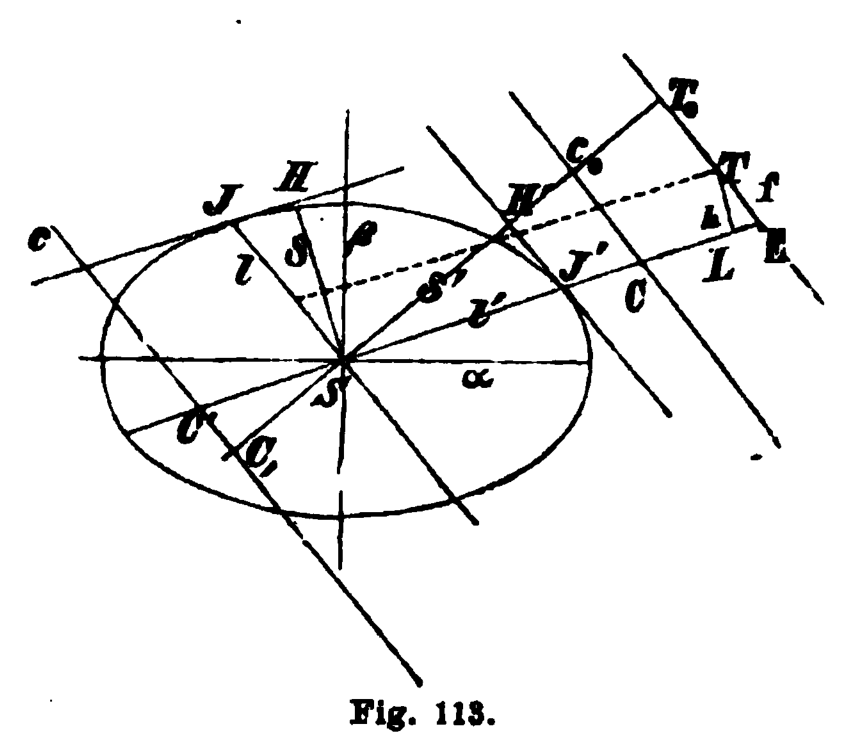


Fig. 113.

Translationsgeschwindigkeit $u = \dfrac{P-Q}{M}$ und letztere die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dfrac{Pd - Qe}{M\varepsilon^4}\, l\delta$ um SJ. Von beiden zusammen erlangt der Punkt T die Geschwindigkeit $\dfrac{P-Q}{M} + \dfrac{(Pd-Qe)\, l\delta b}{M\varepsilon^4}$, wenn $b = T_0 S$ der Abstand des Punktes T von SJ ist. Vermöge der Relationen $\varkappa_0 l = \varepsilon^2$, $\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} = \dfrac{\delta}{l}$ geht dieser Ausdruck über in $\dfrac{P-Q}{M} + \dfrac{(Pa - Qb)\, b}{M\varkappa_0^2}$, wobei also ω unter der Form $\omega = \dfrac{Pa - Qb}{M\varkappa_0^2}$ erscheint. Das Paar $-Q \cdot TE$, dessen Ebene der durch SJ gehenden, zur Ebene XY senkrechten Diametralebene des Centralellipsoids parallel ist, erzeugt eine

Winkelgeschwindigkeit ω' um den zu SJ conjugirten Diameter SC und wenn wir $TE = f$, den Abstand TL des Punktes T von SE mit h, SH' aber mit δ' bezeichnen, so wird $\omega' = -\frac{Qf}{M\varepsilon^4}\cdot l'\delta'$, oder wenn $\varkappa_1 l' = \varepsilon^2$, $\frac{h}{f} = \frac{\delta'}{l'}$, auch $\omega' = \frac{-Qh}{M\varkappa_1^2}$. Durch ω' erlangt T die Geschwindigkeit $-\frac{Q'h}{M\varkappa_1^2}\cdot h$; dieselbe ist, wie die von u und ω herrührende, senkrecht zur Ebene XY, aber jener entgegengesetzt. Setzen wir demnach die Gesammtgeschwindigkeit von T der Null gleich, so erhalten wir zur Bestimmung von Q die Gleichung

$$\frac{P-Q}{M} + \frac{Pa-Qb}{M\varkappa_0^2}\cdot b - \frac{Q'h^2}{M\varkappa_1^2} = 0,$$

woraus

$$Q = P\cdot\frac{1+\frac{ab}{\varkappa_0^2}}{1+\frac{b^2}{\varkappa_0^2}+\frac{h^2}{\varkappa_1^2}}$$

folgt. Q erscheint hier als eine Function von h und b, den Abständen des Punktes T von dem durch den Angriffspunkt C der Kraft P gehenden und dem diesem conjugirten Diameter SJ' und SJ. Für dasselbe P, denselben Punkt C und dasselbe b wird daher Q ein Maximum, wenn $h = 0$, d. h. wenn T in den durch C gehenden Diameter fällt. Ist diese erste Bedingung des Maximums von Q erfüllt, so bleibt nur noch der Ausdruck $Q = P\frac{\varkappa_0^2+ab}{\varkappa_0^2+b^2}$ in Bezug auf den Abstand b zu einem Maximum zu machen. Dies führt zu der weiteren Bedingung

$$b^2 + \frac{2\varkappa_0^2}{a}b - \varkappa_0^2 = 0,$$

welche mit Hülfe von

$$\varkappa_0^2 = aa', \quad \frac{b}{e} = \frac{a'}{d'} = \frac{\delta}{l}, \quad \frac{\varkappa_0^2 l^2}{\delta^2} = dd'$$

in $e^2 + 2d'e - dd' = 0$ umgesetzt werden kann. Diese Gleichung liefert

$$e + d' = \pm\sqrt{d'(d'+d)},$$

wodurch man den Satz erhält:

Die Punkte des Maximalstosses liegen auf dem durch den Angriffspunkt C der Kraft P gehenden Diameter des Centralellipsoids und sind die Schnittpunkte desselben mit einem um C' beschriebenen Kreise, dessen Radius das geometrische Mittel aus den Abständen der Punkte S und C von C' ist.

Die Grösse

$$\sqrt{d'(d'+d)} = \sqrt{dd'+d'^2} = \sqrt{\frac{\varkappa_0^2}{\sin^2\vartheta}+d'^2} = \frac{1}{\sin\vartheta}\sqrt{\varkappa_0^2+(d'\sin\vartheta)^2} = \frac{1}{\sin\vartheta}\sqrt{\varkappa_0^2+a^2}$$

zeigt, dass der Abstand der Punkte des Maximalstosses von der Momentanaxe, nämlich die Grösse $(e+d)\sin\vartheta$ gleich dem Trägheitsradius für die Momentanaxe ist. Man kann daher den Satz auch so ausdrücken:

Wenn ein System eine Winkelgeschwindigkeit um eine in einer Hauptebene des Massenmittelpunktes gelegene Momentanaxe besitzt, so liegen die beiden Punkte dieser Ebene, mit welchen das-

selbe gegen einen festen Punkt am heftigsten anstösst, auf dem zur Richtung der Momentanaxe conjugirten Diameter in gleichem Abstande von dieser Axe und zwar ist dieser Abstand der Trägheitsradius des Systems um die Axe.

Beide Maximalpunkte sind homologe Punkte der Involution des Strales SC, da das Produkt ihrer Abstände e, e' von S gleich

$$-dd' = -\frac{\varkappa_0^2 l^2}{\delta^2}.$$

Für die Intensität des Maximalstosses ergibt sich:

$$Q = \tfrac{1}{2} P \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{d}{d'}}\right),$$

der positive dieser beiden Werthe entspricht dem zwischen C und S gelegenen Punkte T, der negative dem jenseits C' gelegenen; für ersteren hat Q gleichen Sinn mit P, für letzteren entgegengesetzten.

Geht P durch S, so wird $d = 0$, also $Q = \frac{1}{2} P (1 \pm 1)$, die Punkte des Maximalstosses sind der Massenmittelpunkt S, welcher mit der Kraft $Q = P$ stösst, und ein unendlich ferner Punkt, in welchem die Kraft Q verschwindet.

Verschwindet P im Unendlichen, sodass aber $\lim. Pd$ sich einer bestimmten Grenze nähert, so geht die Momentanaxe durch S und liegen die Punkte des Maximalstosses um $\varkappa_0$ von ihr und mithin um $\varkappa_0 : \sin \vartheta = \lambda$ von S ab. Daher:

Die Punkte des Maximalstosses eines um einen Durchmesser des Centralellipsoids rotirenden Systems, welches in eine Hauptebene fällt, sind die Endpunkte des ihm in dieser Ebene conjugirten Durchmessers der Ellipse, welche der Ort der ideellen Doppelpunkte der reciproken Systeme (C, c) ist.

3. Für den Ort aller Punkte des Hauptschnittes XY, in welchen das System mit gleicher Intensität $Q = nP$ stösst, erhält man zwischen h und b als Coordinaten die Gleichung:

$$n\left(1 + \frac{b^2}{\varkappa_0^2} + \frac{h^2}{\varkappa_1^2}\right) = 1 + \frac{ab}{\varkappa_0^2},$$

oder wenn man statt h und b die Längen $SE = e$ und $ET = f$ einführt und sie übersichtlicher mit ξ, η bezeichnet, so erhält man mit Hülfe der Relationen $a = d \sin \vartheta$, $b = \xi \sin \vartheta$ und $h = \eta \sin \vartheta$ die folgende:

$$n\left(1 + \frac{\xi^2}{\lambda^2} + \frac{\eta^2}{\lambda'^2}\right) = 1 + \frac{d\,\xi}{\lambda^2},$$

wo für $\varkappa_0 : \sin \vartheta$ und $\varkappa_1 : \sin \vartheta$ nach Nr. 1 (Schluss) λ und λ' gesetzt ist, sodass λ' den $\varkappa_1$ entsprechenden Semidiameter der Ellipse der Doppelpunkte bedeutet. Verschiebt man nun den Ursprung der ξ, η aus S in den Punkt $\xi = \frac{1}{2} \frac{d}{n}$, $\eta = 0$, so kommt vermöge $dd' = \lambda$:

$$4n^2 \left(\frac{\xi^2}{\lambda^2} + \frac{\eta^2}{\lambda'^2}\right) = \frac{d}{d'} - 4n(n-1).$$

Der Ort der Punkte heftigsten Stosses ist also eine Ellipse, ähnlich der Centralellipse, deren Mittelpunkt auf CS im Abstande $\frac{1}{2} \frac{d}{n}$ von S liegt. Für $\frac{d}{d'} - 4n(n-1) = 0$, d. h. für $n = \frac{Q}{P} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{d}{d'} - 1}\right)$,

d. h. für das Maximum (Q) der Stossintensität reducirt sich dieselbe auf einen oder den anderen der Mittelpunkte des stärksten Stosses und für $4n(n-1) > \frac{d}{d'}$, d. h. für n grösser als der eben angegebene Werth, wird sie imaginär, weil Q nicht grösser als das Maximum der Stossintensität werden kann.

4. Als Beispiel zu den §§. 12, 13 kann ein ebenes System dienen, welches senkrecht zu seiner Ebene von einer Momentankraft P gestossen wird.

§. 14. Stoss eines unveränderlichen, in Bewegung begriffenen Systems auf irgend einen festen Punkt. In Bezug auf die Hauptaxen des Systems als Coordinatenaxen seien x, y, z die Coordinaten des Systempunktes T, welcher auf den festen Punkt trifft und $-Q$ der Momentanwiderstand, den dieser Punkt leistet. Wir reduciren denselben für den Massenmittelpunkt S und erhalten als Componenten desselben $-X$, $-Y$, $-Z$ und als Componenten des durch seine Verlegung an S eingeführten Paares die Axenmomente $-(yZ-zY)$, $-(zX-xZ)$, $-(xY-yX)$. Sind also X_0, Y_0, Z_0; L_0, M_0, N_0 die entsprechenden Reductionselemente der gegebenen Momentankräfte des Systems, so bestimmen die Kräfte X_0-X, Y_0-Y, Z_0-Z und die Paare $L_0-(yZ-zY)$, $M_0-(zX-xZ)$, $N_0-(xY-yX)$ die Geschwindigkeiten der Systempunkte. Die ersteren ertheilen nun dem Punkte x, y, z die Translationsgeschwindigkeiten $\frac{X_0-X}{M}$, $\frac{Y_0-Y}{M}$, $\frac{Z_0-Z}{M}$, wenn M die Masse des Systems ist, die drei letzten aber liefern zunächt die Winkelgeschwindigkeitscomponenten

$$p=\frac{L_0-yZ+zY}{Ma^2},\qquad q=\frac{M_0-zX+xZ}{Mb^2},\qquad r=\frac{N_0-xY+yX}{Mc^2},$$

wenn a, b, c die Trägheitsradien für die Hauptaxen der x, y, z sind. Durch sie erlangt daher der Punkt (xyz) die Geschwindigkeiten $qz-ry$, $rx-pz$, $py-qx$ und sind demnach die Componenten seiner Geschwindigkeit überhaupt

$$v_x=\frac{X_0-X}{M}+qz-ry,$$
$$v_y=\frac{Y_0-Y}{M}+rx-pz,$$
$$v_z=\frac{Z_0-Z}{M}+py-qx,$$

oder also mit Hülfe der Werthe für p, q, r:

$$v_x=\frac{X_0-X}{M}-\frac{y}{Mc^2}(N_0-xY+yX)+\frac{z}{Mb^2}(M_0-zX+xZ),$$
$$v_y=\frac{Y_0-Y}{M}-\frac{z}{Ma^2}(L_0-zY+yZ)+\frac{x}{Mc^2}(N_0-yX+xY),$$
$$v_z=\frac{Z_0-Z}{M}-\frac{x}{Mb^2}(M_0-xZ+zX)+\frac{y}{Ma^2}(L_0-zY+yZ).$$

Diese Componenten müssen in Folge der Wirkung des Widerstandes $-Q$ verschwinden; daher folgen dessen Componenten $-X$, $-Y$, $-Z$ aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
-(b^2y^2+c^2z^2+b^2c^2)X \quad &+b^2xyY &+c^2xzZ&=b^2yN_0-c^2zM_0-b^2c^2X_0\\
-a^2xyX+(c^2z^2+a^2x^2+c^2a^2)Y \quad & &-c^2yzZ&=c^2zL_0-a^2xN_0-c^2a^2Y_0\\
-a^2xzX \quad &-b^2yzY+(a^2x^2+b^2y^2+a^2b^2)Z& &=a^2xM_0-b^2yL_0-a^2b^2Z_0,
\end{aligned}$$

wozu noch hinzukommen für $-Q$ und seine Richtung $(\alpha\beta\gamma)$:

$$Q^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad \frac{\cos\alpha}{-X} = \frac{\cos\beta}{-Y} = \frac{\cos\gamma}{-Z} = \frac{1}{Q}.$$

Für den speciellen Fall, welcher sich an die Betrachtungen des §. 13 unmittelbar hätte anschliessen lassen, dass nämlich der Punkt T in der Hauptebene der xy liege und $Z_0 = 0$, $X_0 = Y_0 = 0$, also auch $N_0 = 0$ sei, gestaltet sich die Rechnung einfach. Man erhält $X = 0$, $Y = 0$, $Z = Q$ und

$$(a^2x^2 + b^2y^2 + a^2b^2)\, Q = a^2x M_0 - b^2y L_0 - a^2b^2 Z_0.$$

Hierin ist weiter, um die Bezeichnungsweise mit §. 13 in Einklang zu bringen,

$$Z_0 = P, \quad L_0 = y_0 Z_0 - z_0 Y_0 = y_0 P, \quad M_0 = z_0 X_0 - x_0 Z_0 = -x_0 P,$$

wenn x_0, y_0 die Coordinaten von C sind.

§. 15. **Stoss eines Punktes von der Masse m normal zu einer Hauptebene XY des Massenmittelpunktes S in einem Punkte C einer Hauptaxe SX** (Fig. 114). Wir nahmen in den §§. 10—14 an, dass die Momentankräfte des Systems einer einzelnen Kraft P äquivalent seien, ohne dass wir über den Ursprung dieser Kraft eine Voraussetzung machten. Jetzt wollen wir annehmen, dass P dadurch gegeben sei, dass ein Punkt von der Masse m mit der Geschwindigkeit v senkrecht zu SX in C das System trifft. Es ist dann aber nicht etwa die Momentankraft mv, welche der Masse m ihre Geschwindigkeit v zu geben vermag, die Kraft P selbst, sondern nur ein Theil derselben. Im Momente des Anprallens bildet nämlich m mit dem System ein Gesammtsystem, auf dessen Punkt C die Momentankraft mv wirkt; man hat zu bestimmen, welche Geschwindigkeit u dieser Punkt C annimmt; dieselbe Geschwindigkeit nimmt der mit ihm zusammentreffende Punkt m an und da dieser vorher die Geschwindigkeit v besass, so hat er $v - u$ verloren. Es ist mu die Momentankraft, welche der neuen Geschwindigkeit von m entspricht und $m(v - u)$ die Momentankraft P, welche im Stosse auf das System wirkt.

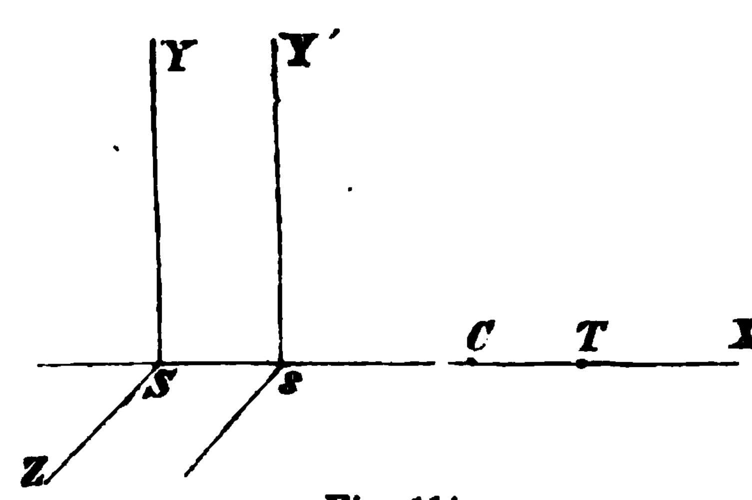


Fig. 114.

1. Es sei nun s der Massenmittelpunkt des Gesammtsystems der Massen M und m. Man hat dann $\frac{Ss}{m} = \frac{sC}{M} = \frac{SC}{M+m}$, also, wenn $SC = x$ gesetzt wird: $Ss = \frac{mx}{M+m}$, $sC = \frac{Mx}{M+m}$. Von den Hauptaxen des Massenmittelpunktes s für das Gesammtsystem der Massen M und m fällt die eine mit SX zusammen, die anderen sind parallel SY und SZ. Die Kraft mv ertheilt nun dem Gesammtsystem eine Translationsgeschwindigkeit $\frac{mv}{M+m}$ senkrecht zur Hauptebene XY und eine Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{mv \cdot sC}{(M+m)\,\varkappa'^2}$ um die Hauptaxe sY', wo $\varkappa'$ den Trägheitsradius des Gesammtsystems für diese Axe darstellt. Daher erlangt der Punkt C die Geschwindigkeit

$$u = \frac{mv}{M+m} + \frac{M^2 m v x^2}{(M+m)^3\,\varkappa'^2}$$

und wird, wenn $\varkappa$ den Trägheitsradius der Masse M für die Axe SY darstellt, weil

$$(M+m)\varkappa'^2 = M\varkappa'^2 + M\cdot\overline{Ss}^2 + m\cdot\overline{sC}^2 = M\varkappa^2 + M\left(\frac{mx}{M+m}\right)^2 + m\cdot\left(\frac{Mx}{M+m}\right)^2,$$

und also

$$\varkappa'^2 = M\cdot\frac{(M+m)\varkappa^2 + mx^2}{(M+m)^2}$$

ist, diese Grösse

$$u = mv\cdot\frac{\varkappa^2 + x^2}{(M+m)\varkappa^2 + mx^2} \quad \text{und} \quad v - u = \frac{Mv\varkappa^2}{(M+m)\varkappa^2 + mx^2},$$

sowie endlich

$$P = mv\cdot\frac{M\varkappa^2}{(M+m)\varkappa^2 + mx^2}.$$

2. Die Kraft P oder der Theil von mv, welche die Bewegung des Systems bestimmt, ist mit der Lage des Punktes C veränderlich, sie ist ein Maximum für $x = 0$, wenn also C in den Punkt S fällt, sie nimmt mit wachsendem x ab und verschwindet für $x = \infty$. Der Werth des Maximmus ist $P = mv\cdot\frac{M}{M+m}$. Man kann nun m und v so als Functionen von x bestimmen, dass mv constant bleibt und P für alle Punkte C der Geraden SX denselben Werth hat, wie in S. Hierzu ist vermöge des Ausdrucks für diese Grösse erforderlich, dass

$$m(\varkappa^2 + x^2) = Const. = MB^2,$$

wodurch

$$m = \frac{MB^2}{\varkappa^2 + x^2} \text{ und } v = \frac{mv}{m} = mv\,\frac{\varkappa^2 + x^2}{MB^2}$$

wird. Die Constanten B und mv bequemer auszudrücken, seien m_0 und v_0 die Werthe von m und v für $x = 0$, nämlich $m_0 = \frac{MB^2}{\varkappa^2}$, $v_0 = mv\,\frac{\varkappa^2}{MB^2}$, woraus $B^2 = \frac{m_0\varkappa^2}{M}$ und $mv = m_0v_0$ folgt. Man erhält hierdurch für m, v und P die Formen:

$$m = m_0\,\frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 + x^2}, \qquad v = v_0\,\frac{\varkappa^2 + x^2}{\varkappa^2}, \qquad P = m_0v_0\,\frac{M}{M+m_0}.$$

Diese Kraft P ertheilt dem System eine Translationsgeschwindigkeit $\frac{P}{M} = \frac{mv_0}{M+m_0}$, unabhängig von x und eine Winkelgeschwindigkeit um sY', welche Funktion von x ist, nämlich:

$$\omega = \frac{mv\cdot\overline{sC}}{(M+m)\varkappa'^2} = \frac{mvx}{(M+m)\varkappa^2 + mx^2},$$

deren Ausdruck mit Hülfe der Werthe für m und v die Form annimmt:

$$\omega = m_0v_0\,\frac{x}{(M+m_0)\varkappa^2}.$$

3. Der Theil P von mv, welcher die Bewegung des Systems bestimmt, wird in dem extremen Falle, dass m verschwindet und v unendlich gross wird, jedoch so, dass mv constant bleibt, gleich mv selbst und $mu = 0$.

4. Wir nehmen jetzt an, das System, welches von der Masse m mit der Geschwindigkeit v getroffen wird, stosse zugleich auf einen festen Punkt T in der Linie SX und wollen den Stoss Q auf T bestimmen. Wir fanden §. 12, dass die Kraft P, welche in der Entfernung $SC = a$ angreift, auf T in dem Abstande

ST den Stoss $Q = P\dfrac{\varkappa^2 + ax}{\varkappa^2 + x^2}$ hervorruft. In dem vorliegenden Falle tritt s an die Stelle von S, $\varkappa'^2$, $sC = \xi$ und $sT = ST - Ss = h - Ss$, wo $ST = h$, sind für $\varkappa_0$, a und x zu setzen, sodass wir zunächst erhalten:

$$Q = P\frac{\varkappa'^2 + \xi(h - \overline{Ss})}{\varkappa'^2 + (h - \overline{Ss})^2},$$

worin aber P den betreffenden Theil von mv bedeutet. Nun hat man aber:

$$P = mv\frac{M\varkappa^2}{(M+m)\varkappa^2 + mx^2}, \quad \varkappa'^2 = M\frac{(M+m)\varkappa^2 + mx^2}{(M+m)^2}, \quad Ss = \frac{mx}{M+m},$$

mit Hülfe welcher Werthe erhalten wird:

$$P = mv\frac{\varkappa^2 + h\xi}{\varkappa^2 + h^2 + \frac{m}{M}(\xi - h)^2}$$

Für $\xi = h$, d. h. wenn C mit T zusammenfällt, wird $P = mv$; für $\xi = 0$ ist

$$P = \frac{mv\varkappa^2}{\varkappa^2 + \left(1 + \frac{m}{M}\right)h^2}$$

und wächst P von $\xi = 0$ bis $\xi = h$; für $\xi = -\frac{\varkappa^2}{h}$ ist $P = 0$ und ebenso für $\xi = \infty$ $P = 0$. Es gibt daher ein Maximum von P. Dasselbe entspricht einem Werthe ξ, welcher der Gleichung

$$\xi^2 + 2h'\xi - \left(hl\left(1 + \frac{M}{m}\right) + hh'\right) = 0$$

genügt, wo $\frac{\varkappa^2}{h} = h'$ und $h + h' = l$ gesetzt sei. Diese Gleichung gibt zwei Punkte des Maximalstosses in gleichem Abstande von dem Punkte $x = -h'$.

Beispiel. Es sei $\frac{m}{M} = 1$, $h = \varkappa$, also T ein Punkt des Maximalstosses des gegebenen Systems (abgesehen von m) bei der Drehung von SY. Aus der Gleichung $\xi^2 + 2\varkappa\xi - 5\varkappa^2 = 0$ folgen die Abscissen der Maximalstosspunkte $\xi = -\varkappa \pm \varkappa\sqrt{6}$, wofür $Q = mv\dfrac{\pm\sqrt{6}}{12 \mp 4\sqrt{6}}$.

§. 16. Wenn das System nicht frei, sondern an Bedingungen gebunden ist, z. B. einen festen Punkt zu besitzen, um eine feste Axe sich zu drehen, mit gewissen Theilen feste Flächen zu berühren u. s. w., so leistet dasselbe vermöge dieser Bedingungen im Momente der Einwirkung momentaner Kräfte gewisse momentane Widerstände. Führt man dieselben als Momentankräfte ein und fügt sie den gegebenen Momentankräften hinzu, so kann alsdann das System als ein freies behandelt werden. In manchen Fällen kann man jedoch die Bedingungen durch Einführung unendlich grosser Massen in das System ersetzen. Diese Idee wurde zuerst von Poinsot ausgesprochen [*Sur la manière de ramener à la dynamique des corps libres, celle des corps qu'on suppose gênés par des obstacles fixes.* Liouville, Journ. de Mathém. 2[ième] Série, T. IV (1859), p. 171]; ihrer Wichtig-

keit wegen wollen wir auf dieselbe hier in einem Falle etwas näher eingehen.

Das System besitze einen festen Punkt A, d. h. einen solchen, welcher durch kein System von Momentankräften eine Geschwindigkeit erlangt. Reduciren wir ein beliebiges gegebenes System von Momentankräften für den Massenmittelpunkt S und untersuchen wir, welche Masse der Punkt A besitzen muss, wenn er die Rolle eines festen Punktes spielen soll, während das System als ein freies angesehen wird. Die Kräftereduction liefert eine Resultante R und ein resultirendes Paar G; erstere ertheilt dem System eine Translationsgeschwindigkeit $u = R : M$, letzteres eine Winkelgeschwindigkeit $\omega = G : M\varkappa_0^2$ um eine durch S gehende Axe c und wenn δ den Abstand des Punktes A von der Axe c bezeichnet, so sind u und $\omega\delta$ die Componenten der Geschwindigkeit desselben. Bildet nun R mit der Axe c den Winkel α, so ist das Quadrat der Geschwindigkeit von A gleich $u^2 + \omega^2\delta^2 - 2u\omega\delta\sin\alpha$; damit dasselbe unabhängig von α, welcher Winkel mit der Wahl des Kräftesystems variirt, verschwinde, muss $u = 0$ und $\delta = 0$ sein. Dies liefert die Bedingung $M = \infty$, $\delta = 0$. Der Punkt A muss mithin auf der Momentanaxe liegen und die Masse des Systems muss unendlich gross sein. Da die Axe c durch S geht und je nach Beschaffenheit des Kräftesystems verschiedene Richtungen haben kann, A aber stets auf ihr liegt, so fällt A mit S zusammen. Der feste Punkt muss also der Massenmittelpunkt sein. Legt man daher dem Punkte A eine unendlich grosse Masse bei, so sind alle Bedingungen erfüllt und kann das System als ein freies behandelt werden.

Es sei nun μ die dem Punkte A zuertheilte unendlich grosse Masse, während M die Masse des Systems an sich bedeute; es ist A der Massenmittelpunkt von $\mu + M$ und S der Massenmittelpunkt von M; die Entfernung AS wird unendlich klein sein. Das System kann nur rotiren um Axen, welche durch A gehen. Auf das Trägheitsmoment und die Winkelgeschwindigkeit des Systems um solche Axen hat die Einführung von μ keinen Einfluss, da A auf der Axe liegt. Indessen ist es räthlich, den jetzt vorliegenden Fall als einen Grenzfall anzusehen von dem Falle eines Systems $\mu + M$, in welchem ein Punkt A eine sehr grosse Masse μ besitzt. Der Massenmittelpunkt s dieses Systems fällt dann zwischen A und S und theilt AS im umgekehrten Verhältniss der Massen M und μ, sodass, wenn $As = i$, $AS = d$, also $sS = d - i$ gesetzt wird:

$$i = \frac{Md}{\mu + M}, \quad d - i = \frac{\mu d}{\mu + M}$$

ist. Das Trägheitsmoment von μ um eine Axe des Punktes s senkrecht zu AS ist μi^2, das von M ist $M\varkappa_0^2 + M(d-i)^2$, wenn $\varkappa_0$ der Trägheitsradius für die Parallelaxe des Punktes S ist. Daher wird das Trägheits-

moment von $\mu + M$ für die Axe des Punktes s:

$$(\mu + M)\,\varkappa^2 = \mu i^2 + M\varkappa_0^2 + M(d - i)^2 = M\left(\varkappa_0^2 + \frac{d^2}{1 + \frac{M}{\mu}}\right).$$

Wird nun $\mu = \infty$, so ergibt sich $\lim\,(\mu + M)\,\varkappa^2 = M(\varkappa_0^2 + d^2)$, welches genau das Trägheitsmoment des Systems M um die Axe des Punktes A ist. Der Trägheitsradius $\varkappa$ nähert sich der Null; indessen ist i unendlich klein gegen $\varkappa$, wie man aus der Gleichung

$$\frac{\varkappa^2}{i^2} = \frac{\mu}{M d^2}\left[d^2 + \varkappa^2\left(1 + \frac{M}{\mu}\right)\right]$$

ersieht, welche $\lim \frac{\varkappa^2}{i^2} = \infty$ liefert. Dagegen ist

$$\frac{\varkappa^2}{i} = \frac{d^2 + \varkappa_0^2\left(1 + \frac{M}{\mu}\right)}{d\left(1 + \frac{M}{\mu}\right)} = d + \frac{\varkappa_0^2}{d} = l$$

eine endliche Länge und bedeutet den Abstand des zu A reciproken Punktes.

An massgebender Literatur für den Inhalt dieses Capitels führen wir noch an:

Poinsot, *Théorie nouvelle de la rotation des corps* (Liouville, Journ. de Mathém. T. XVI, p. 9 u. 289 (1851); ist auch separat in zwei Ausgaben 1852 erschienen).

Bereits 1834 hatte Poinsot der Pariser Academie die Lösung des Rotationsproblems eines unveränderlichen Systems ohne Einwirkung continuirlicher Kräfte in einer weniger ausführlichen Bearbeitung vorgelegt. Dieselbe wurde auch als Anhang seinen *Elémens de statique* beigefügt.

Poinsot, *Questions dynamiques. Sur la percussion des corps.* [Liouville, Journ. 2ième Série, T. II (1857), p. 281 und T. IV (1859), p. 421; die erste dieser Abhandlungen auch in Schlömilch's Zeitschrift f. Mathem. u. Physik, III, S. 143 u. 274.]

Poinsot, *Sur la quantité de mouvement qui est transmise à un corps par le choc d'un point massif qui vient le frapper dans une direction donnée.* (Liouville, Journ. 2ième Série, T. IV, p. 161.)

Folie, *Théorie nouvelle du mouvement d'un corps libre* [*Bulletin de l'Acad. des sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique*, 2ième Série, T. XX (1865), p. 435].

Chelini, *Intorno a principii fondamentali della dinamica con applicazioni al pendolo ed alla percussion de' corpi secondo Poinsot.* [*Mem. dell' Accad. di Bologna, Ser.* 3za, T. VI (1875), pp. 409—459.] — *Sopra alcune questioni dinamiche, Memoria che fa seguito a quella intorno ai principii fondamentali della dinamica.* [Ibid. T. VIII (1877), p. 273—306.]

Diese Schriften sind zugleich für die nächstfolgenden Capitel von Bedeutung.

II. Capitel.

Kinetik der Kräfte erster Ordnung am unveränderlichen System; Aequivalenz und Reduction derselben. Die Bewegungsgleichungen von Euler.

§. 1. Der Geschwindigkeitszustand eines unveränderlichen Systems zur Zeit t wird durch den dieser Zeit entsprechenden Beschleunigungszustand desselben unendlich wenig geändert, indem zu den Geschwindigkeiten v der Systempunkte die Elementarbeschleunigungen $du = \varphi dt$ hinzutreten, um die der Zeit $t + dt$ entsprechenden Geschwindigkeiten v' zu bilden. Die Momentankräfte mv, welche die Geschwindigkeiten v zu geben vermögen, gehen ebenso in die Momentankräfte mv' über, welche den Geschwindigkeiten v' entsprechen, indem sich mit ihnen die unendlich kleinen Kräfte $mdu = m\varphi dt$ nach dem Parallelogramm der Kräfte verbinden. Diese Elementarkräfte durch das Zeitelement dividirt, stellen die continuirlichen Kräfte $m\varphi$ dar, durch welche der Beschleunigungszustand des Systems bestimmt wird. Wir werden dieselben im Folgenden reduciren, den Beschleunigungszustand bestimmen, welchen ein gegebenes Kräftesystem hervorruft und zusehen, wie die Bewegung des Systems unter Einfluss gegebener Kräfte sich von Zeitelement zu Zeitelement ändert.

§. 2. Besitzt das System zur Zeit t eine Translationsgeschwindigkeit v von bestimmter Grösse und Richtung, zur Zeit $t + dt$ eine andere Translationsgeschwindigkeit von der Grösse $v + dv$ und unendlich wenig geänderter Richtung, so sind die Beschleunigungen φ aller Punkte geometrisch gleich. Daher bilden die Kräfte $m\varphi$ ein System von Parallelkräften gleichen Sinnes und sind proportional den Massen der Punkte. Sie sind daher äquivalent einer Einzelresultanten $Rv = M\varphi$ von derselben Richtung, demselben Sinne und einer Intensität, gleich dem Produkte aus der Gesammtmasse des Systems und der gemeinschaftlichen Beschleunigung aller Systempunkte, welche durch den Massenmittelpunkt des Systems hindurchgeht.

§. 3. Das System rotire zwei Zeitelemente hindurch um dieselbe Axe c; seine Winkelgeschwindigkeit zur Zeit t sei ω, zur Zeit $t + dt$ gleich $\omega + d\omega$. Nach B. I, S. 443 besitzt ein Systempunkt M in der Entfernung r von c die Beschleunigung $\varphi = \vartheta r$, wo $\vartheta = (\omega^4 + \omega'^2)^{\frac{1}{2}}$ ist, unter dem Winkel Arctg $(\omega' : \omega^2)$ gegen r geneigt. Sie fällt in die zu c senkrechte Ebene des Punktes M und spaltet sich in die Tangentialbeschleunigung $\omega' r$ senkrecht zu r und die Centripetalbeschleunigung $\omega^2 r$ in der Richtung von r, die Axe c rechtwinklig schneidend und ihr zugewandt. Daher zerfallen die Kräfte $m\varphi$, welche den Punkten die Beschleunigungen φ zu ertheilen vermögen, in die Tangentialkräfte $m\omega' r$ und die Centripetalkräfte $m\omega^2 r$,

erstere senkrecht zu den Ebenen (c, M), letztere in diesen Ebenen senkrecht zu c (Fig. 115).

Durch den Massenmittelpunkt S legen wir eine Ebene senkrecht zu c, welche diese Axe in O schneiden wird und betrachten O als den Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen positive x-Axe mit OS zusammenfällt, dessen z-Axe c ist, positiv mit dem Sinne von ω harmonirend und dessen y-Axe dem Sinne der Rotation entspricht. Zunächst reduciren wir die Tangential- und Centripetalkräfte für den Punkt O. Die Reduction der Tangentialkräfte $m\omega' r$ unterscheidet sich von der Cap. I, §. 3 ausgeführten Reduction der Momentankräfte $m\omega r$ in nichts, als darin, dass ω' an die Stelle von ω tritt. Sie liefert daher an O eine Einzelkraft $M\omega' f$, wenn $f = OS$ den Abstand des Massenmittelpunktes S von der Axe c bezeichnet und weiter drei Paare $\omega' M \varkappa^2$, $-\omega' M \lambda^2$, $-\omega' M \mu^2$, der Reihe nach parallel den Axen der z, x, y und es bedeuten darin die Grössen $\varkappa$, λ, μ den Trägheitsradius für die Axe c und die Deviationsradien für die Ebenen der xz und yz wofür die Gleichungen bestehen: $M\varkappa^2 = \Sigma m r^2$, $M\lambda^2 = \Sigma m x z$, $M\mu^2 = \Sigma m y z$

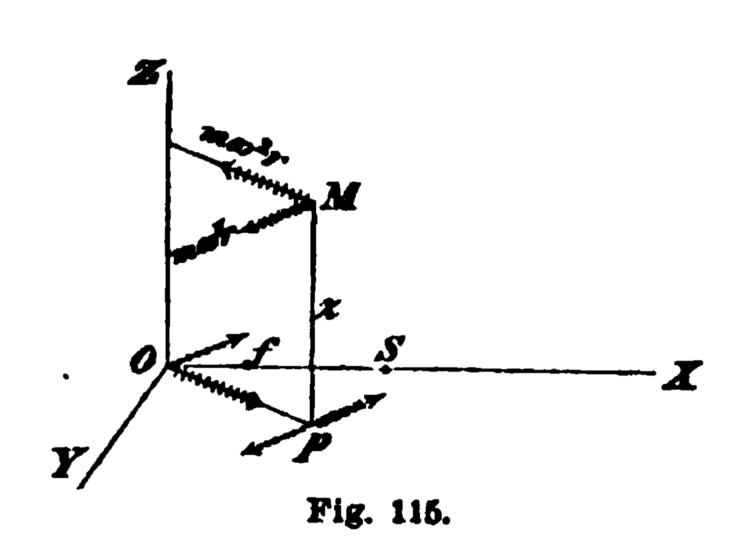


Fig. 115.

Das Paar der Tangentialkräfte hat das Axenmoment $\omega' M (\varkappa^4 + \lambda^4 + \mu^4)^{\frac{1}{2}}$ und sind dessen Richtungscosinusse proportional $-\lambda^2$, $-\mu^2$, $\varkappa^2$.

Die Centripetalkräfte $m\omega^2 r$ haben die Richtungscosinusse $-x : r$, $-y : r$, 0 und zerfallen daher in die Componenten $-m\omega^2 x$, $-m\omega^2 y$, 0 parallel den Coordinatenaxen. Sie liefern die Summen $-\omega^2 \Sigma m x$, $-\omega^2 \Sigma m y$, 0 oder, weil $\Sigma m x = Mf$, $\Sigma m y = 0$ ist, die Einzelkraft $\omega^2 M f$ von der Richtung SO. Sie liefern ferner Paare, deren Axenmomente $m\omega^2 r z$ senkrecht sind zu den Ebenen (c, M) und Richtungscosinusse $y : r$, $-x : r$, 0 besitzen, sodass sie sich spalten in Axenmomente $m\omega^2 y z$, $-m\omega^2 x z$, 0 parallel den Coordinatenaxen. Die Summation derselben liefert als Componenten des Axenmomentes der Centripetalkräfte $\omega^2 M \mu^2$, $-\omega^2 M \lambda^2$, 0. Das Axenmoment der Centripetalkräfte ist daher $\omega^2 M (\lambda^4 + \mu^4)^{\frac{1}{2}}$ und seine Richtungscosinusse sind proportional μ^2, $-\lambda^2$, 0. Dies Axenmoment ist senkrecht zu dem Axenmomente der Tangentialkräfte, dessen Richtungscosinusse proportional $-\lambda^2$, $-\mu^2$, $\varkappa^2$ sind, indem die Produktensumme

$$-\lambda^2\mu^2 + \mu^2\lambda^2 + \varkappa^2 \cdot 0 = 0$$

wird. Die Richtigkeit dieses Resultates erkennt man auch leicht direct. Die Axenmomente $m\omega^2 r z$ der Centripetalkräfte sind nämlich senkrecht zu den Axenmomenten $m\omega' r z$, welche mit $m\omega' r^2$ die Axenmomente $m\omega' \cdot OM$ der Tangentialkräfte bilden. Die Seiten des ebenen Polygons der Axen-

momente $m\omega^2 rz$ stehen daher senkrecht auf den Seiten des Polygons der Axenmomente $m\omega' rz$ und sind einander proportional. Daher sind diese Polygone ähnlich und stehen auch ihre Schlusslinien, d. h. die Axenmomente $\omega^2 M (\lambda^4 + \mu^4)^{\frac{1}{2}}$ und $\omega' M (\lambda^4 + \mu^4)$ auf einander senkrecht, von welchen letzteres aus den $m\omega' rz$ hervorgeht und mit $\omega' M\varkappa^2$ das Gesammtaxenmoment der Tangentialkräfte bildet. Der Bestandtheil $\omega' M\varkappa^2$ ist aber parallel c und mithin ohnehin senkrecht zum Axenmoment der Centripetalkräfte.

Die beiden Einzelkräfte $\omega' Mf$ und $\omega^2 Mf$, von denen die erste senkrecht zur Ebene (c, S) ist, während die andere die Richtung SO hat, liefern zusammen die Reductionsresultante $M\vartheta f$, welche unter dem Winkel Arctg $(\omega' : \omega^2)$ gegen f geneigt ist.

Wir fassen das Resultat dieser Untersuchung in den Satz zusammen:

Die Reduction der Kräfte $m\varphi$, welche den Punkten eines zwei aufeinander folgende Zeitelemente hindurch um dieselbe Axe c rotirenden Systems ihre Beschleunigungen φ zu ertheilen vermögen, liefert eine Resultante $R^{(1)} = M\vartheta f$, parallel und gleichen Sinnes mit der Beschleunigung ϑf des Massenmittelpunktes, proportional der Gesammtmasse des Systems und der Beschleunigung des Massenmittelpunktes. Das Axenmoment $G^{(1)}$ der Reduction, welches im Allgemeinen mit dem Reductionspunkt variirt, setzt sich zusammen aus dem Axenmomente der Tangentialkräfte $m\omega' r$ und dem Axenmomente der Centripetalkräfte $m\omega^2 r$. Wählt man zum Reductionspunkt den Punkt O, in welchem die Axe c von der zu ihr senkrechten Ebene des Massenmittelpunktes geschnitten wird und betrachtet O als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y, z, deren x- und z-Axen mit OS und c zusammenfallen, so zwar, dass der positive Drehungssinn von der x-Axe zur y-Axe mit dem Sinne der Winkelgeschwindigkeit ω harmonirt, so bilden die drei Axenmomente $\omega' M\varkappa^2$, $-\omega' M\lambda^2$, $-\omega' M\mu^2$, parallel den Axen der z, x, y das Axenmoment $\omega' M(\varkappa^4 + \lambda^4 + \mu^4)^{\frac{1}{2}}$ der Tangentialkräfte und sind seine Richtungscosinusse gegen die Axen der x, y, z den Grössen $-\lambda^2$, $-\mu^2$, $\varkappa^2$ proportional, wo $\varkappa, \lambda, \mu$ den Trägheitsradius für die Axe c und die Deviationsradien für die Ebenen der xz und der yz bedeuten, sodass nämlich $M\varkappa^2 = \Sigma mr^2$, $M\lambda^2 = \Sigma mxz$, $M\mu^2 = \Sigma myz$ ist. Das Axenmoment $\omega^2 M (\lambda^4 + \mu^4)^{\frac{1}{2}}$ der Centripetalkräfte ist senkrecht zum Axenmomente der Tangentialkräfte, hat zwei Componenten $\omega^2 M\mu^2$, $-\omega^2 M\lambda^2$ parallel den Axen

der x und y und seine Richtungscosinusse sind proportional μ^2, $-\lambda^2$, 0.

Bei der Uebertragung der Reduction auf den Massenmittelpunkt tritt zu dem Axenmomente $\omega' M \varkappa^2$ ein Axenmoment $-R^{(1)}h$ (Fig. 116) hinzu, wo h der Abstand des Punktes S von $R^{(1)}$ ist. Da $\omega' : \vartheta$ der Sinus des Winkels ist, den ϑ mit OS bildet, so wird $h = f\omega' : \vartheta$ und da $R^{(1)} = M\vartheta f$ ist, so erhält man für jenes Axenmoment $-\omega' M f^2$. Bezeichnet $\varkappa_0$ den Trägheitsradius für die mit c parallele Axe c_0 des Massenmittelpunktes S, so ist $\varkappa^2 = \varkappa_0^2 + f^2$

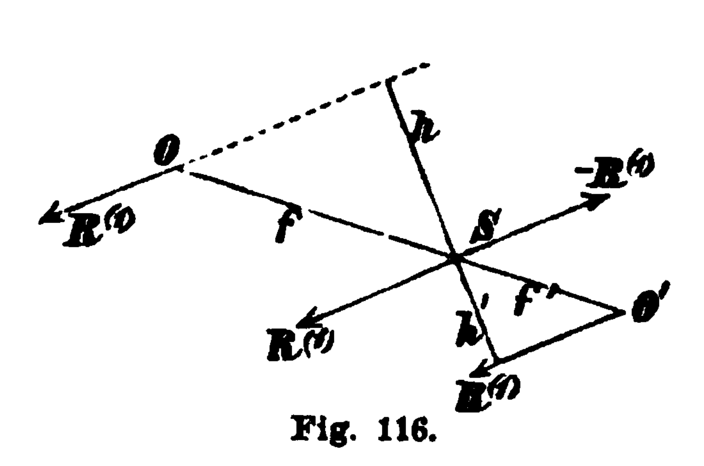


Fig. 116.

und hiermit erhält man für das Axenmoment der Reduction für S parallel zu c_0 den Ausdruck $\omega' M \varkappa^2 - \omega' M f^2 = \omega' M \varkappa_0^2$. Da ferner Σmxz, wenn man mit Beibehaltung der Axenrichtungen S zum Coordinatenursprung wählt durch $\Sigma m (f + x) z = f \Sigma mz + \Sigma mxz = \Sigma mxz$ zu ersetzen ist, so folgt:

Die Kräftereduction für den Massenmittelpunkt unterscheidet sich von der Reduction für den Punkt O blos dadurch, dass an die Stelle des Trägheitsradius $\varkappa$ der Axe c der Trägheitsradius $\varkappa_0$ der Axe c_0 des Massenmittelpunktes tritt, welche der Axe c parallel läuft.

Um die Centralaxe der Kräfte und die Reduction für sie zu finden, verlegen wir $R^{(1)}$ von S aus parallel mit sich an den Punkt O' auf der Richtung OS, den wir mit O auf entgegengesetzten Seiten von S liegend so bestimmen, dass das aus der Verlegung entspringende Paar $-R^{(1)}h'$ das Paar $\omega' M \varkappa_0^2$ tilgt. Bezeichnen wir OS' mit f', so ist sein Arm h' die Projection von f' auf die zur Beschleunigung des Punktes S senkrechte Richtung. Daher ist $h' = f'\omega' : \vartheta$ und liefert die Bedingung

$$\omega' M \varkappa_0^2 - R^{(1)} h' = 0$$

mit Hülfe von $R^{(1)} = M\vartheta f$ die Gleichung $ff' = \varkappa_0^2$. Die Punkte O, O' sind daher homologe Punkte einer Punktinvolution gleichartiger Lage auf der Linie OS und $\varkappa_0^2$ ist die Constante derselben. Um $R^{(1)}$ durch eine weitere Verlegung in die Richtungslinie der Centralaxe zu bringen, zerlegen wir die noch übrigen Axenmomente parallel und senkrecht zu $R^{(1)}$. Parallel den Axen der x, y haben wir an Axenmomenten $M(\omega^2\mu^2 - \omega'\lambda^2)$, $-M(\omega^2\lambda^2 + \omega'\mu^2)$, während parallel der z-Axe kein Axenmoment mehr vorliegt. Ihre Projectionssumme für die Richtung von $R^{(1)}$ liefert das der Centralaxe entsprechende Axenmoment $G^{(1)}$. Um dasselbe zu bilden, sind die genannten Axenmomente mit den Richtungscosinussen $-\omega^2 : \vartheta$, $\omega' : \vartheta$ von $R^{(1)}$ gegen die Axen der x und y zu multipliciren und zu addiren. Wir erhalten hierdurch $G^{(1)} = -\vartheta M \mu^2$. Die Projectionssumme für die zu

$R^{(1)}$ senkrechte Richtung gibt das zur Verlegung dienende Axenmoment $H^{(1)}$. Wir erhalten es, indem wir jene Axenmomente mit den Richtungscosinussen dieser Richtung, nämlich mit $\omega' : \vartheta$ und $\omega^2 : \vartheta$ multipliciren und addiren, nämlich $H^{(1)} = - \vartheta M \lambda^2$. Die Strecke q, um welche $R^{(1)}$ in der Richtung der z zu verlegen ist, d. h. der Abstand der Centralaxe von der xy-Ebene, mit welcher sie parallel läuft, genügt daher der Bedingung $R^{(1)} q = H^{(1)}$, deren Entwickelung zu $fq = - \lambda^2$ führt. Daher der Satz:

Zieht man in der Ebene der Axe c und des Massenmittelpunktes S mit c auf entgegengesetzter Seite von S eine Parallele im Abstande f' von S, sodass $ff' = \varkappa_0^2$ wird, so trifft die Centralaxe der Kräfte diese Linie und zwar in einem Abstande q von der Geraden OS, welcher der Bedingung $fq = - \lambda^2$ genügt. Das der Centralaxe entsprechende Axenmoment $- \vartheta M \mu^2$ ist unabhängig von dem Deviationsradius λ.

Ist die Axe c eine Hauptaxe, so werden λ^2 und μ^2 Null und liefert die Reduction für den Massenmittelpunkt $R^{(1)} = M\vartheta f$, $G^{(1)} = \omega' M \varkappa_0^2$; in diesem Falle wird das Axenmoment der Centralaxe Null. Daher sind die Kräfte, welche blos Beschleunigung um eine Hauptaxe geben, stets einer Einzelkraft äquivalent. Da $\lambda^2 = 0$ ist, so wird $q = 0$ und fällt dieselbe stets in die zu c senkrechte Ebene von S.

§. 4. Das System rotire zu den Zeiten t und $t + dt$ um die beiden einander unendlich nahen, parallelen Axen c, c' mit den Winkelgeschwindigkeiten ω und $\omega + d\omega$. Da jeder senkrecht zu den Axen geführte ebene Schnitt des Systems sich während zweier Zeitelemente in seiner Ebene bewegt, so ergibt sich nach B. I, S. 450 und S. 477 a. E., dass die Beschleunigung in diese Ebene fällt. In ihr sind die Schnittpunkte der Ebene mit den Axen c, c' die beiden, den Zeiten t, $t + dt$ entsprechenden Momentencentra C, C', liegt auf CC' der Mittelpunkt H der Winkelbeschleunigung $\alpha = \omega'$ und in ihr findet sich der Mittelpunkt G der Beschleunigungen. Während bei dem Falle des §. 3 dieser Mittelpunkt mit dem Punkte C zusammenfällt, ist er hier von ihm um eine endliche Strecke entfernt. Da alle Schnitte senkrecht zu c, c' identische Bewegungen ausführen, so liegen alle Punkte G, sowie alle Punkte H auf Geraden parallel c, nämlich den Axen g, h der Beschleunigung und der Winkelbeschleunigung. Die Beschleunigung eines Systempunktes M im Abstande $p = MG$ von der Beschleunigungsaxe g ist ϑp, wo $\vartheta = (\omega^4 + \omega'^2)^{\frac{1}{2}}$ und ist gegen p unter dem Winkel Arctg $(\omega' : \omega^2)$ geneigt. Sie zerfällt in die Componenten $\omega' p$ und $\omega^2 p$ senkrecht zu p und in der Richtung von p, dem Punkte G zugewandt. Indem wir die Kräfte $m\varphi$ in ihre Componenten $m\omega' p$ und $m\omega^2 p$ zerlegen und bedenken, dass zwischen dem vorliegenden Falle und dem

Falle des §. 3 nur der Unterschied besteht, dass die Beschleunigungsaxe g dort mit der Momentanaxe c zusammenfiel, während sie hier in endlichem Abstande parallel läuft, übersieht man leicht, dass das dort gefundene Resultat unmittelbar auf unseren Fall übertragen werden kann. Wir erhalten hierdurch den Satz:

Die Kräfte $m\varphi$, welche den Punkten eines um zwei aufeinanderfolgende parallele Axen c, c' zu den Zeiten t und $t+dt$ mit den Winkelgeschwindigkeiten ω und $\omega+d\omega$ rotirenden Systems ihre Beschleunigungen zu ertheilen vermögen, sind äquivalent einer Resultanten $R^{(1)}$ und einem Paare $G^{(1)}$. Die Resultante stimmt nach Richtung und Sinn mit der Beschleunigung des Massenmittelpunktes S überein und ihre Intensität ist $R^{(1)}=M\vartheta f$, wo $\vartheta=(\omega^4+\omega'^2)^{\frac{1}{2}}$ ist und f den Abstand des Massenmittelpunktes von der Beschleunigungsaxe g bedeutet. Das Paar $G^{(1)}$ bildet sich aus den beiden Paaren, welche aus der Reduction der Tangential- und Centripetalkräfte in Bezug auf die Axe g entspringen. Wählen wir den Schnittpunkt G der zur Axe g senkrechten Ebene des Massenmittelpunktes und dieser Axe zum Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen x- und z-Axen GS und g sind, von dem Drehungssinne in der xy-Ebene harmonirend mit der Winkelgeschwindigkeit ω, so hat für G als Reductionspunkt das Axenmoment des Paares der Tangentialkräfte die Componenten $\omega' M\varkappa^2$, $-\omega' M\lambda^2$, $-\omega' M\mu^2$ parallel den Axen der z, x, y und das Paar der Centripetalkräfte die Componenten $\omega^2 M\mu^2$, $-\omega^2 M\lambda^2$, 0 parallel den Axen der x, y, z. Darin bedeuten $\varkappa$, λ, μ den Trägheitsradius des Systems für die Beschleunigungsaxe g und die Deviationsradien für die Ebenen der xz und yz. Für die Reduction in Bezug auf den Massenmittelpunkt S tritt an die Stelle von $\varkappa$ der Trägheitsradius für die zu g parallele Axe g_0 dieses Punktes, während λ, μ dieselben Werthe haben. In Betreff der Reduction für die Centralaxe hat man auf GS jenseits S den Punkt G' so zu bestimmen, dass, wenn $SG'=f'$ gesetzt wird, die Gleichung $ff'=\varkappa_0^2$ erfüllt wird; die Centralaxe, parallel der Resultanten $R^{(1)}$, schneidet eine durch G' zu g parallele Axe g' im Abstande q von G', sodass $fq=-\lambda^2$ ist. Das der Centralaxe entsprechende Axenmoment ist $G^{(1)}=-\vartheta M\mu^2$.

§. 5. Für ein ebenes Punktsystem ist jede zur Ebene senkrechte Axe eine Hauptaxe und werden daher λ^2, μ^2, q und $G^{(1)}$ für die Centralaxe Null. Die Centralaxe fällt in die Ebene des Systems und sind die Kräfte $m\varphi$ im Allgemeinen einer Einzelresultanten $R^{(1)}=M\vartheta f$ äquivalent. Für die Reduction in Bezug auf S wird $G^{(1)}=\omega' M\varkappa_0^2$.

Es seien C, C' (Fig. 117) der Mittelpunkt der Geschwindigkeiten und der Schnittpunkt der Centralaxe der Momentankräfte mit der Linie CS. Dann ist (Cap. I, §. 3) $aa' = \varkappa_0^2$. Da nun auch $ff' = \varkappa_0^2$ ist, so folgt $aa' = ff'$. Daher:

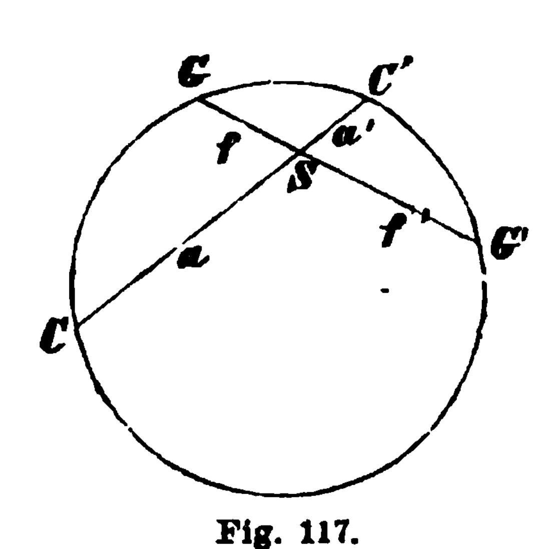


Fig. 117.

Im ebenen, in seiner Ebene sich bewegenden System liegen die Mittelpunkte C, G der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen mit den Punkten C', G', in welchen die Verbindungslinien von C und G mit dem Massenmittelpunkte S von den Centralaxen der Momentankräfte mv und der continuirlichen Kräfte $m\varphi$ erster Ordnung getroffen werden, auf demselben Kreise.

Drei der vier Punkte C, G, C', G' bestimmen daher den vierten. Fällt der Mittelpunkt C der Geschwindigkeiten mit S zusammen, so rückt C' ins Unendliche und geht der Kreis in die Gerade GG' über; die Momentankräfte sind einem Paare $\omega M \varkappa_0^2$ äquivalent. Fällt C' in S, so hat das System eine Translationsgeschwindigkeit. Aehnliches tritt ein, wenn der Mittelpunkt G der Beschleunigungen mit S zusammenfällt; dann rückt G' ins Unendliche und werden die Kräfte $m\varphi$ einem Paare $\omega' M \varkappa_0^2$ äquivalent. Fällt G' mit S zusammen, so geht $R^{(1)}$ durch S, rückt G ins Unendliche und werden die Beschleunigungen aller Systempunkte geometrisch gleich. Treten C und G beide in S ein, so wird das System von einem Momentankräftepaar ergriffen und von einem continuirlichen Paare beschleunigt; fallen C' und G' beide zusammen in S, so besitzt das System Translationsgeschwindigkeit und erlangen alle Systempunkte parallele und gleiche Beschleunigungen desselben Sinnes (Translationsbeschleunigung).

In dem allgemeineren Falle des §. 4 bestimmen die Axen c und g mit S zwei Ebenen, welche von den Resultanten R und $R^{(1)}$ in zwei Punkten geschnitten werden, die mit c und g auf einem Cylinder liegen.

§. 6. Rotirt das System zu den Zeiten t und $t + dt$ um zwei sich in einem Punkte O schneidende Axen c, c' mit den Winkelgeschwindigkeiten ω und $\omega + d\omega$, so ist nach B. I, S. 479 der Punkt O Mittelpunkt der Beschleunigungen; durch ihn geht die Axe h der Winkelbeschleunigung $\alpha = (\omega'^2 + \omega^2\psi^2)^{\frac{1}{2}}$, welche in die Ebene (cc') fällt und gegen c unter dem Winkel Arctg $(\omega\psi : \omega')$ geneigt ist, wo ψ die Wechselgeschwindigkeit der Axe c bezeichnet. Rotirt das System um zwei sich kreuzende Axen c, c', so liegt der Mittelpunkt G der Beschleunigungen nicht auf der Axe c, zieht man aber durch G zwei Axen parallel zu c und h, so bildet sich die Beschleunigung eines Systempunktes mit Hülfe dieser Axen in derselben Weise, wie in dem Falle, dass c, c' sich schneiden. Wir können daher uns auf

den allgemeineren Fall beschränken. Die Beschleunigung eines Systempunktes M hat eine centripetale Componente $\omega^2 r$ und eine von der Winkelbeschleunigung α herrührende $\alpha r'$, wo r und r' seine Abstände von den Axen c, h des Punktes G bezeichnen. Die erstere schneidet c rechtwinklig und ist c zugewandt, die letztere ist senkrecht zur Ebene (h, M) und harmonirt mit dem Sinne von α. Die diesen Componenten entsprechenden Kräfte $m\omega^2 r$ und $m\alpha r'$ können für den Punkt G nach den im Vorstehenden entwickelten Methoden leicht reducirt werden. Sie liefern eine Reductionsresultante $R^{(1)}$ gleich dem Producte aus der Masse des Systems und der Beschleunigung des Massenmittelpunktes S, von derselben Richtung und demselben Sinne, wie diese. Sie liefern ferner ein Paar, dessen Axenmoment aus den Axenmomenten der Centripetalkräfte und denen der Kräfte $m\alpha r'$ nach Anleitung des §. 4 gebildet werden kann, indem diese letzteren sich wie Tangentialkräfte in Bezug auf die Axe h verhalten.

Grösserer Uebersicht halber wollen wir jedoch die Winkelbeschleunigung α in ihre tangentiale und normale Componente ω' und $\omega\psi$ um die Axe c und die Axe n, welche in der Ebene (ch) senkrecht zu c ist, spalten und dabei den Punkt G als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y, z ansehen, dessen z-Axe mit c und dessen x-Axe mit n zusammenfällt, positiv im Sinne von ω und $\omega\psi$ genommen und dessen Drehungssinn um die z-Axe mit ω harmonirt.

Die Centripetalkräfte $m\omega^2 r$ (Fig. 118), deren Richtungscosinusse $-x:r$, $-y:r$, 0 sind, haben die Componenten $-m\omega^2 x$, $-m\omega^2 y$, 0 und liefern zur Bildung der Reductionsresultanten $R^{(1)}$ die Componenten

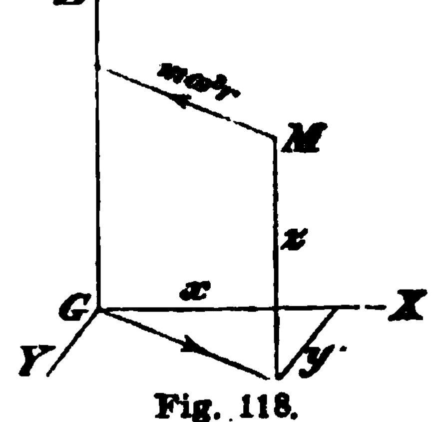


Fig. 118.

$$X_c^{(1)} = -\omega^2 \Sigma mx = -\omega^2 M x_1,$$

$$Y_c^{(1)} = -\omega^2 \Sigma my_1 = -\omega^2 M y_1, \qquad Z_c^{(1)} = 0,$$

wo x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Massenmittelpunktes S bedeuten. Dieselben gehen zusammen zu der Kraft $R_c^{(1)} = \omega^2 M (x_1^2 + y_1^2)^{\frac{1}{2}} = \omega^2 M f$, wenn f den Abstand des Punktes S von c bezeichnet und diese hat die Richtung und den Sinn der Centripetalbeschleunigung $\omega^2 f$ des Massenmittelpunktes. Die Centripetalkräfte liefern ferner Paare, deren Axenmomente $m\omega^2 rz$ die Richtungscosinusse $y:r$, $-x:r$, 0 besitzen und sich vereinigen zu den Componenten parallel den Coordinatenaxen:

$$L_c^{(1)} = \omega^2 \Sigma myz = D\omega^2, \quad M_c^{(1)} = -\omega^2 \Sigma mzx = -E\omega^2, \quad N_c^{(1)} = 0,$$

wenn wir die Bezeichnungsweise von B. I, S. 104 in Anwendung bringen. Es ist daher das Axenmoment der Centripetalkräfte $G_c^{(1)} = \omega^2 (D^2 + E^2)^{\frac{1}{2}}$

und seine Richtungscosinusse sind proportional D, $-E$, 0; es steht also senkrecht auf c.

Die Tangentialkräfte $m\omega' r$ (Fig. 119) besitzen die Richtungscosinusse $-y:r$, $x:r$, 0 und die Componenten $-m\omega' y$, $m\omega' x$, 0; sie liefern zur Bildung der Reductionsresultanten die Beiträge

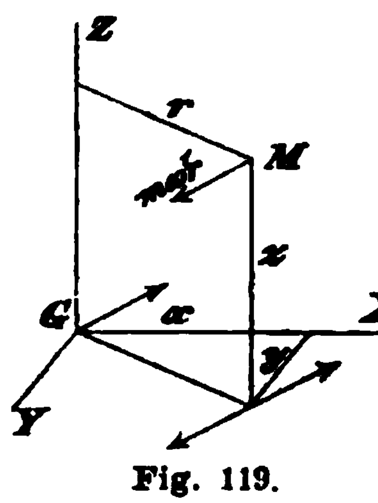


Fig. 119.

$$X_t^{(1)} = -\omega'\Sigma my = -\omega' My_1,$$
$$Y_t^{(1)} = \omega'\Sigma mx = \omega' Mx_1, \quad Z_t^{(1)} = 0,$$

aus welchen die Kraft $R_t^{(1)} = \omega' Mf$ entspringt von der Richtung und dem Sinne der Tangentialbeschleunigung $\omega' f$ von S. Die Axenmomente $m\omega' r \,.\, GM$ der Tangentialkräfte zerfallen in $m\omega' rz$ mit den Richtungscosinussen $-x:r$, $-y:r$, 0 und $m\omega' r^2$ parallel der z-Axe, sodass das Paar $G_t^{(1)}$ der Tangentialkräfte zu Componenten hat

$$L_t^{(1)} = -\omega'\Sigma mzx = -E\omega', \quad M_t^{(1)} = -\omega'\Sigma myz = -D\omega', \quad N_t^{(1)} = C\omega'$$

und sein Werth $G_t^{(1)} = \omega'(C^2 + D^2 + E^2)^{\frac{1}{2}}$ ist, mit den Richtungscosinussen proportional $-E$, $-D$, C.

Die Paare $G_c^{(1)}$ und $G_t^{(1)}$ der Centripetal- und Tangentialkräfte sind senkrecht zu einander und können daher in ein Paar vereinigt werden, für welches das Quadrat des Axenmomentes $(D^2 + E^2)(\omega^4 + \omega'^2) + C^2\omega'^2$ ist. Seine Richtungscosinusse sind proportional

$$D\omega^2 - E\omega', \quad -(E\omega^2 + D\omega'), \quad C\omega'.$$

Die Kräfte $m\omega\psi r'$ (Fig. 120), welche der Normalwinkelbeschleunigung entsprechen, liefern, da sie die Richtungscosinusse 0, $-z:r'$, $y:r'$ und die Componenten 0, $-m\omega\psi z$, $m\omega\psi y$ besitzen, als Beitrag zur Bildung von $R^{(1)}$:

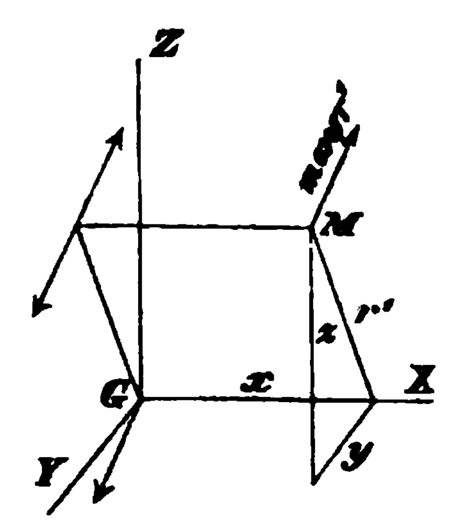


Fig. 120.

$$X_n^{(1)} = 0, \quad Y_n^{(1)} = -\omega\psi\Sigma mz = -\omega\psi Mz_1,$$
$$Z_n^{(1)} = \omega\psi\Sigma my = \omega\psi My_1$$

und treten zusammen zu der Kraft $R_n^{(1)} = \omega\psi M\delta$, wenn δ den Abstand $\delta = (y_1^2 + z_1^2)^{\frac{1}{2}}$ des Massenmittelpunktes von der Axe n bedeutet. Dieselbe stimmt nach Richtung und Sinn mit der Beschleunigung $\omega\psi\delta$ dieses Punktes überein.

Das Paar der Normalwinkelbeschleunigungskräfte bildet sich analog dem Paare der Tangentialkräfte. Man erhält seine Componenten aus denen jener, indem man ω' mit $\omega\psi$ und z, x, y resp. mit x, y, z vertauscht, nämlich

$$L_n^{(1)} = A\omega\psi, \quad M_n^{(1)} = -\omega\psi\Sigma mxy = -F\omega\psi,$$
$$N_n^{(1)} = -\omega\psi\Sigma mzx = -E\omega\psi.$$

Das Axenmoment des Paares selbst ist $G_n^{(1)} = \omega\psi\,(A^2 + E^2 + F^2)^{\frac{1}{2}}$ und seine Richtungscosinusse sind proportional A, $-F$, $-E$.

Aus den Grössen $R_c^{(1)}$, $R_t^{(1)}$, $R_n^{(1)}$; $G_c^{(1)}$, $G_t^{(1)}$, $G_n^{(1)}$ setzen sich die Reductionselemente $R^{(1)}$, $G^{(1)}$ der Kräfte $m\varphi$ zusammen. Sind nämlich $X^{(1)}$, $Y^{(1)}$, $Z^{(1)}$; $L^{(1)}$, $M^{(1)}$, $N^{(1)}$ die Componenten von $R^{(1)}$ und $G^{(1)}$, so haben wir:

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= -\omega^2 M x_1 - \omega' M y_1, & L^{(1)} &= D\omega^2 - E\omega' + A\omega\psi,\\ Y^{(1)} &= -\omega^2 M y_1 + \omega' M x_1 - \omega\psi M z_1, & M^{(1)} &= -E\omega^2 - D\omega' - F\omega\psi,\\ Z^{(1)} &= \omega\psi M y_1, & N^{(1)} &= C\omega' - E\omega\psi. \end{aligned}$$

Die für den Mittelpunkt G der Beschleunigungen ausgeführte Kräftereduction können wir leicht auf den Massenmittelpunkt S übertragen. Die Resultante $R^{(1)}$ erleidet dabei keine Aenderung, zu dem resultirenden Paare $G^{(1)}$ tritt aber das aus der Verlegung entspringende Paar $(-R^{(1)}, R^{(1)})$ hinzu, dessen Componenten

$$\begin{aligned} -(y_1 Z^{(1)} - z_1 Y^{(1)}) &= -\omega^2 M y_1 z_1 + \omega' M x_1 z_1 - \omega\psi M\,(y_1^2 + z_1^2),\\ -(z_1 X^{(1)} - x_1 Z^{(1)}) &= \omega^2 M x_1 z_1 + \omega' M y_1 z_1 + \omega\psi M x_1 y_1,\\ -(x_1 Y^{(1)} - y_1 X^{(1)}) &= -\omega' M\,(x_1^2 + y_1^2) + \omega\psi M x_1 z_1, \end{aligned}$$

sich mit $L^{(1)}$, $M^{(1)}$, $N^{(1)}$ verbinden. Um sie leichter mit ihnen zu vereinigen, wollen wir S als Ursprung eines Coordinatensystems der x, y, z von denselben Axenrichtungen, wie das bisherige ansehen. Dann sind x, y, z durch $x_1 + x$, $y_1 + y$, $z_1 + z$ zu ersetzen und werden dadurch $A = \Sigma m (y^2 + z^2)$, $C = \Sigma m\,(x^2 + y^2)$, $D = \Sigma m y z$, $E = \Sigma m z x$, $F = \Sigma m x y$ mit Rücksicht auf $\Sigma m x = \Sigma m y = \Sigma m z = 0$ für die neuen Coordinaten übergehen in die Formen

$$A = \Sigma m\,(y^2 + z^2) + M\,(y_1^2 + z_1^2), \quad C = \Sigma m\,(x^2 + y^2) + M\,(x_1^2 + y_1^2),$$
$$D = \Sigma m y z + M y_1 z_1 \quad E = \Sigma m z x + M z_1 x_1, \quad F = \Sigma m x y + M x_1 y_1.$$

Hiermit werden die obigen Grössen $L^{(1)}$, $M^{(1)}$, $N^{(1)}$ zu

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= \omega^2 \Sigma m x z - \omega' \Sigma m z x + \omega\psi \Sigma m\,(y^2 + z^2) + \omega^2 M y_1 z_1 - \omega' M z_1 x_1\\ &\qquad + \omega\psi M\,(y_1^2 + z_1^2),\\ M^{(1)} &= -\omega^2 \Sigma m z x - \omega' \Sigma m y z - \omega\psi \Sigma m x y \quad -\omega^2 M z_1 x_1 - \omega' M y_1 z_1\\ &\qquad - \omega\psi M x_1 y_1,\\ N^{(1)} &= \omega' \Sigma m (x^2 + y^2) - \omega\psi \Sigma m z x \quad + \omega' M (x_1^2 + y_1^2)\\ &\qquad - \omega\psi M x_1 z_1 \end{aligned}$$

und sieht man, dass durch den Zutritt von $(-R^{(1)}, R^{(1)})$ die Componenten des resultirenden Paares für S dieselbe Form wie für G annehmen und die obigen Formeln für beide Fälle benutzt werden können, wenn man unter A, C, D, E, F die Werthe der Trägheits- und Deviationsradien für die betreffenden Axen der x, z und der Ebene yz, zx, xy versteht.

Die Betrachtungen dieses Paragraphen zusammenfassend erhalten wir den Satz:

Die Reduction der Kräfte, welche den allgemeinsten Fall des Beschleunigungszustandes eines unveränderlichen Systems mit bestimmtem Mittelpunkte G der Beschleunigungen hervorzurufen im Stande sind, liefert eine Resultante $R^{(1)}$ gleicher Richtung, gleichen Sinnes und proportional mit der Beschleunigung des Massenmittelpunktes und ein Paar $G^{(1)}$, welches für die Reduction in Bezug auf den Mittelpunkt G der Beschleunigungen aus drei Paaren entspringt, dem Paare der Centripetalkräfte, dem der Tangentialkräfte und dem von den Winkelbeschleunigungskräften herrührenden Paare, gebildet in Bezug auf die durch G parallel zur Momentanaxe und zur Winkelbeschleunigungsaxe h gelegten Axen. Die Axenmomente der beiden ersten Paare sind unter einander und zur Momentanaxe senkrecht. Für die Reduction bezüglich des Massenmittelpunktes S behält $G^{(1)}$ dasselbe Bildungsgesetz bei, und gehen die darin auftretenden Constanten A, C, D, E, F (Trägheitsmomente und Deviationsmomente) in die entsprechenden Grössen für S über.

Fallen die Punkte G und S zusammen, so werden x_1, y_1, z_1 und damit $X^{(1)}$, $Y^{(1)}$, $Z^{(1)}$ und also auch $R^{(1)} = 0$, d. h. die Kräfte eines unveränderlichen Systems, dessen Mittelpunkt der Beschleunigungen mit dem Massenmittelpunkt zusammenfällt, sind einem Paare äquivalent und umgekehrt.

Sind x_1 und y_1 Null, so werden $X^{(1)} = 0$, $Z^{(1)} = 0$ und reducirt sich $R^{(1)}$ auf $Y^{(1)} = -\omega\psi M z_1$, d. h. liegen G und S auf einer zur Momentanaxe parallelen Geraden, so ist $R^{(1)}$ senkrecht zur Ebene der Axen c und h, d. h. es hat $R^{(1)}$ die Richtung der Orthogonalgeschwindigkeit des Systems.

Die Reduction für die Centralaxe ist zwar nach B. I, S. 52 durchführbar, liefert jedoch für die Componenten des Paares $G^{(1)}$ etwas ungefügige Formeln.

§. 7. Die bisherigen Untersuchungen setzen uns in den Stand, die Wirkung eines Kräftesystems zu bestimmen, welches an einem unveränderlichen Punktsystem angreift. Dieselbe kann in doppelter Weise ausgedrückt werden. Man denke sich das System der Momentankräfte mv, welches den Geschwindigkeitszustand des Punktsystems zur Zeit t hervorzurufen vermag und reducire dasselbe für irgend einen Punkt, z. B. für den Massenmittelpunkt S auf Resultante $[R]$ und Axenmoment $[G]$. Man reducire ebenso die Momentankräfte, welche den Geschwindigkeitszustand zur Zeit $t + dt$ bestimmen, für S und wird erhalten $[R] + [dR]$ und $[G] + [dG]$, d. h. es werden sich R und G um gewisse geometrische Differentialien geändert

haben. Nun entsteht der Geschwindigkeitszustand des Systems, welcher der Zeit $t + dt$ entspricht aus dem Geschwindigkeitszustand für die Zeit t, indem der Beschleunigungszustand, entsprechend der Zeit t, hinzutritt, welcher zu den Geschwindigkeiten der Systempunkte die Elementarbeschleunigungen hinzufügt. Denken wir uns nun die Kräfte $m\varphi$, welche den Beschleunigungszustand zu geben vermögen, gleichfalls für den Punkt S auf Resultante $[R^{(1)}]$ und Axenmoment $[G^{(1)}]$ reducirt, so sind $[R^{(1)}dt]$ und $[G^{(1)}dt]$ die unendlich kleinen Kraftelemente, welche die Elementarbeschleunigungen geben und da dies auch $[dR]$ und $[dG]$ leisten, so folgt die Aequivalenz $([dR], [dG]) \equiv ([R^{(1)}dt], [G^{(1)}dt])$, welche sich sofort in die beiden geometrischen Gleichheiten $[dR] = [R^{(1)}dt]$ und $[dG] = [G^{(1)}dt]$ oder $\left[\frac{dR}{dt}\right] = [R^{(1)}]$, $\left[\frac{dG}{dt}\right] = [G^{(1)}]$ auflöst; d. h.:

Die Reductionselemente $R^{(1)}$, $G^{(1)}$, nämlich Resultante und Axenmoment der Kräfte erster Ordnung, entsprechend der Reduction für irgend einen Punkt sind die geometrischen Derivirten der Resultanten R und des Axenmomentes G der Momentankräfte bezüglich der Reduction für denselben Punkt. In gleicher Weise sind die Elementarresultante $R^{(1)}dt$ und das Elementaraxenmoment $G^{(1)}dt$ die geometrischen Differentialien von R und G.

Indem man die Reductionselemente $R^{(1)}$, $G^{(1)}$ des gegebenen Kräftesystems mit den aus dem Beschleunigungszustande in den §§. 2, 3, 4, 5, 6 entwickelten $R^{(1)}$, $G^{(1)}$ zur Aequivalenz bringt, erlangt man die nöthigen Bedingungen, welche zur Bestimmung der Elemente des Beschleunigungszustandes, insbesondere des Mittelpunktes der Beschleunigung, der Winkelbeschleunigung und deren Axe führen. Sobald diese Elemente bekannt sind, kann die unendlichkleine Aenderung des Geschwindigkeitszustandes und also der geänderte, der Zeit $t + dt$ entsprechende Geschwindigkeitszustand selbst als gefunden angesehen werden.

Indem man diese Betrachtungen von Zeitelement zu Zeitelement fortführt, sieht man deutlich, wie die Bewegung des Systems in Folge eines von der Zeit oder anderen Grundvariabelen abhängigen Kräftesystems infinitesimaliter zu Stande kommt.

§. 8. Wir wollen den Grundgedanken des §. 7 an dem einfacheren Falle eines ebenen Systems, in dessen Ebene ein Punktsystem angreift, ausführen.

Der Geschwindigkeitszustand des ebenen Systems zur Zeit t, nämlich der Mittelpunkt C der Geschwindigkeiten und die Winkelgeschwindigkeit ω um ihn seien bekannt. Reduciren wir das gegebene Kräftesystem für den Massenmittelpunkt S auf $R^{(1)}$ und $G^{(1)}$, so ist $G^{(1)}$ senkrecht zur Ebene

Systems und bestehen vermöge der Aequivalenz von $R^{(1)}$ und $G^{(1)}$ mit den aus dem Beschleunigungszustand entwickelten Werthen dieser Grössen die Gleichungen

$$M\vartheta f = R^{(1)}, \quad \omega' M \varkappa_0^2 = G^{(1)}.$$

Die zweite dieser Gleichungen gibt die Winkelbeschleunigung $\omega' = G^{(1)} : M\varkappa_0^2$, wo $\varkappa_0$ der Trägheitsradius in Bezug auf die zur Ebene senkrechte Hauptaxe von S ist. Da ω bekannt ist, so erhält man hiermit die Beschleunigung ϑ in der Einheit des Abstandes vom Mittelpunkte G der Beschleunigungen durch die Gleichung $\vartheta = (\omega^4 + \omega'^2)^{\frac{1}{2}}$ und den Winkel λ, welchen der Stral, der G und S verbindet, mit der Richtung von ϑ bildet, nämlich $\operatorname{tg} \lambda = \omega' : \omega^2$. Dieser Winkel ist niemals stumpf. Weiter ergibt sich hierzu aus der ersten Gleichung der Abstand f des Punktes G von S, nämlich $f = R^{(1)} : M\vartheta$. Man kann daher G construiren, indem man um S mit f als Radius einen Kreis beschreibt und ihn mit dem genannten Strale schneidet. Um zu entscheiden, welcher von den beiden Schnittpunkten Beschleunigungsmittelpunkt ist, suche man die Centralaxe der gegebenen Kräfte; sie schneidet den Stral in G' und nur derjenige Schnittpunkt mit dem Kreise kann G sein, welcher mit G' auf entgegengesetzten Seiten von S liegt. Auch liefert nach §. 5 ein Kreis durch C, C' und G' den Punkt G sofort, wenn man den Punkt C', in welchem die Centralaxe der Momentankräfte den Stral CS rechtwinklig trifft, bereits bestimmt hat. Indem man die Richtung der Beschleunigung des Punktes C bestimmt (durch Antragen des Winkels λ) erhält man die Richtung der Normalen an die Curve (Γ) oder (C) der Momentancentra und eine zu ihr in C und eine andere zu CG in G rechtwinklige Gerade schneiden sich im Mittelpunkte H der Winkelbeschleunigung ω'.

Bringt man die Richtungen der Centralaxen der Momentankräfte und der continuirlichen Kräfte zum Durchschnitt D und setzt dort die Resultante R der ersteren mit der Elementarkraft $R^{(1)}dt$ zusammen, so erhält man die Momentankraft $[R] + [dR]$ für die Zeit $t + dt$. Ein Perpendikel von S auf ihre Richtung liefert den neuen Punkt C', wozu sich vermöge der Gleichung $CS \cdot SC' = \varkappa_0^2$ jenseits S das neue Momentancentrum C durch den Abstand CS bestimmt u. s. f.

Reducirt sich das gegebene Kräftesystem auf ein Paar $G^{(1)}$, ist also $R^{(1)} = 0$, so wird $f = 0$, d. h. es fällt der Mittelpunkt G der Beschleunigungen mit dem Massenmittelpunkte S zusammen, d. h. ein Paar ertheilt dem System Beschleunigung um den Massenmittelpunkt. Ist das System äquivalent einer durch den Massenmittelpunkt gehenden Einzelkraft, d. h. geht die Centralaxe der Kräfte durch S, so fällt G ins Unendliche und erlangt das System eine Translationsbeschleunigung (s. §. 5).

Durch die Reductionsresultante $R^{(1)}$ am Punkte S wird dortselbst die Resultante R der Momentankräfte nach Grösse und Richtung abgeändert, indem die Elementarkraft $R^{(1)}dt$ sich mit R zusammensetzt. Ebenso wird daselbst das Axenmoment G der Momentankräfte durch Hinzutreten des Elementarmomentes $G^{(1)}dt$ abgeändert. Da aber G in allen Fällen zur Ebene des Systems senkrecht ist, sowohl zur Zeit t, wie zur Zeit $t+dt$, so ändert sich G blos der Grösse nach und ist $G^{(1)}dt$ das Differential dG im gewöhnlichen Sinne.

§. 9. Um den Beschleunigungszustand zu bestimmen, in welchen ein räumliches Punktsystem durch ein gegebenes Kräftesystem versetzt wird, reducire man das Kräftesystem für den Massenmittelpunkt S. Man erhält eine Resultante $R^{(1)}$ und ein resultirendes Paar $G^{(1)}$, deren Componenten mit den §. 6 gefundenen äquivalent sind. Zerlegt man also $R^{(1)}$ und $G^{(1)}$ nach drei zu einander rechtwinkligen Richtungen der x, y, z, von denen die z-Axe die Richtung der Momentanaxe hat, während die beiden anderen sich in S schneidenden Axen eine beliebige Lage haben können, so genügt eine Coordinatentransformation in der xy-Ebene um die sechs Gleichungen des §. 6 $X^{(1)}$, $Y^{(1)}$, $Z^{(1)}$ und $L^{(1)}$, $M^{(1)}$, $N^{(1)}$ für die Bestimmung der Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Massenmittelpunktes in Bezug auf das Beschleunigungscentrum und mithin auch die Coordinaten $-x_1$, $-y_1$, $-z_1$ des Beschleunigungscentrums in Bezug auf S, sowie der Grössen ω', ψ und der Lage der dortigen x-Axe gegen die jetzige mit Hülfe eines Winkels λ zu bestimmen. Man wird nämlich A, D, E, F durch λ und die entsprechenden Grössen für die neuen Axen ausdrücken und $L^{(1)}$, $M^{(1)}$ durch die Componenten von $G^{(1)}$ parallel diesen Axen darstellen.

Ist $R^{(1)}=0$, also $X^{(1)}=Y^{(1)}=Z^{(1)}=0$, so verschwinden x, y, z, d. h. verschwindet die Resultante der Kräftereduction, so fällt der Mittelpunkt der Beschleunigungen mit dem Massenmittelpunkte zusammen, d. h. ein Paar $G^{(1)}$ ertheilt dem System Beschleunigung um den Massenmittelpunkt.

Ist $G^{(1)}=0$, so erlangen alle Systempunkte geometrisch gleiche Beschleunigungen $R^{(1)}:M$.

Sind $R^{(1)}$, $G^{(1)}$ Null, so bleiben die Resultante R und das Axenmoment G der Momentankräfte ungeändert nach Grösse und Richtung.

§. 10. Die bisherigen Reductionen der Kräfte geben uns eine deutliche Einsicht in den Vorgang der Bewegung des Systems, liefern aber vermöge der speciellen Wahl der Coordinatenaxen, welche nicht unabhängig von dem Beschleunigungszustande gewählt sind, unsymmetrische Formeln. Um die Darstellungsweise symmetrisch zu gestalten und insbesondere die Componenten des resultirenden Paares in einer für die Rechnung zweckmässigeren Gestalt zu erhalten, wählen wir drei beliebige rechtwinklige

Coordinatenaxen des Massenmittelpunktes S, welche im System fest und mit ihm beweglich sind. Indem wir die Elementarbewegung des Systems zur Zeit t auflösen in eine Translation, welche durch die Bewegung des Massenmittelpunktes S angegeben wird und eine Rotation um die durch diesen Punkt zur Momentanaxe parallel gelegte Axe c_1 (s. B. I, S. 284) und dasselbe zur Zeit $t + dt$ gleichfalls ausführen, zerfällt der Beschleunigungszustand des Systems in eine allen Punkten gemeinsame Beschleunigung, gleich der Beschleunigung des Punktes S, die Centripetalbeschleunigung nach c_1 hingehend und die von der Winkelbeschleunigung um eine zur Axe der Winkelbeschleunigung parallele Axe h_1 des Punktes S. Die Reduction der Kräfte für S liefert, wie bisher eine Resultante $R^{(1)}$ an S gleich dem Produkt der Masse des Systems und der Beschleunigung von S, indem die von den Centripetal- und Winkelbeschleunigungskräften herrührenden Bestandtheile der Reductionsresultanten vermöge der Eigenschaften $\Sigma mx = 0$, $\Sigma my = 0$, $\Sigma mz = 0$ verschwinden. Die Componenten der centripetalen Beschleunigung des Systempunktes (xyz) sind nach B. I, S. 494

$$\omega_x (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 x,$$
$$\omega_y (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 y,$$
$$\omega_z (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 z$$

und ebenso sind die von der Winkelbeschleunigung herrührenden Componenten, wenn für α_x, α_y, α_z ihre Werthe $\frac{d\omega_x}{dt}$, $\frac{d\omega_y}{dt}$, $\frac{d\omega_z}{dt}$ eingesetzt werden

$$\frac{d\omega_y}{dt} z - \frac{d\omega_z}{dt} y, \quad \frac{d\omega_z}{dt} x - \frac{d\omega_x}{dt} z, \quad \frac{d\omega_x}{dt} y - \frac{d\omega_y}{dt} x.$$

Die Componenten der Kraft, welche dem Punkte diese Beschleunigungscomponenten ertheilt, sind daher

$$X = m \left[\omega_x (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 x + \left(\frac{d\omega_y}{dt} z - \frac{d\omega_z}{dt} y\right)\right],$$

$$Y = m \left[\omega_y (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 y + \left(\frac{d\omega_z}{dt} x - \frac{d\omega_x}{dt} z\right)\right],$$

$$Zm = \left[\omega_z (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 z + \left(\frac{d\omega_x}{dt} y - \frac{d\omega_y}{dt} x\right)\right].$$

Ihre Summen, über das System erstreckt, verschwinden; dagegen liefern sie die Paare $yZ - zY$, $zX - xZ$, $xY - yX$, welche gleichfalls durch das ganze System hindurch zu summiren sind. Bilden wir zunächst die Bestandtheile, welche von der Winkelbeschleunigung herrühren. Sie liefern in die Summe $\Sigma(yZ - zY)$ die Glieder

$$\frac{d\omega_x}{dt} \Sigma m (y^2 + z^2) - \frac{d\omega_y}{dt} \Sigma mxy - \frac{d\omega_z}{dt} \Sigma mzx,$$

welche mit Rücksicht auf die Bezeichnungsweise

$$\Sigma m\,(y^2 + z^2) + A, \quad \Sigma m\,(z^2 + x^2) = B, \quad \Sigma m\,(x^2 + y^2) = C,$$
$$\Sigma myz = D, \qquad \Sigma mzx = E, \qquad \Sigma mxy = F$$

in der Form

$$A\,\frac{d\omega_x}{dt} - F\,\frac{d\omega_y}{dt} - E\,\frac{d\omega_z}{dt}$$

geschrieben werden können. Ebenso enthalten die Summen $\Sigma\,(zX - xZ)$ und $\Sigma\,(xY - yX)$ von Seiten der Winkelbeschleunigung die Bestandtheile

$$-F\,\frac{d\omega_x}{dt} + B\,\frac{d\omega_y}{dt} - D\,\frac{d\omega_z}{dt} \text{ und } -E\,\frac{d\omega_x}{dt} - D\,\frac{d\omega_y}{dt} + C\,\frac{d\omega_z}{dt}.$$

Die Vergleichung dieser Ausdrücke mit den Ausdrücken Cap. I, S. 366 zeigt aber, dass diese Grössen die Differentialquotienten der Componenten des resultirenden Paares G der Momentankräfte nach der Zeit sind, nämlich:

$$A\,\frac{d\omega_x}{dt} - F\,\frac{d\omega_y}{dt} - E\,\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{dG_x}{dt},$$
$$-F\,\frac{d\omega_x}{dt} + B\,\frac{d\omega_y}{dt} - D\,\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{dG_y}{dt},$$
$$-E\,\frac{d\omega_x}{dt} - D\,\frac{d\omega_y}{dt} + C\,\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{dG_z}{dt}.$$

Für die Bestandtheile, welche die Centripetalkräfte in jene Summen liefern, erhalten wir, wenn wir resp. $m\omega_y \cdot x^2$, $m\omega_z \cdot y^2$, $m\omega_x \cdot z^2$ im Minuend und Subtrahend addiren und subtrahiren, z. B. für die erste Summe:

$$\omega_y\,[-\omega_x \cdot \Sigma mzx - \omega_y \Sigma myz + \omega_z \Sigma m\,(x^2 + y^2)],$$
$$-\omega_z\,[-\omega_x \cdot \Sigma mxy + \omega_y \Sigma m\,(z^2 + x^2) - \omega_z \Sigma myz],$$
$$= \omega_y\,[-E\omega_x - D\omega_y + C\omega_z],$$
$$-\omega_z\,[-F\omega_x + B\omega_y + D\omega_z\,] = \omega_y G_z - \omega_z G_y.$$

Ebenso für die beiden anderen Summen $\omega_z G_x - \omega_x G_z$, $\omega_x G_y - \omega_y G_x$. Fügen wir alle Theile zusammen, so ergeben sich die Componenten $G_x^{(1)}$, $G_y^{(1)}$, $G_z^{(1)}$ des resultirenden Paares $G^{(1)}$ für den Massenmittelpunkt

$$G_x^{(1)} = \frac{dG_x}{dt} + \begin{vmatrix} \omega_y & \omega_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix},$$
$$G_y^{(1)} = \frac{dG_y}{dt} + \begin{vmatrix} \omega_z & \omega_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix},$$
$$G_z^{(1)} = \frac{dG_z}{dt} + \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}.$$

Wählt man die Hauptaxen des Massenmittelpunktes zu Coordinatenaxen, so werden die Componenten des Paares G der Momentankräfte $G_x = A\omega_x$, $G_y = B\omega_y$, $G_z = C\omega_z$ (Cap. I, §. 9), oder, indem wir nach

der üblichen Bezeichnungsweise $\omega_x = p$, $\omega_y = q$, $\omega_z = r$ setzen, $G_x = Ap$, $G_y = Bq$, $G_z = Cr$ und nehmen die Componenten des resultirenden Paares der continuirlichen Kräfte die Form an:

$$G_x^{(1)} = A\frac{dp}{dt} + qr\,(C - B),$$

$$G_y^{(1)} = B\frac{dq}{dt} + rp\,(A - C),$$

$$G_z^{(1)} = C\frac{dr}{dt} + pq\,(B - A),$$

welche Form zuerst von Euler gegeben wurde.

Es ist von Wichtigkeit, den Inhalt und die Bildungsweise der Ausdrücke für $G_x^{(1)}$, $G_y^{(1)}$, $G_z^{(1)}$ genau zu kennen. Die Bedeutung der drei ersten Glieder $\frac{dG_x}{dt}$, $\frac{dG_y}{dt}$, $\frac{dG_z}{dt}$, welche von der Winkelbeschleunigung herrühren, ist sehr einfach. Construirt man im Reductionspunkt das resultirende Axenmoment G der Momentankräfte, so sind G_x, G_y, G_z die Coordinaten vom Endpunkte der Strecke, welche dies Moment in Bezug auf die beweglichen Axen darstellt. Dasselbe ändert aber mit t seine Grösse und Lage im System und es stellen die drei Differentialquotienten die relativen Geschwindigkeitscomponenten des Endpunktes dieser Strecke dar. Nicht viel complicirter ist die Bedeutung der drei Glieder $\omega_y G_z - \omega_z G_y$, $\omega_z G_x - \omega_x G_z$, $\omega_x G_y - \omega_y G_x$. Zieht man nämlich durch den Endpunkt von G eine Gerade parallel der Momentanaxe und trägt eine Strecke geometrisch gleich ω auf ihr und die entgegengesetzte, $-\omega$, an S auf, so erhält man ein Paar $(\omega, -\omega)$, dessen Moment eine Translationsgeschwindigkeit darstellt, nach derjenigen Seite der Ebene des Paares gerichtet, von welcher aus gesehen die Stellung der Pfeilspitzen mit der Uhrzeigerbewegung harmonirt. Das Moment desselben ist das Produkt ωK aus ω und der Projection K des Axenmomentes G auf eine zur Momentanaxe senkrechte Ebene. Da K gleich dem Abstande des Endpunktes von G von der Momentanaxe c_1 des Reductionspunktes ist, so ist ωK zugleich die Geschwindigkeit, welche der mit dem Endpunkte von G zusammenfallende Systempunkt der Winkelgeschwindigkeit ω um c_1 verdankt. Mit Hülfe der Componenten ω_x, ω_y, ω_z von ω und der Coordinaten G_x, G_y, G_z des Endpunktes von G erhält man die Componenten dieser Geschwindigkeit oder des Axenmomentes ωK in Bezug auf die beweglichen Axen nach B. I, S. 273, nämlich

$$\begin{vmatrix} \omega_y & \omega_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \omega_z & \omega_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}.$$

Sie stellen die zweiten Glieder in den obigen Ausdrücken für $G_x^{(1)}$, $G_y^{(1)}$, $G_z^{(1)}$ dar. Demnach drücken die obigen Gleichungen Folgendes aus:

Das resultirende Paar der continuirlichen Kräfte, entsprechend der Kräftereduction für den Massenmittelpunkt, stellt die Geschwindigkeit des Endpunktes vom resultirenden Axenmomente der Momentankräfte dar, wenn dasselbe im Reductionspunkte construirt wird und zwar stellt die Componente, welche von der Winkelbeschleunigung veranlasst wird, die relative Geschwindigkeit dieses Punktes im System, die Componente aber, welche von den Centripetalkräften herrührt, die Geschwindigkeit des mit diesem Punkte zusammenfallenden Systempunktes dar.

Auch kann man, wenn man will, bei der Bildung der drei obigen Gleichungen von dem eben verfolgten Gesichtspunkte ausgehen, gleich einfach für die allgemeine, als für die Euler'sche Form. Da nämlich $G^{(1)}dt$ das geometrische Differential von G ist, so ist $G^{(1)}$ die absolute Geschwindigkeit des Endpunktes des Axenmomentes G. Die relativen Coordinaten desselben sind nun für die Hauptaxen z. B. Ap, Bq, Cr, mithin $A\frac{dp}{dt}$, $B\frac{dq}{dt}$, $C\frac{dr}{dt}$ die Componenten seiner relativen Geschwindigkeit. Das System besitzt aber die Winkelgeschwindigkeit ω um die Momentanaxe und p, q, r sind deren Componenten. Sie ertheilen mithin dem Systempunkte, der mit jenem Endpunkte zusammenfällt, die Geschwindigkeitscomponenten

$$\begin{vmatrix} q & r \\ Bq & Cr \end{vmatrix} = qr\,(C-B),$$

$$\begin{vmatrix} r & p \\ Cr & Ap \end{vmatrix} = rp\,(A-C),$$

$$\begin{vmatrix} p & q \\ Ap & Bq \end{vmatrix} = pq\,(B-A).$$

Demnach sind

$$A\frac{dp}{dt} + qr\,(C-B),\quad B\frac{dq}{dt} + rp\,(A-C),\quad C\frac{dr}{dt} + pq\,(B-A)$$

die Componenten $G_x^{(1)}$, $G_y^{(1)}$, $G_z^{(1)}$ der absoluten Geschwindigkeit.

Saint-Guilhem, dessen Abhandlungen [*Nouvelle étude sur la théorie des forces* in Liouville, Journ. de Mathém. T. XVI (1851), p. 347 und *Nouvelle détermination synthétique du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe*, Liouville, Journ. T. XIX (1854), p. 356] diese Betrachtungen zu Grunde liegen, gibt noch folgende Methode an, um zu demselben Resultate zu gelangen. Man denke sich durch den Reductionspunkt drei Coordinatenaxen der x', y', z' von fester Richtung. Durch die Rotation des Systems um die Momentanaxe erlangt nun dasselbe gegen diese Axen zur Zeit $t + dt$ dieselbe Lage, die es gegen sie einnehmen würde, wenn es nicht rotirte, dagegen jene Axen sich um die Momentan-

axe in entgegengesetztem Sinne um denselben unendlich kleinen Winkel gedreht hätten. Nimmt man nun auf einer dieser drei Axen, z. B. auf der Axe der x', einen Punkt m an und bezeichnet mit ξ, η, ζ seine Coordinaten bezüglich der Axen der x, y, z, so sind $-(\omega_y\zeta - \omega_z\eta)$, $-(\omega_z\xi - \omega_x\zeta)$, $-(\omega_x\eta - \omega_y\xi)$ seine Geschwindigkeitscomponenten und da dieselben auch durch $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ dargestellt werden, so bestehen die Gleichungen:

$$\frac{d\xi}{dt} = \omega_z\eta - \omega_y\zeta, \quad \frac{d\eta}{dt} = \omega_x\zeta - \omega_z\xi, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \omega_y\xi - \omega_x\eta.$$

Nun seien a, a', a'' die Richtungscosinusse der Axe der x' mit den Axen der x, y, z und $G_{x'}$, $G_{y'}$, $G_{z'}$ die Componenten von G bezüglich der Axen der x', y', z', sodass z. B.

$$G_{x'} = aG_x + a'G_y + a''G_z$$

und folglich

$$\frac{dG_{x'}}{dt} = a\frac{dG_x}{dt} + a'\frac{dG_y}{dt} + a''\frac{dG_z}{dt} + G_x\frac{da}{dt} + G_y\frac{da'}{dt} + G_z\frac{da''}{dt}$$

wird. Nimmt man nun m in der Entfernung gleich der Einheit vom Reductionspunkte an, so werden $\xi = a$, $\eta = a'$, $\zeta = a''$, also nach den obigen Formeln:

$$\frac{da}{dt} = \omega_z a' - \omega_y a'', \quad \frac{da'}{dt} = \omega_x a'' - \omega_z a, \quad \frac{da''}{dt} = \omega_y a - \omega_x a'.$$

Da man aber über die Wahl der Axen x', y', z' beliebig verfügen kann, so lassen wir die Axe der x' mit der Axe der x zusammenfallen, wodurch $a = 1$, $a' = a'' = 0$ und folglich $\frac{da}{dt} = 0$, $\frac{da'}{dt} = -\omega_z$, $\frac{da''}{dt} = \omega_y$ wird. Hiermit erhält man

$$\frac{dG_{x'}}{dt} = \frac{dG_x}{dt} + \omega_y G_z - \omega_z G_y.$$

Es ist aber $\frac{dG_{x'}}{dt}$ die Geschwindigkeitscomponente des Punktes $G_{x'}$, $G_{y'}$, $G_{z'}$ parallel den festen Axen, d. h. die absolute Geschwindigkeitscomponente des Punktes, welcher im System die Coordinaten G_x, G_y, G_z besitzt, d. h. des Endpunktes von G und diese ist zugleich $G_x^{(1)}$. Daher folgt

$$G_x^{(1)} = \frac{dG_x}{dt} + \omega_y G_z - \omega_z G_y.$$

Aehnlich für die anderen Componenten.

§. 11. Die Reduction der Kräfte, wie wir sie §. 10 aufgestellt haben, gibt unmittelbar die sogenannten Differentialgleichungen der Bewegung des unveränderlichen Systems. Sind in Bezug auf ein festes Coordinatensystem der x, y, z die Coordinaten des Massenmittelpunktes S zur Zeit t gleich x_1, y_1, z_1, so sind $\frac{d^2x_1}{dt^2}$, $\frac{d^2y_1}{dt^2}$, $\frac{d^2z_1}{dt^2}$ die Componenten seiner Beschleunigung. Sind daher ΣX, ΣY, ΣZ die Componenten der Reductionsresultanten $R^{(1)}$ der gegebenen Kräfte für S, so bestehen die Gleichungen:

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma X, \quad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma Y, \quad M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma Z.$$

Hierzu treten die Euler'schen Gleichungen

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)\, qr = G_x^{(1)},$$

$$A \frac{dq}{dt} + (A - C)\, rp = G_y^{(1)},$$

$$A \frac{dr}{dt} + (B - A)\, pq = G_z^{(1)},$$

welche sich auf die Hauptaxen des Massenmittelpunktes beziehen. Diese sechs Gleichungen stellen die Aequivalenz des gegebenen Kräftesystems mit dem aus dem Beschleunigungszustande entwickelten System der Kräfte $m\varphi$ dar. Sie können daher in gewissem Sinne auch als eine Darstellung des Beschleunigungszustandes angesehen werden. Ist das Kräftesystem für alle Zeiten gegeben, so gelangt man durch ihre Integration zur Kenntniss des Geschwindigkeitszustandes und des Ortes des Systems für jede Zeit, sobald noch die Lage der beweglichen Hauptaxen mit Hülfe der Winkel φ, ψ, ϑ (s. B. I, S. 278) gegen das feste oder auch gegen ein in Translation begriffenes Coordinatensystem der x, y, z bestimmt wird. Zugleich sind dann die Componenten p, q, r der Winkelgeschwindigkeit ω durch die B. I, S. 279 angegebenen Formeln auszudrücken:

$$p = \frac{d\vartheta}{dt} \cos\varphi + \frac{d\psi}{dt} \sin\varphi \sin\vartheta,$$

$$q = -\frac{d\vartheta}{dt} \sin\varphi + \frac{d\psi}{dt} \cos\varphi \sin\vartheta,$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \cos\vartheta.$$

Endlich sind $G_x^{(1)}$, $G_y^{(1)}$, $G_z^{(1)}$ gleichfalls durch φ, ψ, ϑ darzustellen. Sobald dies geschehen, liefern die Euler'schen Gleichungen in Verbindung mit den Ausdrücken für p, q, r durch eine zweimalige Integration φ, ψ, ϑ und p, q, r als Functionen der Zeit und ebenso geben die drei ersten Gleichungen die Coordinaten x, y, z und die Componenten der Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes. Die zwölf Constanten, welche die Integration der sechs Bewegungsgleichungen einführt, sind durch die Werthe von $\varphi, \psi, \vartheta;\ x_1, y_1, z_1;\ \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\vartheta}{dt};\ \frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}$ für irgend eine Zeit t_0, d. h. durch die Stellung des Systems und die Componenten seiner Translations- und seiner Winkelgeschwindigkeit zu dieser Zeit zu bestimmen.

§. 12. Um auf rein analytischem Wege zu den Bewegungsgleichungen zu gelangen, verfahren wir folgendermassen:

Da die Componenten der Beschleunigung φ_i des Punktes m_i (x_i, y_i, z_i) parallel dreien rechtwinkligen Coordinatenaxen, die wir im Raume fest annehmen

wollen, die Werthe $\frac{d^2x_i}{dt^2}$, $\frac{d^2y_i}{dt^2}$, $\frac{d^2z_i}{dt^2}$ sind, so stellen $m\frac{d^2x_i}{dt^2}$, $m\frac{d^2y_i}{dt^2}$, $m\frac{d^2z_i}{dt^2}$ die Componenten der Kraft $m\varphi_i$ dar und liefern, indem wir sie für den Coordinatenursprung reduciren, eine Resultante von den Componenten $\Sigma m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}$, $\Sigma m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}$, $\Sigma m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}$ und ein resultirendes Paar von den Componenten

$$\Sigma m_i\left(y_i\frac{d^2z_i}{dt^2}-z_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right),\quad \Sigma m_i\left(z_i\frac{d^2x_i}{dt^2}-x_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right),\quad \Sigma m_i\left(x_i\frac{d^2y_i}{dt^2}-y_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right),$$

wobei die Summationen über alle Punkte des Systems zu erstrecken sind. Sind andererseits X_i, Y_i, Z_i die Componenten der gegebenen, am Punkte $(x_i y_i z_i)$ angreifenden Kraft P_i, so liefert die Reduction dieser Kräfte, die sich an irgend welchen Punkten auch auf Null reduciren können, ebenso eine Resultante von den Componenten ΣX_i, ΣY_i, ΣZ_i und ein resultirendes Paar, dessen Componenten

$$\Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i),\quad \Sigma(z_i X_i - x_i Z_i),\quad \Sigma(x_i Y_i - y_i X_i)$$

sind. Die Aequivalenz beiderlei Kräfte, oder, was dasselbe ist, das Gleichgewicht, welches zwischen den ersteren und den im entgegengesetzten Sinne genommenen Kräften der zweiten Art bestehen muss, ergibt daher die folgenden sechs Bewegungsgleichungen:

$$\Sigma m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\Sigma X_i,\qquad \Sigma m_i\left(y_i\frac{d^2z_i}{dt^2}-z_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right)=\Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i),$$

$$\Sigma m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\Sigma Y_i,\qquad \Sigma m_i\left(z_i\frac{d^2x_i}{dt^2}-x_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)=\Sigma(z_i X_i - x_i Z_i),$$

$$\Sigma m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\Sigma Z_i,\qquad \Sigma m_i\left(x_i\frac{d^2y^2}{dt^2}-y_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)=\Sigma(x_i Y_i - y_i X_i).$$

In dieser Form sind die Bewegungsgleichungen zur Lösung eines Problems nicht unmittelbar zu verwenden, denn sie enthalten die Coordinaten aller Systempunkte, während die Kenntniss der Bewegung dreier Systempunkte hinreicht, um die aller übrigen zu bestimmen. Sie müssen demnach so transformirt werden, dass blos Bestimmungsstücke der Bewegung dreier Punkte darin vorkommen. Als solche Bestimmungselemente können die Coordinaten solcher drei Punkte gelten. Deren sind neun. Da aber die drei Punkte unveränderliche Abstände behalten, welches durch drei Bedingungsgleichungen ausgedrückt wird, so bleiben blos sechs jener Coordinaten als erforderlich übrig und zu ihrer Bestimmung reichen die sechs Bewegungsgleichungen hin. Die drei Punkte sind beliebig wählbar. Vermöge seiner ausgezeichneten Eigenschaften empfiehlt sich für den einen vor allen der Massenmittelpunkt S. In der That lassen sich mit Hülfe derselben die drei ersten Gleichungen sofort so umschreiben, dass in ihnen seine Coordinaten x_1, y_1, z_1 allein vorkommen. Setzen wir nämlich $x_i = x_1 + \xi_i$, $y_i = y_1 + \eta_i$, $z_i = z_1 + \zeta_i$, sodass ξ_i, η_i, ζ_i die Coordinaten des Systempunktes x_i, y_i, z_i in Bezug auf ein dem festen Coordinatensystem paralleles bewegliches Coordinatensystem sind, dessen Ursprung im Massenmittelpunkte (x_1, y_1, z_1) liegt, so wird

$$\Sigma m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\Sigma m_i\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{d^2}{dt^2}\Sigma m_i\xi_i = M\frac{d^2x_1}{dt^2},$$

$$\Sigma m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=M\frac{d^2y_1}{dt^2},\qquad \Sigma m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=M\frac{d^2z_1}{dt^2},$$

da $\Sigma m_i \xi_i = \Sigma m_i \eta_i = \Sigma m_i \zeta_i = 0$ ist. Man erhält demnach an die Stelle der drei ersten Bewegungsgleichungen die folgenden:

$$M \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \Sigma X_i, \quad M \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \Sigma Y_i, \quad M \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \Sigma Z_i,$$

welche die Beschleunigungscomponenten des Massenmittelpunktes gleich $\Sigma X_i : M$, $\Sigma Y_i : M$, $\Sigma Z_i : M$ geben und durch ihre Integration die Bewegung dieses Punktes bestimmen. Diese Gleichungen sind die eines Punktes von der Masse M, an welchem die Kräfte ΣX_i, ΣY_i, ΣZ_i angreifen. Man drückt dies gewöhnlich so aus:

Der Massenmittelpunkt des Systems bewegt sich so, als ob alle Kräfte des gegebenen Kräftesystems mit denselben Intensitäten und nach denselben Richtungen an ihm angriffen.

Legen wir durch den Massenmittelpunkt S zwei zu einander senkrechte Axen, welche dem beweglichen Systeme angehören und wählen wir auf diesen in der Einheit der Entfernung von S jene beiden noch übrigen Punkte. Sind a, b, c; a', b', c' die Richtungscosinusse dieser beiden Axen gegen die Axen der ξ, η, ζ oder der x, y, z, so stellen diese Grössen zugleich die Coordinaten ξ, η, ζ der beiden Punkte dar. Grösserer Symmetrie der Formeln wegen nimmt man noch die dritte, zu jenen senkrechte Axe hinzu und bezeichnet ihre Richtungscosinusse mit a'', b'', c''. Zur Wahl dieser drei, dem System angehörigen Axen empfehlen sich ihrer ausgezeichneten Eigenschaften hinsichtlich der Kräftereduction wegen die Hauptaxen des Massenmittelpunktes, deren wir uns daher im Folgenden fortwährend bedienen werden.

Führen wir zunächst die Substitution $x_i = x_1 + \xi_i$, $y_i = y_1 + \eta_i$, $z_i = z_1 + \zeta_i$ in den drei letzten Gleichungen aus, so wird z. B. die linke Seite der ersten von ihnen:

$$\Sigma m_i \left(y_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}\right) = \Sigma m_i \left(\eta_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} - \zeta_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2}\right) + M \left(y_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} - z_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}\right)$$

und die rechte Seite:

$$\Sigma (y_i Z_i - z_i Y_i) = \Sigma (\eta_i Z_i - \zeta_i Y_i) + y_1 \Sigma Z_i - z_1 \Sigma Y_i.$$

Wenn man aber die bereits transformirten drei ersten Gleichungen benutzt und die Rechnung vollständig durchführt, so fallen x_1, y_1, z_1 heraus und nehmen die drei letzten Bewegungsgleichungen die Form an:

$$\Sigma m_i \left(\eta_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} - \zeta_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2}\right) = \Sigma (\eta_i Z_i - \zeta_i Y_i),$$

$$\Sigma m_i \left(\zeta_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} - \xi_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2}\right) = \Sigma (\zeta_i X_i - \xi_i Z_i),$$

$$\Sigma m_i \left(\xi_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} - \eta_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2}\right) = \Sigma (\xi_i Y_i - \eta_i X_i).$$

Um nun die Grössen a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' in diese Gleichungen einzuführen, nehmen wir die Hauptaxen des Massenmittelpunktes als Coordinatenaxen der x', y', z', sodass die Coordinaten ξ_i, η_i, ζ_i durch x'_i, y'_i, z'_i mit Hülfe der Formeln ausgedrückt werden:

$$\xi_i = a x'_i + a' y'_i + a'' z'_i,$$

$$\eta_i = b x'_i + b' y'_i + b'' z'_i,$$

$$\zeta_i = c x'_i + c' y'_i + c'' z'_i,$$

worin x'_i, y'_i, z'_i die Lage des Punktes im System gegen die Hauptaxen festsetzen und von der Zeit unabhängig sind. Die linken Seiten der zu transformirenden Gleichungen sind nun die Derivirten der Componenten des resultirenden Paares der Momentankräfte, nämlich von

$$\Sigma m_i \left(\eta_i \frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i \frac{d\eta_i}{dt}\right), \quad \Sigma m_i \left(\zeta_i \frac{d\xi_i}{dt} - \xi_i \frac{d\zeta_i}{dt}\right), \quad \Sigma m_i \left(\xi_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_i}{dt}\right),$$

sodass zunächst diese Ausdrücke umzugestalten sind. Nun liefert die Differentiation der vorstehenden Formeln:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = x'_i \frac{da}{dt} + y'_i \frac{da'}{dt} + z'_i \frac{da''}{dt},$$

$$\frac{d\eta_i}{dt} = x'_i \frac{db}{dt} + y'_i \frac{db'}{dt} + z'_i \frac{db''}{dt},$$

$$\frac{d\zeta_i}{dt} = x'_i \frac{dc}{dt} + y'_i \frac{dc'}{dt} + z'_i \frac{dc''}{dt},$$

worin aber die Differentialquotienten der Richtungscosinusse durch die Componenten p, q, r der Winkelgeschwindigkeit nach den Hauptaxen auszudrücken sind mit Hülfe der Formeln (B. I, S. 278)

$$\frac{da}{dt} = a'r - a''q, \quad \frac{da'}{dt} = a''p - ar, \quad \frac{da''}{dt} = aq - a'p,$$

$$\frac{db}{dt} = b'r - b''q, \quad \frac{db'}{dt} = b''p - br, \quad \frac{db''}{dt} = bq - b'p,$$

$$\frac{dc}{dt} = c'r - c''q, \quad \frac{dc'}{dt} = c''p - cr, \quad \frac{dc''}{dt} = cq - c'p.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Derivirten von ξ_i, η_i, ζ_i, bildet hierauf die Grössen $\Sigma m_i \left(\eta_i \frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i \frac{d\eta_i}{dt}\right)$ u. s. w. und berücksichtigt die Eigenschaften $\Sigma m_i x'_i y'_i = 0$, $\Sigma m_i y'_i z'_i = 0$, $\Sigma m_i z'_i x'_i = 0$ der Hauptaxen, so kommt z. B.

$$\begin{aligned}\Sigma m_i \left(\eta_i \frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i \frac{d\eta_i}{dt}\right) = &[(bc' - b'c)\, r - (bc'' - b''c)\, q]\, \Sigma m_i x_i'^2, \\ &+ [(b'c'' - b''c')\, p - (b'c - bc')\, r]\, \Sigma m_i y_i'^2, \\ &+ [(b''c - bc'')\, q - (b''c' - b'c'')\, p]\, \Sigma m_i z_i'^2,\end{aligned}$$

welcher Ausdruck aber mit Hülfe der Relationen (B. I, S. 271)

$$b'c'' - b''c' = a, \quad c'a'' - c''a' = b, \quad a'b'' - a''b' = c,$$

$$b''c - bc'' = a', \quad c''a - ca'' - b', \quad a''b - ab'' = c',$$

$$bc' - b'c = a'', \quad ca' - c'a = b'', \quad ab' - a'b = c''$$

übergeht in

$$\begin{aligned}\Sigma m_i \left(\eta_i \frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i \frac{d\eta_i}{dt}\right) = &(a'q + a''r)\, \Sigma m_i x_i'^2 + (a''r + ap)\, \Sigma m_i y_i'^2 \\ &+ (ap + a'q)\, \Sigma m_i z_i'^2,\end{aligned}$$

oder mit Hülfe der üblichen Bezeichnung der Hauptträgheitsmomente

$$\Sigma m_i (y_i'^2 + z_i'^2) = A, \quad \Sigma m_i (z_i'^2 + x_i'^2) = B, \quad \Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2) = C,$$

und den daraus folgenden Relationen:

$$2\Sigma m_i x_i'^2 = B + C - A, \quad 2\Sigma m_i y_i'^2 = C + A - B, \quad 2\Sigma m_i z_i'^2 = A + B - C$$

nebst den beiden analogen Ausdrücken die Form annimmt:

$$\Sigma m_i \left(\eta_i \frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i \frac{d\eta_i}{dt} \right) = Ap\,a + Bq\,a' + Cr\,a'',$$

$$\Sigma m_i \left(\zeta_i \frac{d\xi_i}{dt} - \xi_i \frac{d\zeta_i}{dt} \right) = Ap\,b + Bq\,b' + Cr\,b'',$$

$$\Sigma m_i \left(\xi_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_i}{dt} \right) = Ap\,c + Bq\,c' + Cr\,c''.$$

Man erkennt in den rechten Seiten dieser Gleichungen die Projectionen der Componenten Ap, Bq, Cr des resultirenden Paares G der Momentankräfte auf die Axen der x', y', z. Mit Hülfe der Derivirten dieser Ausdrücke erhalten wir daher für die drei letzten Bewegungsgleichungen zunächst:

$$\frac{d}{dt}(Ap\,a + Bq\,a' + Cr\,a'') = \Sigma(\eta_i Z_i - \zeta_i Y_i),$$

$$\frac{d}{dt}(Ap\,b + Bq\,b' + Cr\,b'') = \Sigma(\zeta_i X_i - \xi_i Z_i),$$

$$\frac{d}{dt}(Ap\,c + Bq\,c' + Cr\,c'') = \Sigma(\xi_i Y_i - \eta_i X_i).$$

Vollzieht man die Differentiationen und combinirt die sich so ergebenden Gleichungen, indem man sie der Reihe nach mit a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' multiplicirt und addirt, dabei aber die Relationen $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $aa' + bb' + cc' = 0, \ldots$

$$a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} + c\frac{dc'}{dt} = -r, \quad a\frac{da''}{dt} + b\frac{db''}{dt} + c\frac{dc''}{dt} = q, \ldots$$

(B. I, S. 273) berücksichtigt, so erhält man mit Rücksicht darauf, dass die entstehenden rechten Seiten der neuen Gleichungsformen die Componenten des resultirenden Paares der continuirlichen Kräfte bezüglich der Hauptaxen sind, die wir früher $G_x^{(1)}$, $G_y^{(1)}$, $G_z^{(1)}$ nannten:

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = G_x^{(1)},$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = G_y^{(1)},$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = G_z^{(1)}.$$

Dies sind aber die Euler'schen Gleichungen, wie S. 403.

§. 13. An die Reduction der continuirlichen Kräfte schliessen wir einige Sätze an über den Zusammenhang dieser Kräfte mit den Momentankräften.

1. Das System der Kräfte $m\varphi$, welche den Systempunkten M ihre Beschleunigungen φ zu verleihen vermögen, ist äquivalent dem System der Kräfte P, welche am Punktsystem angreifen. Reduciren wir daher beide Kräftesysteme für denselben Punkt O, so stimmen die Reductionsresultanten und die resultirenden Axenmomente nach Grösse, Richtung und Sinn überein und haben mithin auch gleiche Componenten oder Projectionen in Bezug auf irgend welche Axen. Projiciren wir zunächst die Reductionsresultanten auf irgend eine Axe x, so erhalten wir, da ihre Projectionen

die Projectionssummen ihrer Componenten sind, die Gleichung $\Sigma m\varphi_x = \Sigma P_x$, wo der Index x die Projection bezeichnet. Es ist aber $\varphi_x = \frac{dv_x}{dt}$, mithin erhält man weiter:

$$d \cdot \Sigma(mv_x) = \Sigma P_x dt$$

und indem man diese Gleichung über ein beliebiges Zeitintervall $t - t_0$ integrirt:

$$\Sigma mv_x - \Sigma(mv_x)_0 = \Sigma \int_{t_0}^{t} P_x dt.$$

Es stellt hierin aber Σmv_x die Projection der Reductionsresultanten der Momentankräfte auf die Axe x zur Zeit t und $\Sigma(mv_x)_0$ dieselbe Grösse für die Zeit t_0 dar und ist $P_x dt$ der Elementarantrieb der Projection der Kraft P (vgl. S. 12). Daher:

Die Aenderung, welche die Projection der Resultanten der Momentankräfte auf irgend eine Axe im Laufe der Bewegung während irgend eines Zeitintervalles erleidet, ist gleich dem Totalantrieb aller auf diese Axe projicirten Kräfte während derselben Zeit.

Man kann das System selbst auf die Axe projicirt denken, jedem Projectionspunkte die Masse des Hauptpunktes beilegen und den Satz als einen Satz für das lineäre veränderliche System, welches die Projection des gegebenen ist, auffassen. Die Gleichung $d \cdot \Sigma mv_x = \Sigma P_x dt$ sagt im Grunde nichts weiter aus, als dass $[dR_x] = [R_x^{(1)} dt]$, wenn $R, R^{(1)}$ die Resultanten der Momentankräfte und der continuirlichen Kräfte sind.

Ist $\Sigma P_x = 0$, so bleibt Σmv_x constant, d. h.:

Wird das System nicht von continuirlichen Kräften oder nur von Paaren afficirt, so bleibt während der Bewegung desselben die Projection der Resultanten aller Momentankräfte auf eine beliebige Axe und mithin diese Resultante selbst constant nach Grösse und Richtung.

2. Projiciren wir das resultirende Axenmoment der Kräfte $m\varphi$ und das der Kräfte P auf die Axe x. Wir erhalten die Projectionen dieser Grössen, indem wir $m\varphi$ und P auf eine Ebene senkrecht zu x projiciren und die Momente ihrer Projectionen für den Schnittpunkt dieser Ebene mit der Axe x nehmen. Sind φ_1, Q; ϖ, q die Projectionen von φ und P und ihre Abstände von der Axe x, so besteht demnach die Gleichung $\Sigma m\varphi_1\varpi = \Sigma Qq$. Nun ist aber nach B. I, S. 330, wenn $v_1 p_1$ das Moment der Geschwindigkeit ist, $\frac{d \cdot v_1 p_1}{dt} = \varphi_1 \varpi$. Daher erhält man:

$$d \cdot \Sigma mv_1 p_1 = \Sigma Qq dt$$

und folglich durch Integration:

$$\Sigma m v_1 p_1 - \Sigma (m v_1 p_1)_0 = \Sigma \int_{t_0}^{t} Q q \, dt.$$

Hierin stellt $m v_1 p_1$ das Axenmoment der Momentankraft $m v_1$ und folglich $\Sigma m v_1 p_1$ die Projection des resultirenden Axenmomentes der Momentankräfte auf die Axe x dar. Daher:

Die Aenderung, welche die Projection des resultirenden Axenmomentes der Momentankräfte auf irgend eine Axe im Laufe der Bewegung des Systems während irgend eines Zeitintervalles erleidet, ist gleich der Summe der Momente aller Kraftantriebe in Bezug auf dieselbe Axe während derselben Zeit.

Man kann diesen Satz als einen Satz über die Projection des Systems auf die zur Axe x senkrechte Ebene auffassen, wenn man den Projectionspunkten die Masse der Hauptpunkte beilegt. Das Projectionssystem ist während der Bewegung veränderlich. Die zu Grunde liegende Gleichung sagt nichts weiter aus, als dass $[dG_x] = [G_x^{(1)} dt]$, wenn G und $G^{(1)}$ die resultirenden Axenmomente der Momentankräfte und der continuirlichen Kräfte für den Punkt O bedeuten. Ist $\Sigma Q q = G_x^{(1)} = 0$, so bleibt $\Sigma m v_1 p_1 = G_x$ constant für alle Axen.

3. Man kann den vorigen Satz etwas anders formuliren. Zu dem Ende ziehen wir vom Reductionspunkte O aus nach allen Systempunkten M die Radienvectoren OM und betrachten die Elementarsectoren $OMM' = dS$, welche sie im Zeitelemente dt durchstreifen. Da die Projection des Bogenelementes MM' gleich $v_1 dt$ ist, so stellt $\frac{1}{2} v_1 dt \cdot p_1$ den Inhalt der Projection dS_x von dS auf die zu x senkrechte Ebene dar und ist mithin $v_1 p_1 = \frac{2 dS_x}{dt}$. Hiermit erhält man die Ausdrücke in 2. unter der Form:

$$\Sigma m \frac{d^2 S_x}{dt^2} = \tfrac{1}{2} \Sigma Q q = \tfrac{1}{2} G_x^{(1)},$$

$$\Sigma m \frac{dS_x}{dt} - \Sigma \left(m \frac{dS_x}{dt}\right)_0 = \tfrac{1}{2} \int_{t_0}^{t} G_x^{(1)} dt = \tfrac{1}{2} (G_x - G_{x_0}),$$

d. h.: Zieht man von irgend einem Punkte O nach allen Punkten des in Bewegung begriffenen Systems Radienvectoren und projicirt das System sammt ihnen auf eine Ebene, so ist die Summe der Produkte aus den Sectorenbeschleunigungen der projicirten Radienvectoren und den Massen der Systempunkte, auf welche sich letztere beziehen, gleich dem halben resultirenden Axenmomente aller Kräfte für den Punkt O als Reductionspunkt, projicirt auf die zur Ebene senkrechte Axe. Die Aenderung,

welche die Summe der Produkte aus den Massen und den Sectorengeschwindigkeiten der projicirten Radienvectoren im Laufe irgend einer Zeit erleidet, ist die halbe Aenderung der Projection des resultirenden Axenmomentes der Momentankräfte auf dieselbe Axe, über denselben Zeitraum erstreckt.

Ist insbesondere $G_x^{(1)} = 0$, so bleibt die Grösse $\Sigma m \frac{dS_x}{dt}$ constant und wird $\Sigma m S_x$ der Zeit proportional. Also:

Ist die Projection des resultirenden Axenmomentes für einen Reductionspunkt O auf eine Axe während der Bewegung Null, so ist die Summe der Produkte aus den Massen der Systempunkte und den Sectoren, welche die Projectionen der von O nach ihnen gezogenen Radienvectoren auf eine zur Axe senkrechte Ebene während irgend einer Zeit beschreiben, dieser Zeit proportional. (Princip der Flächen für die zur Axe senkrechte Ebene.)

4. Ist $G^{(1)} = 0$, also $G_x^{(1)}$ für jede Axe Null, d. h. reduciren sich die Kräfte des Systems auf eine blose Resultante $R^{(1)}$, so gilt der vorstehende Satz für alle Ebenen. Ist aber $G^{(1)} = 0$, so bleibt das resultirende Paar G der Momentankräfte nach Grösse, Richtung und Sinn unveränderlich und gilt dasselbe für seine Projection G_x auf irgend eine Axe. Da nun $\Sigma m \frac{dS_x}{dt} = \frac{1}{2} \Sigma m v_1 p_1 = \frac{1}{2} G_x$, also in diesem Falle $\Sigma m S_x - \Sigma (m S_{x_0}) = \Sigma m (S_x - S_{x_0}) = \frac{1}{2} G_x (t - t_0)$, so wird die Summe der mit den Massen multiplicirten Sectoren mit G_x gleichzeitig ein Maximum. Der grösste Werth, den G_x annehmen kann, ist aber G selbst. Daher:

Wenn die Kräfte des Systems sich auf eine blose Resultante $R^{(1)}$ reduciren, so gilt das Princip der Flächen für alle Ebenen des Raumes. Für die zur Axe des resultirenden Paares der Momentankräfte senkrechte Ebene ist die Summe der mit den Massen multiplicirten Sectoren ein Maximum. Diese Ebene, welche sich während der Bewegung des Systems fortwährend parallel bleibt, heisst die invariabele Ebene des Systems.

5. Die Gleichung $\Sigma m \varphi_x = \Sigma P_x$ in Nr. 1 wollen wir durch $\varphi_x = \frac{d v_x}{dt}$ und $v_x = \frac{dx}{dt}$, wenn dx die Projection des Bogenelementes auf die Axe x ist, welches der Systempunkt M im Zeitelemente beschreibt, umgestalten. Es wird $\varphi_x = \frac{v_x d v_x}{dx}$, mithin $\Sigma m \varphi_x = \frac{d \cdot \Sigma \frac{1}{2} m v_x^2}{dx}$ und weiter also:

$$d \cdot \Sigma \tfrac{1}{2} m v_x^2 = \Sigma P_x \cdot dx.$$

Wenden wir das Projiciren noch auf zwei andere Axen der y, z in gleicher Weise an, so kommt:

$$d \cdot \Sigma \tfrac{1}{2} m v y^2 = \Sigma P_y dy, \quad d \cdot \Sigma \tfrac{1}{2} m v_z^2 = \Sigma P_z dz$$

und durch Addition aller drei Gleichungen mit Rücksicht auf $\Sigma \frac{1}{2} m v_x^2 + \Sigma \frac{1}{2} m v_y^2 + \Sigma \frac{1}{2} m v_z^2 = \frac{1}{2} \Sigma m v^2$:

$$d \cdot \tfrac{1}{2} \Sigma m v^2 = \Sigma (P_x dx + P_y dy + P_z dz).$$

Die rechte Seite stellt nun die Summe der Elementararbeiten der Kraftcomponenten P_x, P_y, P_z von P dar. Diese Grösse ist die Elementararbeit von P, welche mit Pdp bezeichnet werden möge, längs des Weges ds, den der Angriffspunkt von P im Zeitelemente beschreibt. Integriren wir die vorstehende Gleichung und bezeichnen die den Werthen v_0 entsprechenden Werthe oder Bogenabstände s mit s_0, so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2} \Sigma m v^2 - \tfrac{1}{2} \Sigma m v_0^2 = \Sigma \int_{s_0}^{s} P dp,$$

d. h. die Aenderung, welche die halbe lebendige Kraft beim Uebergange des Systems aus einer ersten in eine zweite Lage erleidet, ist gleich der Totalarbeit aller Kräfte längs der Wege ihrer Angriffspunkte. (Princip der lebendigen Kraft.)

6. In ähnlicher Weise kann man die Gleichung $\Sigma m \frac{d^2 S_x}{dt^2} = \frac{1}{2} G_x^{(1)}$ umgestalten. Setzt man nämlich, wie B. I, S. 331 die Sectorengeschwindigkeit $\frac{dS_x}{dt} = \eta_x$, die Sectorenbeschleunigung $\frac{d^2 S_x}{dt^2} = \frac{d\eta_x}{dt} = \psi_x$, so wird $\frac{d^2 S_x}{dt^2} = \frac{d\eta_x}{dt} = \frac{\eta_x d\eta_x}{dS_x} = \frac{d \cdot \frac{1}{2} \eta_x^2}{dS_x}$ und indem man noch zwei andere Axen der y, z hinzunimmt, sodass Qq durch $yP_z - zP_y$ dargestellt werden kann, so geht die obige Gleichung über in

$$d \cdot \Sigma m \eta_x^2 = \Sigma (yP_z - zP_y)\, dS_x$$

und ebenso erhält man

$$d \cdot \Sigma m \eta_y^2 = \Sigma (zP_x - xP_z)\, dS_y, \quad d \cdot \Sigma m \eta_z^2 = \Sigma (xP_y - yP_x)\, dS_z.$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen folgt dann, wegen

$$\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2 = \eta^2,$$

wo η die Sectorengeschwindigkeit des Radiusvectors OM darstellt:

$$d \cdot \Sigma m \eta^2 = \Sigma [(yP_z - zP_y)\, dS_x + (zP_x - xP_z)\, dS_y + (xP_y - yP_x)\, dS_z].$$

Es sei nun dS der Elementarsector, den der Radiusvector von O nach dem Angriffspunkte M von P im Zeitelemente beschreibt, dann ist, wenn die

Normale seiner Ebene die Richtungswinkel α, β, γ besitzt:

$$dS_x = dS \cdot \cos\alpha, \quad dS_y = dS \cdot \cos\beta, \quad dS_z = dS \cdot \cos\gamma;$$

ferner wenn das Axenmoment Γ des Paares $(P, -P)$ die Richtungswinkel a, b, c hat:

$$yP_z - zP_y = \Gamma \cdot \cos a, \quad zP_x - xP_z = \Gamma \cdot \cos b, \quad xP_y - yP_x = \Gamma \cdot \cos c.$$

Hiermit wird, wenn λ den Winkel zwischen jener Normale und Γ bezeichnet, der Inhalt der Klammer unter dem Summenzeichen rechts gleich $\Gamma dS \cdot \cos\lambda$ und folglich

$$d \cdot \Sigma m\eta^2 = \Sigma\Gamma \cos\lambda \cdot dS,$$

sowie

$$\Sigma m\eta^2 - \Sigma m\eta_0^2 = \Sigma \int_{S_0}^{S} \Gamma \cos\lambda \cdot dS.$$

Die Grösse $\Gamma \cos\lambda \cdot dS$ kann der Analogie mit der Arbeit von P wegen die Elementararbeit des Paares Γ am Sector dS genannt werden. Denkt man dS auf der Normalen, wie ein Axenmoment aufgetragen, so kann die Elementararbeit $\Gamma \cos\lambda \cdot dS$ definirt werden als das Produkt aus dem Elementarsector dS und der Projection des Axenmomentes Γ auf seine Ebene oder als das Produkt von Γ und der Projection von dS auf die Ebene dieses Paares. Die Grösse $m\eta^2$ spielt die Rolle einer „lebendigen Sectorenkraft", doch dürfte der Gebrauch dieses Ausdrucks nicht zu empfehlen sein.

§. 14. Ist das System nicht frei, sondern gewissen Bedingungen unterworfen, so wird man dieselben durch Kräfte ausdrücken und dem gegebenen Kräftesystem hinzufügen. Die Darstellung der Aequivalenz der Kräfte $m\varphi$ und der gegebenen Kräfte einschliesslich der zuzufügenden Bedingungskräfte führt zur Ermittelung der Bewegung des Systems und der Intensität und Richtung der Bedingungskräfte. Besitzt das System einen festen Punkt oder eine feste Axe, so können diese Bedingungen auch durch unendlich grosse Massen eingeführt werden, wie Cap. I, §. 16. Im Uebrigen wird man je nach der Beschaffenheit der Bedingungen die Bewegungsgleichungen transformiren. So z. B. wird man, wenn das System einen festen Punkt besitzt, diesen statt des Massenmittelpunktes zum Ursprung und seine Hauptaxen zu Axen des beweglichen Coordinatensystems wählen.

III. Capitel.

Probleme der freien Bewegung des unveränderlichen Systems.

§. 1. Ein ebenes unveränderliches System bewegt sich unter Einfluss von Kräften, deren Richtungslinien in seine Ebene fallen; zur

Zeit t_0 ist der Geschwindigkeitszustand so beschaffen, dass die Geschwindigkeiten aller Punkte ebenfalls in die Ebene des Systems hineinfallen. Man soll die Bewegung des Systems bestimmen.

Den Massenmittelpunkt S wählen wir zum Ursprung und seine Hauptaxen zu Axen des beweglichen Coordinatensystems der x', y', z' und zwar die beiden in die Ebene des Systems fallenden Hauptaxen zu Axen der x', y', sodass die Axe der z' zur Ebene senkrecht ist. Die Lage, welche S und diese Axen zur Zeit t_0 einnehmen, seien der Ursprung und die Axen des festen Coordinatensystems der x, y, z. Da die gegebenen Kräfte für S als Reductionspunkt eine zu allen Zeiten in die $x'y'$-Ebene fallende Resultante $R^{(1)}$ liefern, so kann der Massenmittelpunkt die feste xy-Ebene nicht verlassen. Von seinen Coordinaten x_1, y_1, z_1 ist daher z_1 zu allen Zeiten Null. Da ferner die Kräfte ein Axenmoment $G^{(1)}$ liefern, senkrecht zur $x'y'$-Ebene, so sind von den drei Componenten $G_x^{(1)}$, $G_y^{(1)}$, $G_z^{(1)}$ desselben die beiden ersten stets Null und ist also $G^{(1)}$ stets senkrecht zu dieser Ebene. Da endlich $G^{(1)}$ stets mit einer Hauptaxe zusammenfällt, so werden D, E, F fortwährend Null, reducirt sich das aus den Beschleunigungen dargestellte Axenmoment auf das von den Tangentialkräften herrührende Axenmoment $N_t^{(1)} = C\omega'$ (§. 6) und ist die Wechselgeschwindigkeit ψ Null. Es findet daher blos Winkelbeschleunigung $\alpha = \omega' = d\omega : dt$ um die z'-Axe statt und kann die Momentanaxe, welche zur Zeit t_0 senkrecht zur Axe der $x'y'$-Ebene ist, sich nicht neigen. Das System bewegt sich daher fortwährend in der xy-Ebene und ändert sich das Axenmoment G der Momentankräfte nur nach Grösse, jeden Augenblick um eine unendlichkleine Grösse $G^{(1)}dt = C\omega' dt$. Für die Gleichungen der Bewegung sind daher für alle Zeiten $z_1 = 0$, $z_i = 0$, $Z_i = 0$, $p = q = 0$, $r = \omega$ und sind dieselben, wenn $C = M\varkappa_0^2$ gsetzet wird, wo $\varkappa_0$ den Trägheitsradius des Systems für die zu seiner Ebene senkrechte Hauptaxe von S bezeichnet, die drei folgenden:

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma X, \quad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma Y, \quad M\varkappa_0^2\frac{d\omega}{dt} = G^{(1)}.$$

Die beiden ersten Gleichungen bestimmen die Bewegung des Massenmittelpunktes und führen vier Integrationsconstanten ein, welche durch die Lage dieses Punktes zur Zeit t_0 und die Componenten der Geschwindigkeit zu derselben Zeit bestimmt werden können; die dritte Gleichung liefert die Winkelgeschwindigkeit und den Winkel ϑ, welchen die Hauptaxe der x' oder auch eine beliebige Gerade des Massenmittelpunktes in der Ebene der x', y' mit der x-Axe bildet. Die beiden durch die Integration dieser Gleichung eingeführten Constanten ergeben sich ebenso durch die Lage und die Winkelgeschwindigkeit des Systems zur Zeit $t = 0$. Die Integration der Gleichungen liefert die Coordinaten x_1, y_1 und die Componenten $v_x^{(1)}$, $v_y^{(1)}$ des Punktes S, sowie die Winkelgeschwindigkeit ω und den Stellungswinkel ϑ des Systems für jede Zeit t, abhängig von 6 Constanten, welche die Specialwerthe dieser 6 Grössen zur Zeit $t = t_0$ sind.

Sobald die Gleichungen integrirt sind, hat man für die absoluten Coordinaten x, y eines beliebigen Systempunktes $(x'y')$ nach bekannten Formeln

$$x = x_1 + x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta, \qquad y = y_1 + x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta$$

und hiermit durch Differentiation mit Rücksicht auf $\frac{dx_1}{dt} = v_x^{(1)}$, $\frac{dy_1}{dt} = v_y^{(1)}$, $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$ für die Componenten v_x, v_y der Geschwindigkeit v des Punktes $(x'y')$ parallel

den festen Axen

$$v_x = v_x^{(1)} - (x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta)\, \omega, \quad v_y = v_y^{(1)} + (x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta)\, \omega.$$

Für das Momentancentrum (C, Γ) sind v_x und v_y Null und wenn x'_0, y'_0 dessen Coordinaten im System sind, so folgt

$$\begin{aligned} \omega (x'_0 \sin \vartheta + y'_0 \cos \vartheta) &= v_x^{(1)}, \\ \omega (x'_0 \cos \vartheta - y'_0 \sin \vartheta) &= - v_y^{(1)} \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} \omega x'_0 &= v_x^{(1)} \sin \vartheta - v_y^{(1)} \cos \vartheta, \\ \omega y'_0 &= v_x^{(1)} \cos \vartheta + v_y^{(1)} \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen t, so erhält man den Ort (Γ) aller Momentancentra im System. Setzt man die Coordinatenwerthe für x'_0, y'_0 in die Gleichungen für x, y an die Stelle von x', y' ein, so ergeben sich die Coordinaten x_0, y_0 der Lage C des Momentancentrums in der festen Ebene, nämlich:

$$x_0 = x_1 - \frac{v_y^{(1)}}{\omega}, \quad y_0 = y_1 + \frac{v_x^{(1)}}{\omega}.$$

Eliminirt man hieraus t, so erhält man den Ort (C) aller Momentancentra in der festen Ebene.

Weiter erhält man für die Componenten der Beschleunigung des Systempunktes $(x'y')$ parallel den festen Axen:

$$\varphi_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \varphi_x^{(1)} - (x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta)\, \omega' - (x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta)\, \omega^2,$$

$$\varphi_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \varphi_y^{(1)} + (x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta)\, \omega' - (x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta)\, \omega^2.$$

Für den Mittelpunkt G der Beschleunigungen, dessen Coordinaten x'_2, y'_2 im System seien, verschwinden φ_x, φ_y; daher hat man für ihn

$$(\omega^2 \cos \vartheta + \omega' \sin \vartheta)\, x'_2 - (\omega^2 \sin \vartheta - \omega' \cos \vartheta)\, y'_2 = \varphi_x^{(1)},$$

$$(\omega^2 \sin \vartheta - \omega' \cos \vartheta)\, x'_2 + (\omega^2 \cos \vartheta + \omega' \sin \vartheta)\, y'_2 = \varphi_y^{(1)}$$

oder

$$(\omega^4 + \omega'^2)\, x'_2 = \varphi_x^{(1)} (\omega^2 \cos \vartheta + \omega' \sin \vartheta) + \varphi_y^{(1)} (\omega^2 \sin \vartheta - \omega' \cos \vartheta),$$

$$(\omega^4 + \omega'^2)\, y'_2 = - \varphi_x^{(1)} (\omega^2 \sin \vartheta - \omega' \cos \vartheta) + \varphi_y^{(1)} (\omega^2 \cos \vartheta + \omega' \sin \vartheta),$$

wo ω' für $\frac{d\omega}{dt}$ geschrieben ist.

Die Elimination von t aus diesen Gleichungen führt zur Kenntniss des Ortes aller Beschleunigungsmittelpunkte im System. Setzt man die sich ergebenden Ausdrücke für x'_2, y'_2 in die obigen Gleichungen für x, y ein, so ergeben sich ebenso die absoluten Coordinaten x_2, y_2 des Mittelpunktes der Beschleunigungen zur Zeit t und nach Elimination von t der Ort aller Beschleunigungsmittelpunkte in der festen Ebene.

Noch wollen wir erwähnen, dass durch Quadriren und Addiren der Ausdrücke für $\omega x'_0$, $\omega y'_0$ sich für den Abstand des Momentancentrums vom Massenmittelpunkt ergibt: $(x_0'^2 + y_0'^2)^{\frac{1}{2}} = v_1 : \omega$, wo v_1 die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes ist. Dies Resultat ist selbstverständlich, denn die Winkelgeschwindigkeit multiplicirt mit dem Abstande eines Punktes vom Momentancentrum gibt dessen Geschwindigkeit. Ebenso erhält man aus den Ausdrücken für $(\omega^4 + \omega'^2)\, x'_2$ und $(\omega^4 + \omega'^2)\, y'_2$ für den Abstand des Mittelpunktes der Beschleunigungen vom

Massenmittelpunkte: $(x_2'^2 + y_2'^2)^{\frac{1}{2}} = \varphi_1 : (\omega^4 + \omega'^2)^{\frac{1}{2}}$. Denn auch die Beschleunigung eines Systempunktes ist proportional seinem Abstande vom Mittelpunkte der Beschleunigungen. Ist $v_1 : \omega$ oder $\varphi_1^2 : (\omega^4 + \omega'^2)$ constant, so ist der betreffende Ort ein Kreis um S vom Radius $v_1 : \omega$ oder $\varphi_1 : (\omega^4 + \omega'^2)^{\frac{1}{2}}$.

Wir wollen einige specielle hierher gehörige Aufgaben behandeln.

§. 2. **Es sei die Bewegung des ebenen Systems zu untersuchen für den Fall, dass auf dasselbe keine continuirlichen Kräfte oder nur solche wirken, welche sich fortwährend Gleichgewicht halten.**

Hierfür ist $\Sigma X = \Sigma Y = 0$, $G^{(1)} = 0$ und mithin $\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2 y_1}{dt^2} = 0$, $\frac{d\omega}{dt} = 0$, woraus $x = at + \alpha$, $y = bt + \beta$, $\omega = \omega_0$, $\vartheta = \omega_0 t + \vartheta_0$ folgt. Der Massenmittelpunkt beschreibt eine gerade Linie mit constanter Geschwindigkeit und das System dreht sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit um den Massenmittelpunkt zugleich um. Für die Anfangslage des Massenmittelpunktes als Ursprung und eine durch ihn hindurchgehenden Geraden als x-Axe ist $\alpha = \beta = \vartheta_0 = 0$, also $x = at$, $v = bt$, $\vartheta = \omega_0 t$. Man hat für einen beliebigen Systempunkt $(x' y')$ die absoluten Coordinaten

$$x = at + x' \cos \omega_0 t - y' \sin \omega_0 t, \quad y = bt + x' \sin \omega_0 t + y' \cos \omega_0 t$$

und für die Componenten seiner Geschwindigkeit parallel den festen Axen:

$$v_x = a - (x' \sin \omega_0 t + y' \cos \omega_0 t)\,\omega_0, \quad v_y = b + (x' \cos \omega_0 t - y' \sin \omega_0 t)\,\omega_0,$$

sowie für die seiner Beschleunigung:

$$\varphi_x = -(x' \cos \omega_0 t - y' \sin \omega_0 t)\,\omega_0^2, \quad \varphi_y = -(x' \sin \omega_0 t + y' \cos \omega_0 t)\,\omega_0^2.$$

Hiermit ergibt sich für das Momentancentrum:

$$\omega_0 x_0' = a \sin \omega_0 t - b \cos \omega_0 t, \quad x_0 = at - \frac{b}{\omega_0}, \quad x_0'^2 + y_0'^2 = \frac{a^2 + b^2}{\omega_0^2} = \left(\frac{v_1}{\omega_0}\right)^2,$$

$$\omega_0 y_0' = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t, \quad y_0 = bt + \frac{a}{\omega_0}, \quad bx_0 - ay_0 + \frac{v_1^2}{\omega_0} = 0,$$

d. h. der Ort der Momentancentra im beweglichen System ist ein Kreis um den Massenmittelpunkt S vom Radius $v_1 : \omega_0$, wenn v_1 die Geschwindigkeit des letzteren ist; der Ort der Momentancentra in der Ebene der Bewegung ist eine Gerade, welche von S um diesen Radius absteht. Die Bewegung des Systems ist demnach äquivalent dem Rollen eines Kreises des beweglichen Systems auf einer Geraden der festen Ebene, welche zur geradlinigen Bahn des Massenmittelpunktes parallel ist. Sie ist also eine Cycloidenbewegung. Ohne von den Gleichungen Gebrauch zu machen, kann man diese Resultate direct so gewinnen. Da $R^{(1)}$ und $G^{(1)}$ Null sind, so ändert die Resultante $R = \omega M a$ der Momentankräfte weder Grösse noch Richtung und bleibt das Paar $G = \omega M \varkappa_0^2$ der Momentankräftereduction für S constant. Daher ist ω und die Geschwindigkeit ωa des Punktes S constant, letztere nach Grösse und Richtung. Der Massenmittelpunkt beschreibt daher eine Gerade gleichförmig. Da ωa constant ist, so bleibt auch der Abstand a' des Punktes S vom Momentancentrum constant. Daher ist der Ort aller Momentancentra im System ein Kreis. Nach der Gleichung $aa' = \varkappa_0^2$ ist auch der Abstand der Centralaxe der Momentankräfte von S constant und da diese stets die Richtung von R hat und diese Richtung die der Ge-

schwindigkeit von S ist, so folgt, dass der Ort des Momentancentrums in der festen Ebene eine Gerade ist, welche mit der geradlinigen Bahn von S im Abstande a' parallel ist. Demnach besteht die Bewegung des Systems in dem gleichförmigen Rollen des Kreises der Momentancentra auf einer Geraden und ist also eine Cycloidenbewegung.

Für den Mittelpunkt der Beschleunigungen hat man, da $\varphi_x^{(1)} = 0$, $\varphi_y^{(1)} = 0$ sind: $x'_2 = 0$, $y'_2 = 0$, d. h. der Mittelpunkt der Beschleunigungen fällt fortwährend mit dem Massenmittelpunkte zusammen.

Ist nicht der Geschwindigkeitszustand d. h. Momentancentrum und Winkelgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$, sondern ein System von Momentankräften gegeben, welche denselben zur Folge haben, so dient Cap. I, §. 11, S. 370 zur Bestimmung dieses Zustandes.

§. 3. Das System erhalte zur Zeit $t = 0$ von einer Momentankraft K, welche in seine Ebene fällt, einen Impuls und sei der continuirlichen Einwirkung eines Paares in seiner Ebene von constantem Momente $G^{(1)} = N$ unterworfen.

Die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = 0, \quad M\varkappa_0^2 \frac{d\omega}{dt} = N$$

liefern, wenn die Lage von S zur Zeit $t = 0$ der Ursprung und die Richtung seiner Geschwindigkeit c zu dieser Zeit die Axe der x, die mit dieser zusammenfallende Gerade des Systems die Axe der x' ist,

$$v_x^{(1)} = c, \quad v_y^{(1)} = 0, \quad \omega = \omega_0 + \frac{N}{M\varkappa_0^2} t = \omega_0 + \mu t, \text{ wo } \mu = \frac{N}{M\varkappa_0^2},$$

$$x_1 = ct, \quad y_1 = 0, \quad \vartheta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\mu t^2.$$

Der Massenmittelpunkt beschreibt eine Gerade gleichförmig und das System rotirt zugleich um ihn mit gleichförmig veränderlicher Winkelgeschwindigkeit. Haben ω_0 und N gleichen Sinn, so wird ω beschleunigt, bei entgegengesetztem Sinne verzögert. Zur Zeit $t = -\omega_0 : \mu$ wechselt im letztern Fall ω den Sinn und wächst von da an fortwährend. Die Constanten c und ω_0 bestimmen sich mit Hülfe der Momentankraft K, deren Abstand von S gleich a sei, nach Cap. I, §. 11. Es wird nämlich $cM = K$, $\omega_0 M\varkappa_0^2 = Ka$, also $c = K : M$, $\omega_0 = Ka : M\varkappa_0^2$ und stimmt c nach Richtung und Sinn mit K überein. Das Momentancentrum für ω_0 entsprechend $t = 0$ liegt auf dem kürzesten Abstande von K und S und mit K auf entgegengesetzten Seiten von S; der Sinn von ω_0 ist der Sinn des Paares Ka.

Für einen beliebigen Systempunkt (x', y') hat man

$$x = ct + x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta, \qquad v_x = c - (x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta)\frac{d\vartheta}{dt},$$

$$\vartheta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\mu t^2,$$

$$y = x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta, \qquad v_y = (x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta)\frac{d\vartheta}{dt},$$

$$\varphi_x = -(x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - (x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta)\frac{d^2\vartheta}{dt^2},$$

$$\varphi_y = -(x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + (x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta)\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

Für das Momentancentrum (x'_0, y'_0) zur Zeit t im System erhält man hiermit, indem man $v_x = v_y = 0$ setzt:

$$(\omega_0 + \mu t)\, x'_0 = c \sin(\omega_0 t + \tfrac{1}{2}\mu t^2), \qquad x_0 = ct,$$
$$(\omega_0 + \mu t)\, y'_0 = c \cos(\omega_0 t + \tfrac{1}{2}\mu t^2), \qquad y_0 = \frac{c}{\omega_0 + \mu t}.$$

Die Elimination von t aus x_0 und y_0 liefert für den Ort der Momentancentra in der festen Ebene nach einer Verschiebung des Ursprungs im Sinne der x um $\omega_0 c : \mu$ die gleichseitige Hyperbel $\mu x_0 y_0 = c^2$. Behufs Elimination von t aus den Gleichungen für x'_0, y'_0 ersetze man diese durch die Combinationen

$$(\omega_0 + \mu t)^2 (x'^2_0 + y'^2_0) = c^2, \qquad \frac{x'_0}{y'_0} - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(2\omega_0 + \mu t)\, t$$

und betrachte S als Ursprung eines Polarcoordinatensystems der ϱ, ψ, für welches die Axe der y' die Polaraxe ist. Dann wird $x'^2_0 + y'^2_0 = \varrho^2$, $x'_0 : y'_0 = \operatorname{tg}\psi$ und erhält man die Gleichungen $(\omega_0 + \mu t)\varrho = c$, $2\psi = (2\omega_0 + \mu t)\, t$ und aus diesen für den Ort der Momentancentra im System die Spirale $\left(\frac{c}{\varrho}\right)^2 = \omega_0^2 + 2\mu\psi$. Verlegt man die Polaraxe um den Winkel $\frac{\omega_0^2}{2\mu}$, so nimmt ihre Gleichung die Form an $\varrho\sqrt{\psi} = \alpha$, wo $\alpha = c : \sqrt{2\mu}$. Die Curve heisst der Lituus (Zinke). S. Roger Cotes, *Harmonia mensurarum* (1722), p. 85, sowie Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analyt. Geometrie, Berlin 1833, S. 315 und 345. Sie hat die Polaraxe zur Asymptote und windet sich asymptotisch dem Pole zu. Ihre Gleichung $\varrho^2\psi = \alpha^2$ drückt die Eigenschaft aus, dass der Sector eines mit dem Radiusvector ϱ um den Pol beschriebenen Kreises zwischen ϱ und der Asymptote constanten Inhalt hat.

§. 4. Ein unveränderliches, schweres, in einer Verticalebene bewegliches ebenes System erhält zur Zeit $t = 0$ von einer Momentankraft R im Abstande c vom Massenmittelpunkte S unter der Neigung α gegen die Horizontale einen Impuls in seiner Ebene und ist während seiner Bewegung continuirlich von einem constanten Paare N, welches in seine Ebene fällt, afficirt; man soll die Bewegung des Systems bestimmen.

Die Bewegungsgleichungen sind, wenn die x-Axe horizontal, die y-Axe vertical, positiv aufwärts gerechnet wird,

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -g, \qquad M\varkappa_0^2 \frac{d\omega}{dt} = N;$$

sie liefern

$$\frac{dx_1}{dt} = v_x^{(1)} = a, \qquad \frac{dy_1}{dt} = v_y^{(1)} = b - gt, \qquad \omega = \omega_0 + \frac{Nt}{M\varkappa_0^2} = \omega_0 + nt$$

und $x_1 = at$, $y_1 = bt - \frac{1}{2}gt^2$, $\vartheta = \omega_0 t + \frac{1}{2}nt^2$, wenn die Anfangslage von S Ursprung der x, y ist und ϑ für $t = 0$ verschwindet. Die Constanten a, b, ω_0 folgen aus der Momentankraft K, deren Abstand c von S und ihrer Neigung α gegen die Horizontale mit Hülfe der Gleichungen:

$$Ma = K\cos\alpha, \qquad Mb = K\sin\alpha, \qquad M\varkappa_0^2\omega_0 = Kc.$$

Der Massenmittelpunkt beschreibt eine Parabel mit vertikaler Hauptaxe und die Winkelgeschwindigkeit nimmt gleichförmig zu oder ab, je nach dem Sinne von N.

Für die Componenten der Geschwindigkeit und Beschleunigung folgt:

$$v_x = a - (x' \sin\vartheta + y' \cos\vartheta)\omega, \quad \varphi_x = -(x' \sin\vartheta + y' \cos\vartheta)\omega' - (x' \cos\vartheta - y' \sin\vartheta)\omega^2,$$

$$v_y = b - gt + (x' \cos\vartheta - y' \sin\vartheta)\omega, \quad \varphi_y = -g + (x' \cos\vartheta - y' \sin\vartheta)\omega' - (x' \sin\vartheta + y' \cos\vartheta)\omega^2,$$

und hiermit für das Momentancentrum:

$$\omega x_0' = a \sin\vartheta - (b - gt)\cos\vartheta, \quad \omega = \omega_0 + nt, \quad x_0 = at - \frac{b - gt}{\omega}$$

$$\omega y_0' = a \cos\vartheta + (b - gt)\sin\vartheta, \quad \vartheta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2} nt^2, \quad y_0 = bt - \tfrac{1}{2} gt^2 + \frac{a}{\omega}.$$

Indem man $x_0'^2 + y_0^2 = \varrho_0^2$, $y_0' : x_0' = \operatorname{tg}\psi$ setzt, erhält man für die Polarcoordinaten des Momentancentrums im System als Functionen der Zeit,

$$\varrho_0^2 = \frac{a^2 + (b - gt)^2}{(\omega_0 + nt)^2}, \quad \operatorname{tg}\psi_0 = \frac{a + (b - gt)\operatorname{tg}(\omega_0 t + \tfrac{1}{2} nt^2)}{a \operatorname{tg}(\omega_0 t + \tfrac{1}{2} nt^2) - (b - gt)}.$$

Für den Mittelpunkt der Beschleunigungen wird ebenso

$$(\omega^4 + \omega'^2) x_2' = g(\omega^2 \sin\vartheta - \omega' \cos\vartheta), \quad \varrho_2 = \frac{g}{(\omega^4 + \omega'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{g}{(\omega_0 + nt)^4 + n^2},$$

$$(\omega^4 + \omega'^2) y_2' = -g(\omega^2 \cos\vartheta + \omega' \sin\vartheta), \quad \operatorname{tg}\psi_2 = -\frac{(\omega_0 + nt)^2 + n \operatorname{tg}(\omega_0 t + \tfrac{1}{2} gt^2)}{(\omega_0 + nt)^2 \operatorname{tg}(\omega_0 t + \tfrac{1}{2} gt^2) - n}.$$

Die Curven beider Centra im System sind transcendente Spiralen, welche sich dem Punkte S asymptotisch nähern; die entsprechenden Curven in der festen Ebene sind algebraische Curven dritter Ordnung.

§. 5. Das System sei schwer und der Einwirkung eines Paares $G^{(1)} = -\varkappa^2\vartheta$ unterworfen, proportional dem Rotationswinkel ϑ, sodass die Gleichungen der Bewegungen sind

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -g, \quad \frac{d\omega}{dt} + \frac{k^2}{M\varkappa_0^2}\vartheta = 0$$

u. s. w.

§. 6. Ein körperliches, unveränderliches System bewegt sich ohne Einwirkung von continuirlichen Kräften, man soll die Bewegung desselben ermitteln.

1. Da keine Reductionsresultante $R^{(1)}$ vorhanden ist, so beschreibt der Massenmittelpunkt S eine Gerade mit constanter Geschwindigkeit und bleibt die Resultante R der Momentankräfte nach Grösse und Richtung constant. Weil das resultirende Paar $G^{(1)}$ der continuirlichen Kräfte Null ist, so ist auch das Axenmoment G des resultirenden Paares der Momentankräfte nach Grösse und Richtung constant (invariabele Axe) und besitzt das System eine invariabele Ebene, die Ebene des Paares G, die wir uns durch den Massenmittelpunkt gelegt denken wollen. Der Diameter des Centralellipsoids, welcher zu der mit der invariabelen Ebene zusammenfallenden Diametralebene desselben conjugirt ist, ist die Momentanaxe (S. 362). Da dieselbe im Allgemeinen schief geneigt ist gegen die Diametralebene, so tritt diese in Folge der Elementarrotation um die Momentanaxe aus der invariabelen Ebene heraus und gelangt eine andere, ihr unendlich nahe Diametralebene in dieselbe, deren conjugirter Diameter dadurch zur Momentanaxe für den folgenden Zeitmoment wird u. s. f. Obgleich also G nach Grösse und Richtung unveränderlich bleibt, so wechselt die Momentanaxe doch von Moment zu Moment. Blos im Falle, dass sie eine Hauptaxe und mithin zu der ihr conjugirten Diametralebene senkrecht ist, bleibt sie fortwährend dieselbe. Sollte also einmal im Laufe der Bewegung eine Hauptaxe senkrecht zur invariabelen Ebene werden,

so müsste das System sich alsdann fortwährend um diese umdrehen und würde die Rotationsaxe im Systeme, wie im absoluten Raume constante Richtung behalten, während im Allgemeinen die Momentanaxe sowohl im System als im absoluten Raume fortwährend wechselt.

Da keine continuirlichen Kräfte wirken, so ist die lebendige Kraft $2T$ während der Bewegung constant (Cap. II, §. 13, S. 414) und zwar mit Rücksicht auf Cap. I, §. 7, S. 367, sowohl der Bestandtheil $2T_0$, welcher aus der constanten Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes S entspringt, als auch der Bestandtheil $2T_1 = \omega^2 \Sigma m r^2$, welcher von der Rotation um die Momentanaxe des Massenmittelpunktes herrührt, jeder für sich. Sind p, q, r die Componenten der Winkelgeschwindigkeit ω in Bezug auf die Hauptaxen von S, so wird nach S. 369

$$2T_1 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$

und kann, wenn l den Semidiameter SJ des Cauchy-Poinsot'schen Centralellipsoids bezeichnet, welcher in die Richtung der Momentanaxe fällt, unter der Form

$$2T_1 = M\varepsilon^4 \left(\frac{\omega}{l}\right)^2$$

dargestellt werden. Daher bleibt während der Bewegung die Grösse $\omega : l$ constant und ω proportional dem Semidiameter l, nämlich

$$\omega = \frac{l}{\varepsilon^2}\sqrt{\frac{2T_1}{M}}.$$

Aus der Gleichung $\omega G \cos\psi = 2T_1$ (S. 369) folgt ferner, dass $\omega \cos\psi = 2T_1 : G$, d. h. dass die Componente der Winkelgeschwindigkeit um die Axe des resultirenden Paares der Momentankräfte constant bleibt.

Es ist ferner nach S. 361 wegen $G_x = Ap$, $G_y = Bq$, $G_z = Cr$

$$G^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2$$

und kann G unter der Form
$$G = M\varepsilon^4 \frac{\omega}{l\delta}$$
dargestellt werden, wo δ den Abstand der Tangentenebene des Centralellipsoids im Schnittpunkte J desselben mit der Momentanaxe vom Massenmittelpunkte bedeutet. Hiermit folgt weiter, da $\omega : l$ constant ist, dass auch δ constant ist. Daher behält die Tangentenebene des Centralellipsoids im Punkte J, welche mit der zu l conjugirten Diametralebene, also auch mit der invariabelen Ebene parallel und senkrecht zu G ist, während der Bewegung constanten Abstand vom Massenmittelpunkte. Legt man also im Abstande

$$\delta = M\varepsilon^4 \frac{\omega}{lG} = \varepsilon^2 \frac{\sqrt{M \cdot 2T_1}}{G}$$

von S eine Ebene senkrecht zur Axe des resultirenden Paares der Momentankräfte, so wird dieselbe während der Bewegung vom Centralellipsoid in immer anderen und anderen Punkten berührt. Das Parallelepiped conjugirter Diameter des Ellipsoids ist constant. Da δ die Höhe eines solchen ist, so folgt, dass der Flächeninhalt der Schnittellipse der invariabelen Ebene mit dem Centralellipsoid während der Bewegung constant bleibt (Poinsot).

Hierdurch ist die Bewegung des Centralellipsoids und damit die Bewegung des Systems selbst vollständig klar und hat man den Satz:

Ein freies unveränderliches System, welches nicht von continuirlichen Kräften afficirt wird, bewegt sich so, dass sein Massenmittelpunkt eine Gerade gleichförmig beschreibt und das Cauchy-

Poinsot'sche Centralellipsoid auf einer invariabelen Ebene, welche in constantem Abstande δ vom Massenmittelpunkte parallel mit sich fortrückt, hinrollt. Während der Bewegung bleibt die Resultante R, wie das resultirende Axenmoment G der Momentankräfte geometrisch constant. Erstere bestimmt die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes, jenes die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe dieses Punktes; die invariabele Ebene ist senkrecht zu G. Die lebendige Kraft des Systems bleibt während der Bewegung constant und zwar sowohl der von der Bewegung des Massenmittelpunktes, als auch der von der Rotation um diesen Punkt herrührende Bestandtheil derselben, jeder für sich. Das System dreht sich jeden Augenblick um einen anderen Diameter $2l$ des Centralellipsoids, nämlich um denjenigen, welcher durch den Berührungspunkt J mit der invariabelen Ebene geht, auf welcher es rollt; die Winkelgeschwindigkeit ω ist l proportional, sodass $\omega : l$ constant bleibt. Die Componente der Winkelgeschwindigkeit um die Axe des resultirenden Paares G bleibt constant.

In dem besonderen Falle, dass zu irgend einer Zeit das System um eine Hauptaxe des Centralellipsoids rotirt, bleibt diese Axe fortwährend Rotationsaxe und die Winkelgeschwindigkeit constant. Die Hauptaxen des Centralellipsoids heissen daher auch permanente Rotationsaxen des Systems. Die Existenz solcher Axen wurde zuerst von Segner (Programma sistens specimen theoriae turbinum. Halae 1755, 4°) nachgewiesen.

Nach Cap. I bestimmt man leicht den anfänglichen Geschwindigkeitszustand des Systems aus den Momentankräften, welche dasselbe in Bewegung setzten.

2. Nach B. I, S. 284 ist die Bewegung eines unveränderlichen Systems äquivalent dem Rollen eines gewissen, dem beweglichen System angehörigen Kegels, zu dessen Mittelpunkt ein beliebiger Systempunkt gewählt werden kann, auf einem anderen Kegel mit demselben Mittelpunkte, welcher eine Translationsbewegung besitzt, wie sie durch die Bewegung des Systempunktes, welcher gemeinschaftlicher Mittelpunkt beider Kegel ist, bestimmt wird. Der erste Kegel ist der Ort (Γ) aller Momentanaxen für die Rotation um den Systempunkt im System, der zweite der Ort (C) aller mit den Momentanaxen parallelen, sich in jenem Mittelpunkte schneidender Geraden. In unserem Falle ist der Mittelpunkt beider Kegel der Massenmittelpunkt. Der Kegel (Γ) scheidet das Cauchy-Poinsot'sche Centralellipsoid in einer Curve, welche die Berührungspunkte J desselben mit der invariabelen Tangentenebene enthält, der zweite schneidet diese Ebene in der Curve aller Punkte I, in welchen dieselbe im Laufe der Bewegung von dem Centralellipsoid berührt wird. Die Curve auf dem Ellipsoid nennt Poinsot die Polodie (von πόλος und ὅδος, Weg des Poles J der Momentanaxe, nicht „Poloide“, wie man zuweilen findet), die andere ebene Curve, auf welcher während der Bewegung die erste berührend hinrollt, ihrer schlangenartigen Windungen wegen die Herpolodie (von ἕρπειν, kriechen, schleichen) (Fig. 121). Durch beide Curven wird die Bewegung des Systems in

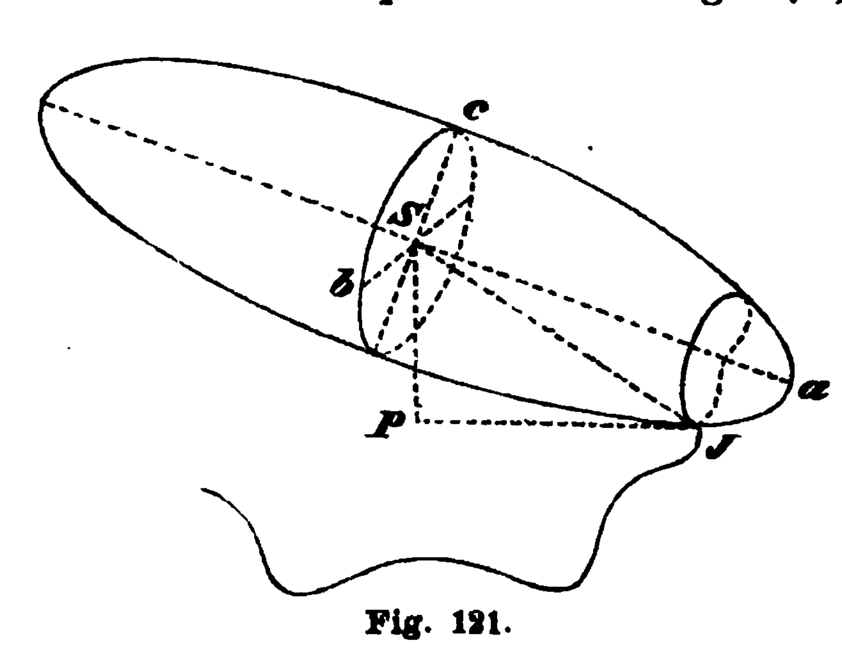


Fig. 121.

ausgezeichneter Weise charakterisirt. Sie hängen von den Hauptaxen des Centralellipsoids und von dem Abstande des Massenmittelpunktes von der invariabelen Tangentenebene ab.

Um die Polodie zu bestimmen, hat man auf dem Centralellipsoid den Ort aller Punkte zu suchen, deren Tangentenebene vom Mittelpunkte denselben Abstand δ besitzt. Sind α, β, γ die Halbaxen dieses Ellipsoids, so bestehen mithin für diese Curve die Gleichungen:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}-1=0, \quad \frac{x^2}{\alpha^4}+\frac{y^2}{\beta^4}+\frac{z^2}{\gamma^4}-\frac{1}{\delta^2}=0.$$

Sie ist daher die Schnittcurve des Centralellipsoids mit einem anderen concentrischen und coaxialen Ellipsoide, dessen Halbaxen $\alpha^2:\delta$, $\beta^2:\delta$, $\gamma^2:\delta$ sind. Multiplicirt man die zweite Gleichung mit δ^2 und subtrahirt sie hierauf von der ersten, so ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}\left(1-\frac{\delta^2}{\alpha^2}\right)+\frac{y^2}{\beta^2}\left(1-\frac{\delta^2}{\beta^2}\right)+\frac{z^2}{\gamma^2}\left(1-\frac{\delta^2}{\gamma^2}\right)=0,$$

welche die Kegelfläche (Γ) der Momentanaxen darstellt. Die Polodie ist demnach der Schnitt eines Ellipsoids mit einer concentrischen Kegelfläche zweiter Ordnung. Diese Raumcurve vierter Ordnung zerfällt in zwei getrennte Theile, von denen jeder für sich auf einer invariabelen Ebene rollend angenommen werden kann, um die Bewegung vollkommen zu charakterisiren. Jeder dieser Theile hat zwei Paar Scheitel, welche durch die Hauptebenen des Ellipsoids bestimmt werden. Der Abstand δ der Tangentenebene ist nun nicht kleiner als die kleinste und nicht grösser als die grösste Halbaxe des Ellipsoids. Es sei $\alpha>\beta>\gamma$. Für $\delta=\alpha$ reducirt sich der Kegel auf die Gerade, welche die Axe α enthält und die Polodie auf zwei Punkte. Für $\delta=\gamma$ reducirt sich der Kegel auf die Axe γ. In diesen Fällen rotirt das System fortwährend um die längste oder kürzeste Axe des Centralellipsoids. Ist $\alpha>\delta>\beta$, so enthält die yz-Ebene keine reellen Geraden des Kegels (Γ) und umgibt derselbe also die x-Axe, d. h. die grösste Axe α des Ellipsoids. Für $\beta>\delta>\gamma$ schneidet der Kegel die xy-Ebene nicht in reellen Geraden, also umgibt derselbe die kürzeste Axe γ. Für $\delta=\beta$ zerfällt der Kegel in zwei Ebenen

$$\frac{x^2}{\alpha^2}\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)+\frac{z^2}{\gamma^2}\left(1-\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)=0,$$

welche durch die mittlere Axe β hindurchgehen und gleich geneigt gegen die Ebene $(\alpha\beta)$ sind. Die Tangente dieser Neigung ist $\pm\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\sqrt{\frac{\beta^2-\alpha^2}{\gamma^2-\beta^2}}$. Sie schneiden das Centralellipsoid in zwei Ellipsen, von denen jede als Polodie gelten kann und welche beide sich selbst in den Scheiteln der mittleren Axe treffen.

In allen Fällen ist die Polodie eine geschlossene Curve, welcher Umstand sich in der Periodicität der Bewegung des Systems ausspricht.

Die Polodie kann nach Obigem als der Ort der Berührungspunkte einer Ebene mit dem Centralellipsoid definirt werden, welche zugleich die Kugel $x^2+y^2+z^2=\delta^2$ berührt. Der Ort der Berührungspunkte mit der Kugel ist der Schnitt dieser mit dem Kegel $\left(1-\frac{\alpha^2}{\delta^2}\right)x^2+\left(1-\frac{\beta^2}{\delta^2}\right)y^2+\left(1-\frac{\gamma^2}{\delta^2}\right)z^2=0$, eine sphärische Ellipse. Denn sind die Coordinaten des Berührungspunktes mit der Kugel und dem Ellipsoid resp. x, y, z; x', y', z', so werden die Gleichungen der Tangentenebene $\frac{1}{\delta^2}(x\xi+y\eta+z\zeta)=1$, $\frac{x'\xi}{\alpha^2}+\frac{y'\eta}{\beta^2}+\frac{z'\zeta}{\gamma^2}=1$ identisch, wenn man setzt

$\frac{x}{\delta^2} = \frac{x'}{\alpha^2}$, $\frac{y}{\delta^2} = \frac{y'}{\beta^2}$, $\frac{z}{\delta^2} = \frac{z'}{\gamma^2}$, woraus mit Hülfe des Ellipsoids folgt: $\frac{\alpha^2}{\delta^2} x^2 + \frac{\beta^2}{\delta^2} y^2 + \frac{\gamma^2}{\delta^2} z^2 = \delta^2$. Diese Gleichung führt in Verbindung mit der Gleichung der Kugel zu dem genannten Kegel.

Fällt man vom Massenmittelpunkte S auf die invariabele Ebene das Perpendikel SP, so ist PJ die Projection des Semidiameters SJ, welcher nach dem Berührungspunkte der Polodie mit der Herpolodie hinführt. Nun hat SJ ein Maximum und ein Minimum, entsprechend den Scheiteln der Polodie, daher hat auch der Radiusvector der Herpolodie ein Maximum und Minimum und sieht man leicht, dass diese Curve sich wellenförmig zwischen zwei um P in der invariabelen Ebene mit dem Maximum und dem Minimum von PJ beschriebenen Kreisen hinwindet (Fig. 122). Der Kegel (C), auf welchem der Kegel (Γ) rollt, zeigt daher Cannelirungen und ist zwischen zwei concentrischen Kreiskegeln enthalten. Derselbe ist im Allgemeinen transcendent und kehrt nur in besonderen Fällen in sich selbst zurück.

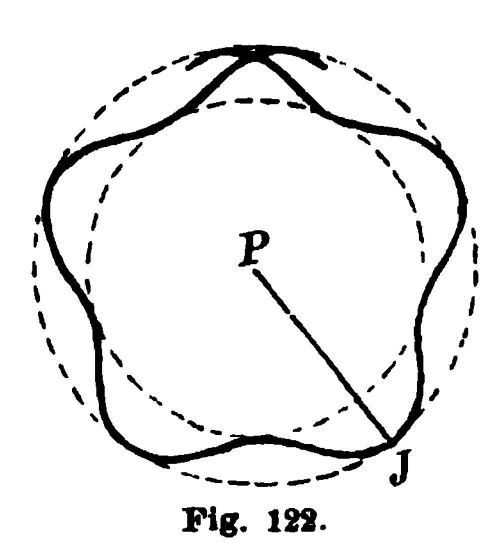


Fig. 122.

In dem Falle $\delta = \beta$ ist die Herpolodie eine Doppelspirale, welche in unendlich vielen Windungen von beiden Seiten sich dem Punkte P asymptotisch nähert.

Ist das Centralellipsoid ein Rotationsellipsoid, so werden beide Curven Kreise; ist es eine Kugel, so fällt die Momentanaxe mit der Axe des resultirenden Paares der Momentankräfte zusammen, beide Curven sind Punkte, welche fortwährend vereinigt bleiben.

Die beiden Ellipsen, welche dem Falle $\delta = \beta$ als Polodie entsprechen, zerlegen die Oberfläche des Ellipsoids in zwei Paar Scheitelräume, welche in den beiden Scheiteln der mittleren Axe zusammenstossen und von denen das eine die Scheitel der kleinsten, das andere die der grössten Axe enthält. Die Ellipsen trennen die Schaar Polodien, welche um die Scheitel der kleinsten Axe herumlaufen, von denen, welche die Scheitel der grössten Axe umschliessen. Wird eine der beiden Axen, die grösste oder die kleinste, der mittleren nahezu gleich, so wird der Scheitelraum, der ihr zugehört, sehr eng, der andere sehr weit.

Die Rotation um eine Hauptaxe ist permanent; indessen haben die drei Hauptaxen nicht gleiche Stabilität in Bezug hierauf. Wird die Bewegung ein wenig gestört, so tritt die Momentanaxe auf eine benachbarte Polodie über. Umläuft diese Polodie eine Hauptaxe in einem engen Umring, so entfernt sich die Momentanaxe niemals weit von ihr und ist auch die Herpolodie auf einen engen Raum eingeschränkt, sodass diese Axe nicht viel von einer festen Richtung im Raume abweicht. In diesem Falle bezeichnet man die Rotation als stabil. Umgibt aber die Polodie die Hauptaxe nicht sehr eingeengt, so kann die Momentanaxe in Folge einer kleinen Strörung sehr weit von der Hauptaxe abweichen; in diesem Falle ist die Rotation labil. Rotirt das System um die Hauptaxe des mittleren Trägheitsmomentes B, so laufen die benachbarten Polodien nicht um sie herum, sondern kehren ihr alle ihre Convexität zu. Daher ist die Rotation um diese Axe labil. Nur in einem Falle kehrt die Momentanaxe nach der Störung in die Hauptaxe zurück; wenn nämlich die Störung längs der Polodie stattfindet,

welche aus den beiden sich auf der mittleren Hauptaxe schneidenden Ellipsen besteht. In diesem speciellen Falle kann man die Rotation stabil nennen.

Die meisten der bis jetzt durchgeführten Betrachtungen, insbesondere den Satz über die Bewegung des Centralellipsoids auf der invariabelen Ebene verdankt man Poinsot (*Théorie nouvelle de la rotation des corps; prés. à l'Institut le 19. mai* 1834; auch als Anhang zu den früheren Auflagen der *Eléments de Statique* des Verfassers; in erweiterter Form in Liouville, *Journal de Mathém.* T. XVII [1851] und *Additions à la Connaissance des temps* p. 1852).

3. Die beiden Centralellipsoide $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, wo $a\alpha=b\beta=c\gamma=\varepsilon^2$ ist, sind in Bezug auf die mit dem Radius ε um ihren gemeinsamen Mittelpunkt beschriebene Kugel reciprok und zwar speciell nach der Verwandtschaft der reciproken Radienvectoren. Sie sind für alle correspondirenden Lagen während der Bewegung des Systems homologe Flächen zweier involutorisch liegender räumlicher reciproker Systeme, dem Raume angehörig, welcher in Translationsbewegung begriffen ist, wie sie durch die Bewegung des Massenmittelpunktes bestimmt wird. In diesen Systemen entspricht jedem Punkte M des einen eine Ebene μ' des andern, welche senkrecht zu dem Radiusvector SM ist und diesen in einem Punkte M' schneidet, sodass $SM\cdot SM'=\varepsilon^2$ wird. Ebenso entspricht jeder Ebene μ des ersten ein Punkt M' des zweiten, auf dem zu μ senkrechten Strale von S so gelegen, dass wenn M' sein Schnittpunkt mit μ ist, ebenfalls $SM\cdot SM'=\varepsilon^2$ wird. Allen Punkten M einer Ebene α entsprechen Ebenen μ', welche durch den der Ebene homologen Punkt A gehen und umgekehrt. Jeder Geraden als einer Punktreihe entspricht eine Gerade als Axe eines Ebenenbüschels, den Punkten einer Fläche sind die Tangentenebenen einer anderen, der reciproken Fläche, homolog und umgekehrt; dem Berührungspunkte der Tangentenebene einer Fläche ist homolog der Schnittpunkt des zur Tangentenebene senkrechten Strales von S mit der reciproken Fläche u. s. w.

Der invariabelen Ebene, welche von dem Cauchy-Poinsot'schen Ellipsoid berührt wird, entspricht ein Punkt, welcher auf deren Normalen, nämlich der Axe des Paares G der Momentankräfte liegt. So oft eine Tangentenebene dieses Ellipsoids in die invariabele Ebene eintritt, fällt der ihr homologe Punkt des reciproken Ellipsoids mit jenem Punkt auf der Axe von G zusammen und so oft ein Punkt der Polodie mit einem Punkte der Herpolodie zusammentrifft, geht die ihm homologe Tangentenebene des reciproken Ellipsoids durch denselben Punkt hindurch. Das reciproke Centralellipsoid bewegt sich daher so, dass es fortwährend durch einen bestimmten Punkt auf der Axe des Paares G der Momentankräfte hindurchgeht. Der constante Abstand l' dieses Punktes von S genügt der Bedingung $l'\delta=\varepsilon^2$. Wir nennen ihn den invariabelen Punkt.

Nach S. 363 hat die Momentanaxe die Richtung der Normalen δ', welche von S auf die Tangentenebene des reciproken Ellipsoids gefällt werden kann, welche dasselbe in seinem Schnittpunkte mit der Axe von G berührt und ist die Winkelgeschwindigkeit ω der Länge δ' dieser Normalen umgekehrt proportional. Da l' constant bleibt, so ist das Produkt $\delta'\omega=G:Ml'$ constant. Die Momentanaxen bilden im System einen Kegel zweiten Grades mit S als Mittelpunkt. Da die Tangentenebenen des reciproken Ellipsoids im invariabelen Punkt auf den entsprechenden Momentanaxen senkrecht stehen, so umhüllen sie gleichfalls einen Kegel zweiten Grades, welcher zum Kegel der Momentanaxen supple-

mentär ist. Diese Ebenen bewegen sich momentan in sich selbst; wir nennen sie Momentanebenen der Bewegung und sagen aus: **Die Momentanebenen der Bewegung, welche durch den invariabelen Punkt hindurchgehen, umhüllen einen Kegel zweiten Grades, dessen Mittelpunkt der invariabele Punkt ist.** Die Parallelebenen zu diesen Ebenen in S sind gleichfalls Momentanebenen der Bewegung und bilden einen Kegel zweiten Grades congruent mit dem eben genannten.

Die Momentanaxen von S bilden im Raume einen transcendenten Kegel, welcher die invariabele Ebene in der Herpolodie schneidet. Die zu ihnen senkrechten Momentanebenen des invariabelen Punktes (oder auch die des Punktes S) umhüllen daher gleichfalls einen transcendenten Kegel und da ihr Abstand δ' von S (oder vom invariabelen Punkt) zwischen den Grenzen a und c variirt, so ist der Kegel ähnlich cannelirt, wie der der Momentanaxen. Dieser Kegel wird von dem Kegel der Momentanebenen im System fortwährend berührt. Daher: **Während der Bewegung des Systems berührt der Kegel zweiten Grades der Momentanebenen des invariabelen Punktes im System einen gewissen transcendenten Kegel, welcher von den Lagen der Momentanebenen im Raume umhüllt wird.** Dieser Kegel entspricht der Herpolodie, wie der Kegel zweiten Grades, der ihn berührt, das Analogon zur Polodie ist.

Während der Bewegung gehen immer andere und andere Punkte des reciproken Centralellipsoids durch den invariabelen Punkt hindurch. Da alle gleichen Abstand δ' von S haben müssen, so liegen sie ausser auf dem Ellipsoid auch noch auf der um S mit dem Abstande l' des invariabelen Punktes von S beschriebenen Kugel. Sie bilden daher einen sphärischen Kegelschnitt auf dem reciproken Ellipsoid, der in gewissem Sinne ein Analogon zur Polodie ist. Ist l' gleich der mittleren Axe b des Centralellipsoids, so geht der Kegelschnitt in das System der beiden Kreisschnitte über.

Die Behandlung der Bewegung des freien Systems ohne Einwirkung von Kräften mit Hülfe des reciproken Centralellipsoids wurde zuerst gegeben von MacCullagh (*On the rotation of a solid body. Proceed. of the Irish Academy*, Vol. II [1840—44], pp. 520—525, 542—544; Vol. III [1845—47], pp. 370—371). — *On the rotation of a solid body round a fixed point; being an account of the late Professor MacCullagh's lectures on that subject. Compiled by the Rev. Samuel Haughton. Transact. of the Irish Academy*, Vol. XXII (1855, *read the* 23. *Apr.* 1849), p. 139—154. MacCullagh hat überhaupt zuerst das reciproke Centralellipsoid angewandt. Die Hauptsätze der vorliegenden Theorie finden sich auch bei Clebsch, Zur Theorie der Trägheitsmomente und der Drehung um einen Punkt (Crelle Journ. B. 57 [1860], S. 73—77).

4. **Die invariabele Axe des Paares G** beschreibt im System eine Kegelfläche. Es war $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T_1$ und $A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2$ oder, wenn man $A = M\varepsilon^4 : \alpha^2$, $B = M\varepsilon^4 : \beta^2$, $C = M\varepsilon^4 : \gamma^2$ setzt,

$$M\varepsilon^4\left(\frac{p^2}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\beta^2} + \frac{r^2}{\gamma^2}\right) = 2T_1, \quad (M\varepsilon^4)^2\left(\frac{p^2}{\alpha^4} + \frac{q^2}{\beta^4} + \frac{r^2}{\gamma^4}\right) = G^2,$$

woraus mit Hülfe von $\dfrac{M\varepsilon^4 \cdot 2T_1}{G^2} = \delta^2$ (s. Nr. 1) folgt

$$\frac{1}{\alpha^2}\left(1 - \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right)p^2 + \frac{1}{\beta^2}\left(1 - \frac{d^2}{\beta^2}\right)q^2 + \frac{1}{\gamma^2}\left(1 - \frac{\delta^2}{\gamma^2}\right)r^2 = 0.$$

Für die Punkte (xyz) der invariabelen Axe ist aber

$$\frac{x}{Ap} = \frac{y}{Bq} = \frac{z}{Cr}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\alpha^2 x}{p} = \frac{\beta^2 y}{q} = \frac{\gamma^2 z}{r}.$$

Daher wird die Gleichung des Kegels der invariabelen Axe nach Elimination von p, q, r:

$$\alpha^2 \left(1 - \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) x^2 + \beta^2 \left(1 - \frac{\delta^2}{\beta^2}\right) y^2 + \gamma^2 \left(1 - \frac{\delta^2}{\gamma^2}\right) z^2 = 0$$

oder

$$(\alpha^2 - \delta^2) x^2 + (\beta^2 - \delta^2) y^2 + (\gamma^2 - \delta^2) z^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist identisch mit der unter Nr. 2 angeführten Kegelfläche, welche die Berührungspunkte der Tangentenebenen des Centralellipsoids längs der Polodie mit der Kugelfläche $x^2 + y^2 + z^2 = \delta^2$ enthält. Dies ist selbstverständlich; denn die beiden Linien, welche in die Lagen der Momentanaxe und der invariabelen Axe zusammen eintreten, treffen das Ellipsoid und die Kugelfläche in zwei Punkten, deren Tangentenebenen in der invariabelen Ebene zusammenfallen.

In ähnlicher Weise hätte oben Nr. 2 der Kegel der Momentanaxen entwickelt werden können, indem man behufs Elimination von p, q, r die Proportion $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$, welche die Richtungscosinusse der Momentanaxe bestimmt, benutzt hätte.

Beschreibt man um S mit den Radien α, β, γ drei Kugeln, zieht durch S einen Stral $SPQR$, welcher diese Kugeln in den Punkten P, Q, R schneidet und legt durch diese Punkte Ebenen resp. senkrecht zu den Hauptaxen, so schneiden diese Ebenen sich in einem Punkte (xyz) des Centralellipsoids. Denn die Richtungscosinusse des Strals gegen die Axen sind $x:\alpha$, $y:\beta$, $z:\gamma$, sodass $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ ist.

Auf diese Weise entspricht jedem Punkte des Ellipsoids ein bestimmter Stral, den man den excentrischen Stral dieses Punktes nennen kann. Den sämmtlichen Punkten der Polodie entsprechen Stralen, welche einen Kegel, den excentrischen Kegel der Polodie, bilden. Sind X, Y, Z die Coordinaten eines Punktes auf dem excentrischen Strale des Punktes x, y, z der Polodie, so ist

$$X : \frac{x}{\alpha} = Y : \frac{y}{\beta} = Z : \frac{z}{\gamma}$$

oder

$$x : \alpha X = y : \beta Y = z : \gamma Z.$$

Nun genügen x, y, z der Gleichung (s. Nr. 2) des Polodienkegels. Setzt man daher in dessen Gleichung αX, βY, γZ für x, y, z, so erhält man für den excentrischen Kegel der Polodie, wenn man wieder x, y, z statt X, Y, Z schreibt, die Gleichung:

$$\left(1 - \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) x^2 + \left(1 - \frac{\delta^2}{\beta^2}\right) y^2 + \left(1 - \frac{\delta^2}{\gamma^2}\right) z^2 = 0.$$

Wir wollen die Coefficienten in den Gleichungen der drei Kegel,

des Polodienkegels (SJ):

$$\frac{1}{\alpha^2}\left(1 - \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) x^2 + \frac{1}{\beta^2}\left(1 - \frac{\delta^2}{\beta^2}\right) y^2 + \frac{1}{\gamma^2}\left(1 - \frac{\delta^2}{\gamma^2}\right) z^2 = 0,$$

des Kegels der invariabelen Axe (SP):

$$\alpha^2 \left(1 - \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) x^2 + \beta^2 \left(1 - \frac{\delta^2}{\beta^2}\right) y^2 + \gamma^2 \left(1 - \frac{\delta^2}{\gamma^2}\right) z^2 = 0$$

und des excentrischen Kegels (SE):

$$\left(1 - \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) x^2 + \left(1 - \frac{\delta^2}{\beta^2}\right) y^2 + \left(1 - \frac{\delta^2}{\gamma^2}\right) z^2 = 0$$

durch die beiden Constanten $2\,T_1$ und G ausdrücken. Wir fanden

$$\frac{2\,T_1}{G^2} = \frac{\delta^2}{M\varepsilon^4}, \quad A = \frac{M\varepsilon^4}{\alpha^2}, \quad B = \frac{M\varepsilon^4}{\beta^2}, \quad C = \frac{M\varepsilon^4}{\gamma^2};$$

hiermit werden

$$\frac{\delta^2}{\alpha^2} = \frac{2\,T_1 A}{G^2}, \quad \frac{1}{\alpha^2}\left(1 - \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) = \frac{A\,(G^2 - 2\,T_1 A)}{M\varepsilon^4 G^2},$$

$$\alpha^2\left(1 - \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) = \frac{M\varepsilon^4\,(G^2 - 2\,T_1 A)}{A G^2}, \quad 1 - \frac{\delta^2}{\alpha^2} = \frac{G^2 - 2\,T_1 A}{G^2}, \quad \text{etc.}$$

und sind also die Gleichungen der drei Kegel, nämlich

die des Polodienkegels (SJ):

$$A\,(G^2 - 2\,T_1 A)\,x^2 + B\,(G^2 - 2\,T_1 B)\,y^2 + C\,(G^2 - 2\,T_1 C)\,z^2 = 0,$$

die des Kegels der invariabelen Axe (SP):

$$\frac{1}{A}\,(G^2 - 2\,T_1 A)\,x^2 + \frac{1}{B}\,(G^2 - 2\,T_1 B)\,y^2 + \frac{1}{C}\,(G^2 - 2\,T_1 C)\,z^2 = 0$$

und die des excentrischen Kegels (SE):

$$(G^2 - 2\,T_1 A)\,x^2 + (G^2 - 2\,T_1 B)\,y^2 + (G^2 - 2\,T_1 C)\,z^2 = 0.$$

Wenn man will, kann man diesen Kegeln einen weiteren hinzufügen, den excentrischen Kegel der invariabelen Axe, dessen Gleichung man erhält, indem man αx, βy, γz für x, y, z in der Gleichung des Kegels der invariabelen Axe setzt. Er ist übrigens nicht im Gebrauch. Dagegen ist ein anderer Kegel von Bedeutung. Nach Nr. 1 ist die Componente der Winkelgeschwindigkeit ω um die Momentanaxe in Bezug auf die invariabele Axe SP constant, nämlich $\omega \cos i = 2\,T_1 : G$, wenn i die Neigung von SJ gegen SP bezeichnet. Legen wir durch die invariabele Axe und die Momentanaxe eine Ebene, so schneidet dieselbe die invariabele Ebene des Punktes S in einer Geraden SH, sodass die Winkelgeschwindigkeit ω zerfällt in die genannte constante Componente um SP und eine andere variabele Componente $\omega \sin i$ um SH. Durch die Elementarrotation um SH tritt eine Linie des Systems aus SP heraus und beschreibt das Flächenelement des Kegels der invariabelen Axe. SH ist zu demselben senkrecht. Während der Bewegung des Systems wechselt die Linie SH im System; der Ort derselben ist eine Kegelfläche, deren Erzeugungslinien zu den Tangentenebenen des Kegels der invariabelen Axe senkrecht sind. Diese beiden Kegel sind daher reciprok zu einander. Um die Gleichung dieser Fläche zu finden, hat man blos die Gleichung der Tangentenebene des Kegels der invariabelen Axe zu bilden, die Richtungscosinusse von SH sind den Coefficienten derselben proportional. Sind daher X, Y, Z die Coordinaten eines Punktes von SH, so folgt

$$X : \alpha^2\left(1 - \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) x = Y : \beta^2\left(1 - \frac{\delta^2}{\beta^2}\right) y = Z : \gamma^2\left(1 - \frac{\delta^2}{\gamma^2}\right) z$$

und indem man hieraus die den x, y, z proportionelen Grössen in die Gleichung jenes Kegels einsetzt und wieder x, y, z statt X, Y, Z schreibt, wird die gesuchte Gleichung des Kegels (SH):

$$\frac{x^2}{\alpha^2\left(1 - \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right)} + \frac{y^2}{\beta^2\left(1 - \frac{\delta^2}{\beta^2}\right)} + \frac{z^2}{\gamma^2\left(1 - \frac{\delta^2}{\gamma^2}\right)} = 0.$$

Während der Bewegung des Systems geht der Kegel (SP) durch die invariabele Axe SP hindurch und da SP normal zur Kegelfläche (SH) und senkrecht zur invariabelen Ebene des Punktes S ist, so ist letztere stets Tangentenebene des Kegels (SH). Daher bleibt während der Bewegung der Kegel (SH) dauernd in Berührung mit der invariabelen Ebene des Punktes S. Die Bewegung des Systems um S ist daher äquivalent dem Rollen des Kegels (SH) auf der invariabelen Ebene des Punktes S in Verbindung mit einer gleichförmigen Rotation um die invariabele Axe SP.

In dem Falle, dass der Kegel (SP) in zwei Ebenen zerfällt, reducirt sich der Kegel (SH) auf die eine von zwei zu diesen Ebenen senkrechten Geraden.

5. Die drei Kegel (SJ), (SP), (SE) liegen symmetrisch gegen die Hauptaxen des Punktes S und schneiden eine um S mit der Einheit als Radius beschriebener Kugel in drei sphärischen Kegelschnitten (J), (P), (E) (Fig. 123), welche gemeinschaftlichen Mittelpunkt und gemeinschaftliche Hauptaxen haben.

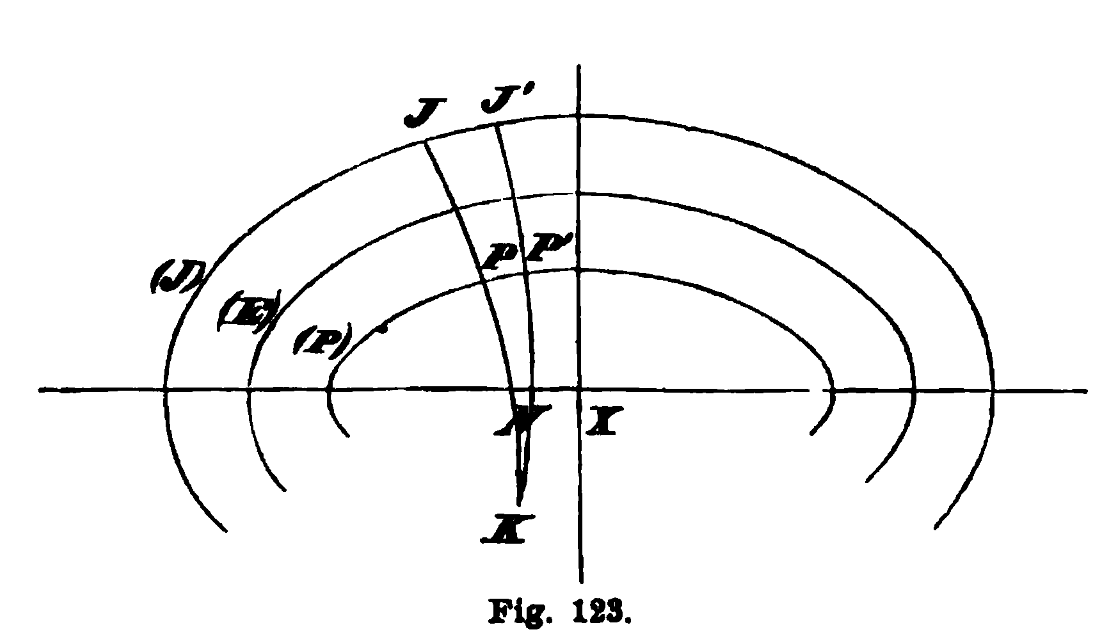


Fig. 123.

Bezeichnen wir die mittlere Axe des Centralellipsoids mit β, die grösste mit α und die kleinste mit γ, sodass also $A < B < C$ ist, und nehmen wir an, es liege δ zwischen α und β, so umgeben die drei Kegel die Axe α, welche in obigen Gleichungen zur x-Axe gewählt ist. Die Lagen grösster Kreise, welche in die Ebenen der xz und yz fallen, enthalten die sphärischen Halbaxen (a_i, b_i), (a_p, b_p), (a_e, b_e) der drei Kegelschnitte (J), (P), (E). Setzen wir $z = 0$, resp. $y = 0$, so stellen $y : x$ und $z : x$ die Grössen tg a und tg b dar und werden

$$\frac{\operatorname{tg} a_i}{\beta^2} = \frac{\operatorname{tg} a_p}{\alpha^2} = \frac{\operatorname{tg} a_e}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha\beta}\sqrt{\frac{\alpha^2-\delta^2}{\delta^2-\beta^2}},$$

$$\frac{\operatorname{tg} b_i}{\gamma^2} = \frac{\operatorname{tg} b_p}{\alpha^2} = \frac{\operatorname{tg} b_e}{\alpha\gamma} = \frac{1}{\alpha\gamma}\sqrt{\frac{\alpha^2-\delta^2}{\delta^2-\gamma^2}},$$

oder

$$\frac{\operatorname{tg} a_i}{B} = \frac{\operatorname{tg} a_p}{A} = \frac{\operatorname{tg} a_e}{\sqrt{AB}} = \frac{1}{\sqrt{AB}}\sqrt{\frac{2T_1A-G^2}{G^2-2T_1B}},$$

$$\frac{\operatorname{tg} b_i}{C} = \frac{\operatorname{tg} b_p}{A} = \frac{\operatorname{tg} b_c}{\sqrt{AC}} = \frac{1}{\sqrt{AC}}\sqrt{\frac{2T_1A-G^2}{G^2-2T_1C}}.$$

Aehnliches gilt für die übrigen Fälle.

6. Indem das System sich um die Momentanaxe SJ dreht, rückt die mit der invariabelen Axe SP zusammenfallende Axe des Systems aus dieser Axe heraus und tritt eine andere in sie ein. Sind wieder J, P die Schnittpunkte von SJ und SP mit der Kugel vom Radius Eins im System, so ist das Bogenelement, welches P beschreibt, senkrecht zum Bogen JP und die Geschwindigkeit v des Punktes P wird $v = \omega \sin i$. Es ist aber (s. Nr. 1) die Componente von ω nach der Axe SG constant, nämlich $\frac{2T_1}{G} = \omega \cos i$. Hiermit wird $v = \frac{2T_1}{G} \operatorname{tg} i$.

Die Normale JP des sphärischen Kegelschnitts (P) schneide die Hauptaxe dieses, welche die Brennpunkte enthält, in N; wir wollen den Bogen PN suchen. In Bezug auf die Hauptaxen sind die Richtungscosinusse von SJ und SP proportional p, q, r und Ap, Bq, Cr; daher sind die Richtungscosinusse der Normalen der Ebene JSP proportional $(B-C)qr$, $(C-A)rp$, $(A-B)pq$ und ist die Gleichung dieser Ebene $(B-C)qrx+(C-A)rpy+(A-B)pqz=0$. Sie schneidet die xy-Ebene in der Geraden SN. Setzt man daher $z=0$, so sind die Richtungscosinusse von SN proportional $(A-C)p$, $(B-C)q$, 0. Hiermit erhält man

$$\cos(PN)=\frac{A(A-C)p^2+B(B-C)q^2}{G[(A-C)^2p^2+(B-C)^2q^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Der Zähler dieses Ausdruckes ist gleich

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2-C(Ap^2+Bq^2+Cr^2)=G^2-2T_1C.$$

Im Nenner aber ist der Inhalt der Klammer gleich

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2-2C(Ap^2+Bq^2+Cr^2)+C^2(p^2+q^2+r^2)=G^2-4T_1C+C^2\omega^2.$$

Hiermit wird

$$\cos(PN)=\frac{G^2-2T_1C}{G[G^2-4T_1C+C^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}(PN)=\frac{C(G^2\omega^2-4T_1^2)^{\frac{1}{2}}}{G^2-2T_1C}.$$

Da $\cos(JP)=\cos i=2T_1:G\omega$, so wird $\operatorname{tg} i=(G^2\omega^2-4T_1^2)^{\frac{1}{2}}:2T_1$ und folglich

$$\operatorname{tg}(JP):\operatorname{tg}(PN)=\frac{G^2-2T_1C}{2T_1C}=\frac{G^2}{2T_1C}-1,$$

sodass das Verhältniss der Tangenten der Winkel JSP und PSN während der Bewegung constant bleibt. In ähnlicher Weise ergibt sich die Bedeutung der Grössen $G^2:2T_1A$, $G^2:2T_1B$.

Indem man dies Resultat mit dem vorhin gefundenen Ausdrucke für die Geschwindigkeit v des Punktes P verbindet, folgt noch, wenn $PN=n$ gesetzt wird,

$$v=\frac{G^2-2T_1C}{CG}\operatorname{tg} n.$$

7. Nach Nr. 4 ist die Bewegung des Systems äquivalent dem Rollen des Kegels (SH) auf der invariabelen Ebene des Punktes S in Verbindung mit einer gleichförmigen Rotation um die invariabele Axe SP, in Folge deren der Kegel auf dieser Ebene auch gleitet. Durch die Rotation um SH tritt eine folgende Erzeugungslinie SH des Kegels in die invariabele Ebene ein; beide Erzeugungslinien bilden mit einander einen Winkel $HSH'=d\chi$, den wir nachher bestimmen wollen. Durch die Rotation um SP wird SH' in der invariabelen Ebene um den Winkel $H'SH''=d\psi$ gedreht. Die Summe beider Winkel bildet die Gesammtdrehung $HSH''=d\varphi$, welche SH erleidet, sodass $d\varphi=d\psi+d\chi$ ist. Da SP senkrecht zur invariabelen Ebene ist, so hat man $d\psi=\omega\cos i\,.\,dt$ und da $\omega\cos i=2T_1:G$ ist, so wird $d\psi=\frac{2T_1}{G}dt$, woraus der Winkel ψ gefunden werden kann, um welchen sich der Kegel SH auf der invariabelen Ebene G fortgewälzt hat. $d\varphi$ ist der Winkel, um welchen sich die Projection der Momentanaxe SJ auf die invariabele Ebene um die invariabele Axe umdreht, d. h. der Winkel, welchen zwei auf einander folgende Radienvectoren der Herpolodie mit einander bilden, welche von dem Mittelpunkte dieser Curve nach den Berührungspunkten des Centralellipsoids gezogen werden. Sobald dieser Winkel gefunden,

ist auch $d\chi$ bekannt. Der Winkel $d\varphi$ ist aber, wie man leicht sieht, auch der Winkel, welchen zwei successive Normalen JP, $J'P'$ der sphärischen Curve (P) mit einander bilden. Denn die Ebenen, welche durch SH und SP, sowie durch SH'' und SP gehen, sind zwei auf einander folgende Normalebenen von (P), von denen die zweite durch die Rotation um SH an die Stelle der ersten tritt, um sodann durch Rotation um SP die Lage SPH'' anzunehmen, wozu erfordert wird, dass sie sich um den Winkel drehe, welchen beide Normalebenen mit einander bilden. Die beiden Normalebenen von (P) schneiden sich in der Krümmungsaxe SK dieser Curve (s. Fig. 123), welche auf der Kugelfläche den Punkt K bestimmt, welchen man als den Durchschnitt der sphärischen Normalen PK, $P'K$ den sphärischen Krümmungsmittelpunkt nennen kann, wozu der Bogen PK als sphärischer Krümmungshalbmesser gehört. Bedeutet ϱ diesen Bogen PK, n den Normalbogen PN zwischen P und der Hauptaxe der Brennpunkte, sowie $2l$ den Parameter des Kegelschnitts (P), d. h. die spärische Sehne im Brennpunkt, senkrecht zu dieser Axe, endlich $2a$, $2b$ die Längen der Hauptaxen, so bestehen nach den Lehren der Sphärik die Gleichungen

$$\operatorname{tg}\varrho = \frac{\operatorname{tg}^3 n}{\operatorname{tg}^2 l}, \qquad \operatorname{tg} l = \frac{\operatorname{tg}^2 b}{\operatorname{tg} a}$$

(s. Gudermann, Grundriss der analytischen Sphärik, Köln, 1830, S. 78).

Nun ist die Componente der Geschwindigkeit des Punktes J in Folge der Rotation um SP gleich $\frac{d\varphi}{dt}\sin i$. Sie ergibt sich auch, wenn man das Element JJ' der Curve J geometrisch zerlegt nach JP und senkrecht hierzu und letztere Componente durch dt dividirt. Ist JJ'' diese Componente, so gibt die Aehnlichkeit der Figuren: $JJ'' : PP' = \sin(\varrho + i) : \sin\varrho$ und daher, weil $PP' : dt = \frac{2T_1}{G}\cdot\operatorname{tg} i$ und $JJ'' : dt = \frac{d\varphi}{dt}\sin i$ ist,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2T_1}{G}\left(1 + \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg}\varrho}\right),$$

oder weil $\operatorname{tg} i = \left(\frac{G^2}{2T_1 C} - 1\right)\operatorname{tg} n$ ist (Nr. 6), wenn man ϱ und i eliminirt

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2T_1}{G} + \frac{(2T_1A - G^2)(2T_1B - G^2)(2T_1C - G^2)}{4ABCGT_1^2}\operatorname{cotg}^2 i.$$

Hiermit erhält man endlich

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} - \frac{2T_1}{G} = \frac{(2T_1A - G^2)(2T_1B - G^2)(2T_1C - G^2)}{4ABCGT_1^2}\operatorname{cotg}^2 i.$$

8. Behufs der rein analytischen Behandlungsweise unseres Problems gehen wir von den Euler'schen Gleichungen aus, in welchen $G_x^{(1)} = G_y^{(1)} = G_z^{(1)} = 0$ ist, sodass sie lauten:

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = 0,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = 0,$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = 0.$$

a) Man erhält sofort zwei Integrale derselben, indem man sie das eine mal mit Ap, Bq, Cr, das andere mal mit p, q, r multiplicirt und addirt, nämlich:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2,$$
$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T_1,$$

wo G^2, $2T_1$ die Integrationsconstanten bezeichnen. Die Bedeutung derselben erhellt aus Cap. I, §. 9, S. 369; nämlich G stellt das Axenmoment der Momentankräfte, $2T_1$ die lebendige Kraft der Bewegung um den Massenmittelpunkt dar. Aus §. 8, S. 369, folgt zugleich, dass $2T_1 : G = h$ die Componente der Winkelgeschwindigkeit um die Axe von G darstellt, welche statt $2T_1$ als Constante eingeführt werden kann.

b) Behandelt man die Hauptaxen, deren Trägheitsmomente A, B, C sind, als Axen der x, y, z, so erhält man aus diesen beiden Integralen die Gleichung des Polodienkegels, indem man bedenkt, dass für die Punkte der Momentanaxe $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$ ist und p, q, r eliminirt. Ebenso ergibt sich mit Hülfe von $\frac{x}{Ap} = \frac{y}{Bq} = \frac{z}{Cr}$ der Kegel der invariabelen Axe durch Elimination derselben Grössen. Die Gleichungen der Kegel sind bereits in Nr. 4 angegeben.

c) Ist i der Neigungswinkel der Momentanaxe gegen die Axe des Paares G, so ist $h = \omega \cos i$ und wenn wir die andere Componente der Winkelgeschwindigkeit, nämlich $\omega \sin i = \varpi$ setzen, sodass $\omega^2 = h^2 + \varpi^2$ wird, so werden die drei Strecken $SJ = l$, $SP = \delta$, $PJ = v$ (Fig. 121) den Grössen ω, h, ϖ proportional.

d) Da die Axe SP des Paares G unveränderliche Richtung hat, so wollen wir sie zur Axe ξ eines beweglichen Hülfscoordinatensystems mit dem Ursprunge S wählen, dessen η-Axe wir parallel dem Radiusvector PJ der Herpolodie wählen, während die ζ-Axe senkrecht zur Ebene SPJ sein soll. Zunächst wollen wir nun die Lage der Hauptaxen α, β, γ gegen die Axen der ξ, η, ζ kennen lernen. Da $G_x = Ap$, $G_y = Bq$, $G_z = Cr$ ist, so wird

$$\cos(\xi\alpha) = \frac{A}{G}p, \quad \cos(\xi\beta) = \frac{B}{G}q, \quad \cos(\xi\gamma) = \frac{C}{G}r.$$

Um $\cos(\eta\alpha)$, $\cos(\eta\beta)$, $\cos(\eta\gamma)$ zu finden, genügt es ϖ auf die Hauptaxen α, β, γ zu projiciren und die Projectionen durch ϖ zu dividiren. Es ist aber $[\varpi] = [\omega] - [h]$, mithin ist die Projection von ϖ auf die Axe α gleich $p - h\cos(\xi\alpha) = p - \frac{Ah}{G}p = \frac{G - Ah}{G}p = \frac{G^2 - 2T_1A}{G^2}p$. Hiermit und mit Hülfe cyclischer Buchstabenvertauschung werden:

$$\cos(\eta\alpha) = \frac{G^2 - 2T_1A}{G^2}\cdot\frac{p}{\varpi}, \quad \cos(\eta\beta) = \frac{G^2 - 2T_1B}{G^2}\cdot\frac{q}{\varpi},$$
$$\cos(\eta\gamma) = \frac{G^2 - 2T_1C}{G^2}\cdot\frac{r}{\varpi}.$$

Da endlich die Axe der ζ senkrecht zu G und ω ist, so bildet sie mit der Axe α denselben Winkel, welchen die Ebene des Dreiecks $\frac{1}{2}h\varpi$ mit der Ebene $(\beta\gamma)$ bildet. Daher ist die Projection dieses Dreiecks auf diese Ebene $\frac{1}{2}h\varpi\cos(\zeta\alpha)$; indem man dieselbe aber durch die Coordinaten der Ecken darstellt, wird

$$h\varpi\cos(\zeta\alpha) = \begin{vmatrix} \frac{hBq}{G} & \frac{hCr}{G} \\ q & r \end{vmatrix},$$

woraus mit Hülfe cyclischer Vertauschung sich die Formeln ergeben:

$$\cos(\zeta\alpha) = \frac{B-C}{G}\cdot\frac{qr}{\varpi},\quad \cos(\zeta\beta) = \frac{C-A}{G}\cdot\frac{rp}{\varpi},\quad \cos(\zeta\gamma) = \frac{A-B}{G}\cdot\frac{pq}{\varpi}.$$

e) Wir wollen jetzt die Componenten p, q, r der Winkelgeschwindigkeit ω um die Momentanaxe als Functionen von ω darstellen. Hierzu sind die Gleichungen

$$p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2,$$
$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T_1,$$
$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2$$

aufzulösen. Die Auflösung gibt

$$p^2 = \frac{BC}{(A-B\,(A-C)}(\omega^2 - \lambda^2),\quad q^2 = \frac{CA}{(B-C)\,(B-A)}(\omega^2 - \mu^2),$$
$$r^2 = \frac{AB}{(C-A)\,(C-B)}(\omega^2 - \nu^2),$$

wo

$$\lambda^2 = \frac{2T_1(B+C) - G^2}{BC},\quad \mu^2 = \frac{2T_1(C+A) - G^2}{CA},\quad \nu^2 = \frac{2T_1(A+B) - G^2}{AB}.$$

Indem man die Ausdrücke für p^2, q^2, r^2 in die vorstehenden Gleichungen einsetzt, ergeben sich zugleich die Identitäten:

$$\Sigma\frac{BC}{(A-B)\,(A-C)} = 1,\quad \Sigma\frac{BC\lambda^2}{(A-B)\,(A-C)} = 0,$$
$$\Sigma\frac{1}{(A-B)\,(A-C)} = 0,\quad \Sigma\frac{\lambda^2}{(A-B)\,(A-C)} = -\frac{2T_1}{ABC},$$
$$\Sigma\frac{A}{(A-B)\,(A-C)} = 0,\quad \Sigma\frac{A\lambda^2}{(A-B)\,(A-C)} = -\frac{G^2}{ABC},$$

wobei die Glieder der Summen durch cyclische Vertauschung von A, B, C aus einander hervorgehen.

Aus den Formeln für p^2, q^2, r^2, λ^2, μ^2, ν^2 folgt

$$\nu^2 - \lambda^2 = (C-A)\,(2T_1B - G^2) : ABC,$$

unter der Annahme $A < B < C$ ist mithin $\nu^2 - \lambda^2 > 0$, $\nu^2 - \lambda^2 < 0$, $\nu^2 - \lambda^2 = 0$, je nachdem $G^2 < 2T_1B$, $G^2 > 2T_1B$ oder $G^2 = 2T_1B$ ist. Für $\omega = \mu$ wird $q = 0$ und für $\omega > \mu$ wird q imaginär, daher ist μ das Maximum, welches ω erreichen kann. Ist $\nu > \lambda$, so kann ω nicht kleiner als ν werden, weil sonst r imaginär werden würde; ist $\lambda > \nu$, so kann ω nicht unter λ herabsinken, weil dasselbe sonst mit p sich ereignen würde. Daher ist das Minimum, welches ω erreichen kann, die grösste von den beiden Grössen λ, ν.

Da der Radiusvector $PJ = l$ der Polodie proportional ω ist, so folgt, dass derselbe zwischen zwei Grenzen variirt. Dieselben ergeben sich aus der Gleichung $2T_1 = M\varepsilon^4(\omega : l)^2$; für $\omega = \mu$ erhält man das Maximum, für ω gleich der grössten der beiden Grössen λ, ν das Minimum von l.

Da der Radiusvector $PJ = v$ der Herpolodie der Gleichung $v^2 = l^2 - \delta^2$ genügt, so folgt, dass auch er zwischen zwei Grenzen enthalten ist und dass seine Maxima und Minima gleichzeitig mit den Maximis und Minimis von l eintreten.

f) Aus der Formel für p^2 erhält man

$$p\frac{dp}{dt} = \frac{BC}{(A-B)\,(A-C)}\,\omega\frac{d\omega}{dt}.$$

Indem man dies mit dem aus der ersten Euler'schen Gleichung folgenden Werthe $\frac{dp}{dt} = \frac{B-C}{A} qr$ combinirt, folgt

$$\omega \frac{d\omega}{dt} = -\frac{(C-A)(A-B)(B-C)}{ABC} pqr$$

oder nach Einsetzung der Werthe von p, q, r:

$$\omega \frac{d\omega}{dt} = \pm \sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)(\mu^2 - \omega^2)(\omega^2 - \nu^2)},$$

wobei das Zeichen (+) oder (—) gilt, je nachdem ω wächst oder abnimmt. Es ist $d\omega : dt$ die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Endpunkt der Strecke ω vom Punkte S entfernt oder sich ihm annähert. Aus den Gleichungen $2T_1 l^2 = M\varepsilon^4 \omega^2$ und $l^2 = v^2 + \delta^2$ ergeben sich hierzu $2T_1 l dl = M\varepsilon^4 \omega d\omega$ und $l dl = v dv$ die entsprechenden Geschwindigkeiten für die Entfernung des Poles J und des Punktes der Herpolodie von S und P.

g) Es sei ds das Bogenelement, welches der Endpunkt der Strecke ω, welche die Winkelgeschwindigkeit darstellt, im Raume oder auch im System beschreibt (beides ist gleich, wie aus der Bewegung des Poles J auf der Polodie und der Herpolodie sich ergibt, deren Bogenelemente gleich sind). Es ist ds das geometrische Differential von ω und folglich

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

$$= \Sigma \left(\frac{B-C}{A}\right)^2 q^2 r^2 = -\Sigma \frac{BC(\omega^2 - \mu^2)(\omega^2 - \nu^2)}{(A-B)(A-C)}$$

$$= -\Sigma \frac{BC[\omega^4 - (\mu^2 + \nu^2)\omega^2 + \mu^2\nu^2]}{(A-B)(A-C)}.$$

Indem man bemerkt, dass man setzen kann:

$$\mu^2 + \nu^2 = (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - \lambda^2, \quad \mu^2\nu^2 = (\lambda^2\mu^2 + \mu^2\nu^2 + \nu^2\lambda^2) - \lambda^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + \lambda^4,$$

$$\lambda^4 = \lambda^2 \frac{[(A+B+C) - A]\, 2T_1 - G^2}{BC}$$

und die oben erwähnten Identitäten berücksichtigt, erhält man für das Quadrat der Geschwindigkeit des Endpunktes der Winkelgeschwindigkeit ω:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\omega^4 + (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\omega^2 - (\lambda^2\mu^2 + \mu^2\nu^2 + \nu^2\lambda^2)$$

$$+ \frac{4T_1^2 (A+B+C)}{ABC} - \frac{4G^2 T_1}{ABC}.$$

Die Differentiation dieses Ausdruckes gibt:

$$\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} = (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 2\omega^2)\,\omega \frac{d\omega}{dt}.$$

Da nun $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 2\omega^2 > \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 2\mu^2$, d. h. $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 2\omega^2 > \lambda^2 + \nu^2 - \mu^2$ und diese letztere Grösse, wie wir sogleich zeigen wollen, positiv ist, so folgt, dass $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 2\omega^2 > 0$ und folglich der Differentialquotient von $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ stets positiv ist. Daher: Die Geschwindigkeit des Endpunktes von ω und folglich auch die des Poles als des Endpunktes des Radiusvectors l erreicht ihr Maximum und ihr Minimum zugleich mit der Länge der Strecke ω und des Radiusvectors l. Dass $\lambda^2 + \nu^2 - \mu^2$ positiv

ist, ersieht man so. Man findet
$ABC(\lambda^2+\nu^2-\mu^2)=4T_1AC-(A+C-B)G^2=(2T_1C-G^2)A+2T_1AC+(B-A)G^2$.
Aus den Gleichungen $Ap^2+Bq^2+Cr^2=2T_1$ und $A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=G^2$ folgt $2T_1C-G^2>0$ und wegen $A<B<C$ ist $B-A$ positiv.

h) Zwei auf einander folgende Momentanaxen SJ, SJ' des Punktes S mit den Winkelgeschwindigkeiten ω (p, q, r) und $\omega+d\omega$, $(p+dp, q+dq, r+dr)$ bilden mit einander einen unendlichkleinen Winkel $d\sigma$ und schliessen die Strecken ω, $\omega+d\omega$ mit einander einen unendlichkleinen Sector $\frac{1}{2}\omega^2 d\sigma$ ein, dessen Projectionen auf die Coordinatenebenen der Hauptaxen doppelt genommen sind:

$$qdr-rdq,\quad rdp-pdr,\quad pdq-qdp.$$

Die Projection dieses Sectors auf die invariabele Ebene wird von den beiden auf einander folgenden Radienvectoren der Herpolodie eingeschlossen und ist $\frac{1}{2}\varpi^2du$, wenn du den unendlichkleinen Winkel zwischen diesen Radienvectoren bedeutet. Das Doppelte dieser Projection ist die Summe der Projectionen von $qdr-rdq$, $rdp-pdr$, $pdq-qdp$ auf die invariabele Ebene und daher

$$\begin{aligned}\varpi^2du &= (qdr-rdq)\cos(\xi\alpha)+(rdp-pdr)\cos(\xi\beta)+(pdq-qdp)\cos(\xi\gamma)\\ &= [r\cos(\xi\beta)-q\cos(\xi\gamma)]\,dp+[p\cos(\xi\gamma)-r\cos(\xi\alpha)]\,dq\\ &\quad+[q\cos(\xi\alpha)-p\cos(\xi\beta)]\,dr.\end{aligned}$$

Substituirt man die in d) gefundenen Werthe für $\cos(\xi\alpha)$, $\cos(\xi\beta)$, $\cos(\xi\gamma)$, so ergibt sich mit Hülfe der Euler'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned}\varpi^2\frac{du}{dt} &= \frac{B-C}{G}qr\frac{dp}{dt}+\frac{C-A}{G}rp\frac{dq}{dt}+\frac{A-B}{G}pq\frac{dr}{dt}\\ &= \frac{(B-C)^2}{GA}q^2r^2+\frac{(C-A)^2}{GB}r^2p^2+\frac{(A-B)^2}{GC}p^2q^2.\end{aligned}$$

Hieraus folgt, indem man die Werthe von p^2, q^2, r^2 einsetzt,

$$G\varpi^2\frac{du}{dt}=-ABC\,\Sigma\frac{(\omega^2-\mu^2)(\omega^2-\nu^2)}{(A-B)(A-C)}.$$

Da $\omega^2=h^2+\varpi^2$, erhält man für den Zähler unter dem Summenzeichen

$$\begin{aligned}(\omega^2-\mu^2)(\omega^2-\nu^2) &= (h^2+\varpi^2-\mu^2)(h^2+\varpi^2-\nu^2)=\varpi^4+(2h^2-\mu^2-\nu^2)\varpi^2+(h^2-\mu^2)(h^2-\nu^2)\\ &= (\varpi^2+2h^2-\lambda^2-\mu^2-\nu^2)\varpi^2+\lambda\varpi^2+(h^2-\mu^2)(h^2-\nu^2).\end{aligned}$$

Nun ergeben sich aber leicht mit Hülfe der unter e) gefundenen Werthe und mit Rücksicht auf $h=2T_1:G$ die folgenden Relationen:

$$h^2-\lambda^2=\frac{(G^2-2T_1B)(G^2-2T_1C)}{BCG^2},\quad \Delta=\frac{(G^2-2T_1A)(G^2-2T_1B)(G^2-2T_1C)}{ABCG^3},$$

$$h^2-\mu^2=\frac{(G^2-2T_1C)(G^2-2T_1A)}{CAG^2},$$

$$h^2-\nu^2=\frac{(G^2-2T_1A)(G^2-2T_1B)}{ABG^2},\qquad \Delta^2=(h^2-\lambda^2)(h^2-\mu^2)(h^2-\nu^2),$$

$$(h^2-\mu^2)(h^2-\nu^2)=\frac{\Delta}{AG}(G^2-2T_1A),\quad \mu^2-\nu^2=\frac{C-B}{ABC}(G^2-2T_1A),$$

$$(h^2-\nu^2)(h^2-\lambda^2)=\frac{\Delta}{BG}(G^2-2T_1B),\quad \nu^2-\lambda^2=\frac{A-C}{ABC}(G^2-2T_1B),$$

$$(h^2-\lambda^2)(h^2-\mu^2)=\frac{\Delta}{CG}(G^2-2T_1C),\quad \lambda^2-\mu^2=\frac{B-A}{ABC}(G^2-2T_1C).$$

Indem man hieraus $(h^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)$ entnimmt, ergibt sich

$$(\omega^2 - \mu^2)(\omega^2 - \nu^2) = (\varpi^2 + 2h^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2)\varpi^2 + \lambda^2\varpi^2 + \Delta\left(\frac{G}{A} - h\right),$$

Daher wird jetzt unter Zuhilfenahme der Identitäten unter e)

$$G\varpi^2 \frac{du}{dt} = ABC\,\Sigma \frac{-\lambda^2\varpi^2 - \frac{\Delta}{A}G}{(A-B)(A-C)}$$

$$= ABC\varpi^2\,\Sigma \frac{-\lambda^2}{(A-B)(A-C)} - G\Delta\Sigma \frac{BC}{(A-B)(A-C)} = 2T_1\varpi^2 - G\Delta$$

und hiermit

$$\frac{du}{dt} = h - \frac{\Delta}{\varpi^2}.$$

Hierin ist $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$ je nachdem $G^2 - 2T_1B < 0$, $= 0$, > 0 ist. Die Grösse $\frac{du}{dt}$ ist die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher ϖ und der Radiusvector v der Herpolodie um SP rotiren; sie wächst, nimmt ab oder bleibt constant, je nachdem $G^2 < 2T_1B$, $G^2 > 2T_1B$ oder $G^2 = 2T_1B$ ist.

Um $\frac{d\sigma}{dt}$, nämlich die Geschwindigkeit zu finden, mit welcher sich der Radiusvector SJ um S dreht, denke man sich das unendlich schmale Dreieck, dessen Seiten φ, ds und $\omega + d\omega$ sind und fälle vom Endpunkte von ω auf die Seite $\omega + d\omega$ ein Perpendikel. Man erhält dann ein unendlichkleines rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse ds und dessen Katheten $\omega d\lambda$ und $d\omega$ sind, sodass $\omega^2 d\sigma^2 + d\omega^2 = ds^2$ und mithin

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\omega^2}\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right]$$

wird. Setzt man hierin die für $\frac{ds}{dt}$ und $\frac{d\omega}{dt}$ gefundenen Werthe ein, so erhält man

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\omega}\left[\frac{4T_1}{ABC}[(A+B+C)T_1 - G^2] - \left(\frac{\lambda\mu\nu}{\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

i) Wir wollen jetzt die Componenten p, q, r der Winkelgeschwindigkeit ω als Functionen der Zeit t darstellen. Wir werden dies dadurch erreichen, dass wir p, q, r, t durch einen gewissen Winkel φ ausdrücken und die Gleichung zwischen φ und t umkehren. Dieser Winkel φ ist wohl zu unterscheiden von dem in Nr. 7 mit φ bezeichneten Winkel. Dabei genügt es, den Fall $G^2 < 2T_1B$ auszuführen und dabei $A < B < C$ vorauszusetzen, denn für den Fall $G^2 > 2T_1B$ gelten dieselben Gleichungen, wenn man nur die Benennungen der Axen des grössten und kleinsten Trägheitsmomentes vertauscht, d. h. $A > B > C$ voraussetzt.

Da der Radiusvector SJ und die Winkelgeschwindigkeit ω einander proportional sind, so beschreibt der Endpunkt von ω eine der Polodie ähnliche Curve auf einem dem angenommenen Centralellipsoide ähnlichen Centralellipsoide, zu welchem man gleichfalls eine variabele Ebene durch den Endpunkt von h legen kann, auf welcher dies Ellipsoid rollt. Für den Endpunkt von ω sind p, q, r die Coordinaten und bestehen die Gleichungen $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T_1$ und $A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2$. Die Curve der Endpunkte von ω umgibt unter der

Annahme $A < B < C$ die Axe α und ihre Projection auf die Ebene $\beta\gamma$ wird durch Elimination von p aus diesen beiden Gleichungen erhalten. Sie wird daher dargestellt durch die Gleichung

$$B(B-A)q^2 + C(C-A)r^2 = G^2 - 2T_1A,$$

oder

$$\frac{q^2}{q_1^2} + \frac{r^2}{r_1^2} = 1, \quad q_1^2 = \frac{G^2 - 2T_1A}{B(B-A)}, \quad r_1^2 = \frac{G^2 - 2T_1A}{C(C-A)}.$$

Die Projection ist daher eine Ellipse mit der grossen Halbaxe q_1 und der kleinen Halbaxe r, in den Richtungen der Axen β und γ. Während der Endpunkt von ω die der Polodie ähnliche Curve auf dem Ellipsoid beschreibt, durchläuft seine Projection die Ellipse in demselben Sinne. Nehmen wir an, diese Bewegung beginne im Punkte $q = 0$, $r = r_1$ und erfolge im Sinne des Ueberganges von der positiven q-Axe zur positiven r-Axe. Dann kann man q und r durch das Complement φ der excentrischen Anomalie ausdrücken, d. h.

$$q = q_1 \sin\varphi, \quad r = r_1 \cos\varphi$$

setzen. Indem man in die Formel $q^2 = \dfrac{CA(\omega^2 - \mu^2)}{(B-C)(B-A)}$ den Werth $q = q_1 \sin\varphi$ einführt, ergibt sich

$$\omega^2 = \mu^2 + \frac{(B-C)(B-A)}{CA} q_1^2 \sin^2\varphi = \mu^2 - \frac{C-B}{ABC}(G^2 - 2T_1A)\sin^2\varphi$$

oder nach den Relationen in h)

$$\omega^2 = \mu^2 - (\mu^2 - \nu^2)\sin^2\varphi,$$

da der Coefficient von $\sin^2\varphi$ gleich $\mu^2 - \nu^2$ wird. Man erkennt hieraus, dass während φ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ wächst, ω von dem Maximum μ zum Minimum ν herabsinkt. Führt man den gefundenen Ausdruck für ω^2 in die Formel $p^2 = \dfrac{BC}{(A-B)(A-C)}(\omega^2 - \lambda^2)$ ein, so erhält man

$$p^2 = \frac{BC(\mu^2 - \lambda^2)}{(A-B)(A-C)}\left(1 - \frac{\mu^2 - \nu^2}{\mu^2 - \lambda^2}\sin^2\varphi\right).$$

Ist p_1 der Werth von p, welcher $\varphi = 0$ entspricht, so wird $p_1^2 = \dfrac{BC(\mu^2 - \lambda^2)}{(A-B)(A-C)}$ und indem man noch $\varkappa^2 = \dfrac{\mu^2 - \nu^2}{\mu^2 - \lambda^2} = \dfrac{C-B}{B-A} \cdot \dfrac{G^2 - 2T_1A}{2T_1C - G^2}$ setzt, gewinnt man p unter der Form

$$p = p_1\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi},$$

wobei zu bemerken ist, dass p immer positiv ist, da die Polodie die Axe der α umgibt und also p stets auf die positive Axe fällt.

Bildet man nun mit Hülfe von $\omega^2 = \mu^2 - (\mu^2 - \nu^2)\sin^2\varphi$ und mit Rücksicht auf die Bedeutung von $\varkappa^2$ die Grössen $\omega^2 - \lambda^2 = (\mu^2 - \lambda^2)(1 - \varkappa^2\sin^2\varphi)$, $\mu^2 - \omega^2 = (\mu^2 - \nu^2)\sin^2\varphi$, $\omega^2 - \nu^2 = (\mu^2 - \nu^2)\cos^2\varphi$, so wird

$$\omega\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)(\mu^2 - \omega^2)(\omega^2 - \nu^2)} = (\mu^2 - \nu^2)\sqrt{\mu^2 - \lambda^2}\cdot\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\varphi}$$

und da die Differentiation des Ausdruckes für ω^2

$$\omega\frac{d\omega}{dt} = -(\mu^2 - \nu^2)\sin\varphi\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

liefert, so ergibt die Vergleichung, wenn man noch

$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{B-A}{ABC}(2T_1C - G^2) = n^2$$

setzt,

$$dt = -\frac{1}{n}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}},$$

wo das Zeichen (—) anzeigt, dass φ mit wachsendem t abnimmt. Ist φ_0 der der Zeit $t = 0$ entsprechende Winkel φ, so hat man

$$t - t_0 = \frac{1}{n}\int_{\varphi}^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}$$

und wenn t_1 die Zeit bedeutet, welche verfliesst, bis $\varphi = 0$ wird, so dass

$$t_1 - t_0 = \frac{1}{n}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}$$

ist, so erhält man

$$t_1 - t = \frac{1}{n}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{n}F(\varphi,\varkappa),\ mod.\ \varkappa$$

für die Zeit, in welcher der Winkel $\varphi_0 - \varphi$ beschrieben wird. Hieraus folgt dann φ als Function von t, nämlich

$$\varphi = am.\, n(t_1 - t), \quad n = \sqrt{\frac{B-A}{ABC}(2T_1C - G^2)}, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{C-B}{B-A}\cdot\frac{G^2 - 2T_1A}{2T_1C - G^2}}.$$

Die Zeit, welche erfordert wird, bis der Pol J ein Viertel der Polodie von Scheitel zu Scheitel beschreibt, entspricht der Winkeldifferenz $\frac{1}{2}\pi$ und wenn man sie mit T bezeichnet, so wird

$$T = \frac{1}{n}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{n}K,\ mod.\ \varkappa.$$

Diese Zeit ist für alle Viertel dieselbe.

k) Es ist $\varpi = \sqrt{\omega^2 - h^2}$. Indem man den Werth $\omega^2 = \mu^2 - (\mu^2 - \nu^2)\sin^2\varphi$ einsetzt, wird

$$\varpi = \sqrt{(\mu^2 - h^2) - (\mu^2 - \nu^2)\sin^2\varphi} = \sqrt{\mu^2 - h^2}\cdot\sqrt{1 - \frac{\mu^2-\nu^2}{\mu^2-h^2}\sin^2\varphi}.$$

Man sieht hieraus, dass das Maximum von ϖ gleich $\sqrt{\mu^2 - h^2}$ und das Minimum $\sqrt{\nu^2 - h^2}$ ist und dass dem Maximum die Werthe $\varphi = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi, \ldots$ dem Minimum die Werthe $\varphi = \frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi, \ldots$ entsprechen. Da der Radiusvector v der Herpolodie ϖ proportional ist, so folgt hieraus die, Fig. 122 angegebene wellenförmige Beschaffenheit dieser Curve, vermöge welcher sie zwischen zwei concentrischen Kreisen um den Punkt P eingeschlossen ist. Je nachdem der, einer Welle entsprechende Centriwinkel mit 2π commensurabel oder incommensurabel ist, wird die Herpolodie in sich zurückkehren oder nicht zurückkehren, d. h. algebraisch oder transcendent sein.

Setzt man

$$\varpi_1^2 = \mu^2 - h^2 = \frac{(G^2 - 2T_1A)(2T_1C - G^2)}{CAG^2}, \quad g^2 = \frac{\mu^2 - \nu^2}{\nu^2 - h^2} = \frac{G^2}{B} \cdot \frac{C-B}{2T_1C - G^2},$$

$$f^2 = \frac{\Delta^2}{(\mu^2 - \lambda^2)(\mu^2 - h^2)^2} = \frac{CA(G^2 - 2T_1B)^2}{B(B-A)G^2(2T_1C - G^2)},$$

so hat man mit Hülfe der unter h) entwickelten Formel $\frac{du}{dt} = h - \frac{\Delta}{\varpi^2}$

$$\varpi = \varpi_1 \sqrt{1 - g^2 \sin^2\varphi}, \quad du = h dt - f \frac{d\varphi}{(1 - g^2\sin^2\varphi)\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}},$$

sodass also der Winkel u durch ein elliptisches Integral dritter Gattung dargestellt werden kann. Entspricht dem Winkel $\varphi = \varphi_0$ der Werth $\mu = \mu_0$, so wird

$$u - u_0 = h(t - t_0) + f\int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{(1 - g^2\sin^2\varphi)\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\varphi}}$$

und wenn $u = u_1$ wird für $t = t_1$, $\varphi = 0$, so folgt

$$u_1 - u_0 = h(t_1 - t_0) + f\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{(1 - g^2\sin^2\varphi)\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\varphi}}$$

und hiermit

$$u - u_1 = h(t - t_1) - f\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 - g^2\sin^2\varphi)\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\varphi}}.$$

l) Es bleibt noch der besondere Fall zu erörtern übrig, dass $G^2 - 2T_1B = 0$ ist. Hierfür hat man, wie sich aus den Formeln h) ergibt,

$$\lambda = \nu = h, \quad \mu = h\sqrt{\frac{B}{CA}(C + A - B)}, \quad \Delta = 0, \quad g = 0, \quad \varkappa = 1, \quad f = 1,$$

$$p_1 = h\sqrt{\frac{B}{A} \cdot \frac{C-B}{C-A}}, \quad q_1 = h, \quad r_1 = h\sqrt{\frac{B}{C} \cdot \frac{B-A}{C-A}}, \quad \varpi_1 = h\sqrt{\frac{(C-B)(B-A)}{CA}}.$$

Hiermit wird

$$n dt = \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{d \cdot \sin\varphi}{1 - \sin^2\varphi} = \tfrac{1}{2} d \cdot l\,\frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}$$

und wenn man integrirt und $\varphi = 0$ der Zeit $t = 0$ entsprechen lässt,

$$\sin\varphi = \frac{e^{2nt} - 1}{e^{2nt} + 1}, \quad \cos\varphi = \frac{2}{e^{nt} + e^{-nt}}.$$

Ferner wird

$$p = p_1\cos\varphi, \quad q = h\sin\varphi, \quad r = r_1\cos\varphi$$

und wenn man $p^2 + r^2 = p_1^2 + r_1^2 = u^2$ setzt

$$\frac{q^2}{h^2} + \frac{u^2}{\beta^2} = 1,$$

welche Gleichung sich leicht in eine Gleichung für die beiden Ellipsen umsetzen lässt, in welche sich die Polodie in dem Falle $G^2 - 2T_1B = 0$ auflöst. Man erhält weiter $du = h dt$, $\varpi = n\cos\varphi$, also

$$u = ht, \quad \varpi = \frac{2n}{e^{nt} + e^{-nt}}.$$

Es rotirt mithin der Radiusvector der Herpolodie mit constanter Winkelgeschwindigkeit um den Punkt P und seine Länge, welche ϖ proportional ist, nähert sich fortwährend der Null. Die Herpolodie ist daher eine Spirale, welche sich dem Pole P asymptotisch annähert.

m) Wir wollen die Resultate der vorstehenden Untersuchung nebst leichten Folgerungen übersichtlich zusammenstellen:

I. $G^2 - 2T_1B < 0$, $A < B < C$

$$p = p_1\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}, \quad p_1^2 = \frac{2T_1C - G^2}{A(C-A)}, \quad dt = -\frac{1}{n}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}},$$

$$q = q_1\sin\varphi, \quad q_1^2 = \frac{G^2 - 2T_1A}{B(B-A)}, \quad n^2 = \frac{B-A}{ABC}(2T_1C - G^2),$$

$$r = r_1\cos\varphi, \quad r_1^2 = \frac{G^2 - 2T_1A}{C(C-A)}, \quad \varkappa^2 = \frac{C-B}{B-A}\cdot\frac{G^2-2T_1A}{2T_1C-G^2},$$

$$\varpi = \varpi_1\sqrt{1-g^2\sin^2\varphi}, \quad du = h\,dt - \frac{f\,d\varphi}{(1-g^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}, \quad h = 2T_1 : G,$$

$$\varpi_1^2 = \frac{(G^2-2T_1A)(2T_1C-G^2)}{CAG^2}, \quad f^2 = \frac{CA}{B(B-A)}\cdot\frac{(G^2-2T_1B)^2}{G^2(2T_1C-G^2)}, \quad g^2 = \frac{G^2}{B}\cdot\frac{C-B}{2T_1C-G^2}.$$

In dem Specialfalle $B = C$, d. h. wenn das Centralellipsoid ein Rotationsellipsoid um die Axe α ist:

$$\varkappa = 0, \quad n\,dt = d\varphi,$$

$$g = 0, \quad d\mu = h\,dt - f\,d\varphi = (h - fn)\,dt,$$

$$p_1^2 = \frac{2T_1B - G^2}{A(B-A)}, \quad q_1^2 = r_1^2 = \frac{G^2 - 2T_1A}{B(B-A)}, \quad \varpi_1^2 = \frac{(G^2-2T_1A)(2T_1B-G^2)}{ABG^2}.$$

II. $G^2 - 2T_1B > 0$. Dieser Fall reducirt sich auf I., indem man die Bezeichnung ändert, d. h. das kleinste Hauptträgheitsmoment mit C bezeichnet, sodass $A > B > C$ vorausgesetzt wird.

III. $G^2 - 2T_1B = 0$.

$$p = p_1\cos p, \quad p_1^2 = h^2\frac{B(C-B)}{A(C-A)}, \quad du = h\,dt, \quad \varpi = \frac{2n}{e^{nt} + e^{-nt}},$$

$$q = q_1\sin\varphi, \quad q_1 = h \quad\quad n\,dt = \frac{d\varphi}{\cos\varphi}.$$

$$r = r_1\cos\varphi, \quad r_1^2 = h\frac{B(B-A)}{C(C-A)},$$

n) Es bleibt nun noch der letzte Theil unserer Aufgabe übrig, die Bestimmung der Lage des beweglichen Systems gegen das feste Coordinatensystem der x, y, z zur Zeit t. Dies kann geschehen, indem wir die Cosinusse a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' der Richtungswinkel der Hauptaxen des Centralellipsoids oder indem wir die Euler'schen Winkel φ, ψ, ϑ (s. B. I, S. 278) als Functionen der Zeit darstellen. Wir wählen die constante Richtung der Axe des Paares G zur z-Axe, also die xy-Ebene parallel der invariabelen Ebene. Dann erhalten wir, da die Richtungscosinusse c, c', c'' dieser Axe gegen die beweglichen Hauptaxen die Werthe haben:

$$c = \sin\varphi\sin\vartheta, \quad c' = \cos\varphi\sin\vartheta, \quad c'' = \cos\vartheta$$

und Ap, Bq, Cr die Componenten von G sind:

$$Ap = G\sin\varphi\sin\vartheta, \quad Bq = G\cos\varphi\sin\vartheta, \quad Cr = G\cos\vartheta,$$

sodass also sogleich angegeben werden kann:

$$\cos\vartheta = \frac{Cr}{G}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{Ap}{Bq}.$$

Um ψ zu finden, geben die beiden ersten der drei Gleichungen am Ende von B. I, S. 279

$$p\sin\varphi + q\cos\varphi = \sin\vartheta\,\frac{d\psi}{dt}$$

und folglich mit Rücksicht auf die vorstehenden Gleichungen, wenn man mit $\sin\vartheta$ beiderseits multiplicirt:

$$G\,(Ap^2 + Bq^2) = (G^2 - C^2r^2)\,\frac{d\psi}{dt},$$

oder mit Hülfe der Gleichung $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T_1$

$$d\psi = \frac{G\,(2T_1 - Cr^2)}{G^2 - C^2r^2}\,dt.$$

Es ist $2T_1 - Cr^2 = Ap^2 + Bq^2$ stets positiv, ebenso $G^2 - C^2r^2 = A^2p^2 + B^2q^2$; mithin wächst ψ mit t gleichzeitig. Dies heisst soviel, als die Knotenlinie der beweglichen Hauptebene $(\alpha\beta)$ des Centralellipsoids mit der invariabelen Ebene dreht sich fortwährend in demselben Sinne um die Axe des Paares G. Nach Substitution des Werthes von r^2 aus e), wodurch

$$\frac{2T_1 - Cr^2}{G^2 - C^2r^2} = \frac{(A-C)(B-C)\,2T_1 - ABC\,(\omega^2 - \nu^2)}{(A-C)(B-C)\,G^2 - ABC^2\,(\omega^2 - \nu^2)} = \frac{H - \omega^2}{C\,(J - \omega^2)},$$

wird, wenn man abkürzend

$$(A-C)(B-C)\,h - ABC\cdot\nu^2 = ABC\cdot H,$$
$$(A-C)(B-C)\,G^2 - ABC^2\cdot\nu^2 = ABC\cdot J$$

setzt, kommt:

$$d\psi = \frac{G}{C}\cdot\frac{H-\omega^2}{J-\omega^2}\,dt = \frac{G}{C}\cdot\frac{H-\omega^2}{J-\omega^2}\cdot\frac{\omega\,d\omega}{\sqrt{(\omega^2-\lambda^2)(\mu^2-\omega^2)(\omega^2-\nu^2)}},$$

wodurch ψ mit Hülfe eines elliptischen Integrales erster und eines solchen dritter Gattung dargestellt werden kann.

o) Den speciellen Fall $B = A$ kann man leicht direct behandeln. Die Euler'schen Gleichungen werden hierfür, wenn man $(A-C):A = (A-C):B = \mu$ setzt:

$$\frac{dp}{dt} - \mu qr = 0, \quad \frac{dq}{dt} + \mu rp = 0, \quad \frac{dr}{dt} = 0.$$

Es bleibt also die Componente r der Winkelgeschwindigkeit in Bezug auf die Rotationsaxe γ des Centralellipsoids constant: $r = r_0$. Aus den ersten beiden Gleichungen erhält man $p\,\frac{dp}{dt} + q\,\frac{dq}{dt} = 0$ und mithin $p^2 + q^2 = u_0^2$, wo u_0 eine weitere Constante bezeichnet, nämlich die Winkelgeschwindigkeit um die Projection der Momentanaxe auf die Ebene des Aequators des Centralellipsoids. Demnach ist die Winkelgeschwindigkeit ω selbst constant, $\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = u_0^2 + r_0^2$. Mit den Axen α, β bildet die Momentanaxe veränderliche Winkel, ihr Winkel mit γ aber ist constant und sein Cosinus $r_0 : \omega$. Demnach ist der Kegel der Momentanaxen im System ein gerader Kegel um die Axe γ und die Polodie ein Kreis; in Folge dessen behält der Semidiameter l des Centralellipsoids, welcher in die Momentanaxe fällt, constante Länge und ist die Herpolodie gleichfalls ein Kreis

in der invariabelen Ebene um den Fusspunkt P der Axe des Paares G mit einem Radius gleich der Projection von l auf diese Ebene; der Kegel der Momentanaxen im Raume ist mithin ebenfalls ein gerader Kreiskegel um die Axe von G. Da beide Kegel sich berühren, so folgt, dass die Momentanaxe fortwährend in die Ebene der Axe γ und der Axe des Paares G fällt.

Differentiirt man die erste Euler'sche Gleichung und eliminirt $\frac{dq}{dt}$ mit Hülfe der zweiten, so kommt:

$$\frac{d^2p}{dt^2} + \mu^2 r_0^2 p = 0, \quad \text{wozu } q = \frac{1}{\mu r_0} \frac{dp}{dt}.$$

Demnach werden

$$p = a \cos \mu r_0 t + b \sin \mu r_0 t, \quad q = -a \sin \mu r_0 t + b \cos \mu r_0 t.$$

Die Constanten werden durch die Anfangswerthe p_0, q_0 von p, q bestimmt und wenn ε den Winkel bezeichnet, den die Axe u_0 für $t = 0$ mit der Axe β bildet, so ist $p_0 = u_0 \sin \varepsilon$, $q_0 = u_0 \cos \varepsilon$. Daher wird $a = p_0 = u_0 \sin \varepsilon$, $b = q_0 = u_0 \cos \varepsilon$ und folglich:

$$p = u_0 \sin (\mu r_0 t + \varepsilon), \quad q = u_0 \cos (\mu r_0 t + \varepsilon).$$

Weiter hat man:

$$\cos \vartheta = \frac{Cn}{G}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{p}{q} = \operatorname{tg} (\mu r_0 t + \varepsilon), \quad d\psi = \frac{G(2T_1 - Cr_0^2)}{G^2 - C^2 r_0^2} dt.$$

Hieraus ergibt sich, wenn man den Anfangswerth von φ mit φ_0 bezeichnet, $\varphi = \varphi_0 + \mu r_0 t$, sowie $\psi = \frac{G(h - Cr_0^2)}{G^2 - C^2 r_0^2} t + \psi_0$. Es bewegt sich mithin die Knotenlinie des Aequators und der invariabelen Ebene in letzterer mit constanter Winkelgeschwindigkeit und entfernt sich ein beliebiger Radius des Aequators von dieser Knotenlinie gleichförmig. Die Neigung der Aequatorebene gegen die invariabele Ebene bleibt constant.

Von Schriften, welche für die Entwickelung des Problems der Rotation ohne Einfluss von continuirlichen Kräften von Bedeutung sind, führen wir folgende an:

Euler, L., *Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable. Mém. de l'Acad. de Berlin* 1758, pp. 154—193 (1765 gedruckt). — Desgl. eine Abhandlung, ebendas. 1760. — *Theoria motus corporum solidorum.* Rostock 1865.

Cayley, *Reproduction of Euler's Memoir of* 1758 *on the rotation of a solid body. Quarterly Journal of pure and appl. Mathem.* Vol. IX (1868), pp. 361—373. — *On the geometrical representation of the motion of a solid body. Cambridge and Dublin mathem. Journal*, Vol. X (1846), pp. 164—167. — *On the rotation of a solid body round a fixed point.* Ibid. pp. 167—173 und 264—274.

Poinsot, *Théorie de nouvelle de la rotation des corps* 1834 u. 1851. S. S. 426.

MacCullagh. S. S. 427 woselbst sämmtliche Arbeiten dieses Autors über die Rotation angeführt sind.

Rueb, A. S., Rotterdamens., *Specimen inaugurale de motu gyratorio corporis rigidi nulla vi acceleratice sollicitati.* Trajecti ad Rhenum 1834. Erste Darstellung der Coefficienten a, b, c, ... als Functionen der Zeit.

Legendre, *Traité des fonctions elliptiques.* Paris 1825—28, T. I, p. 366—410.

Jacobi, *Sur la rotation d'un corps, lettre adressée à l'Acad. des Sciences.*

Crelle's Journ. B. 39 (1850), S. 239—350. Die Abhandlung stammt aus dem J. 1849.

Sylvester, *On the motion of a rigid body acted on by no external forces. Philosoph. Transact.* Vol. 156 (1866), pp. 757—779.

Weierstrass' Methode ist im Auszuge mitgetheilt von Natani im Artikel „Rotation" in Hoffmann's mathem. Wörterbuch.

Schellbach, die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen. Berlin 1864, S. 404—440.

Brill, *Sul problema della rotazione dei corpi. Cremona, Annali di matem. pura ed appl.* Serie II, T. III (1869), p. 33.

Chelini, *Determinazione analitica della rotazione de' corpi liberi secondo i concetti del Signor Poinsot. Memorie dell' Accad. di Bologna*, T. X (1859), pp. 583—620. Dieser Arbeit folgt neben der Abhandlung von Poinsot vorzugsweise unsere Darstellung des Problems der Rotation.

Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik. Leipzig, Teubner 1876. S. 62—77.

Greenhill, *Solution of the equations of motion of a rigid body moveable about a fixed point under the action of no forces. Quarterly Journ. of pure and appl. Mathem.* Vol. XIV (1877), p. 182. Im Anschluss an Kirchhoff's Vorlesungen. — *Solution of Euler's equations of motion by means of elliptic functions.* Ibid. pp. 265—271.

Siacci, *Della rotazione dei corpi liberi. Memoria I*ª *e II*ᵈᵃ. Napoli 1877. (*Mem. della Società dei XL,* Serie III, T. IV.)

Hoppe, Ueber die freie Bewegung eines Körpers ohne Einwirkung eines Kräftepaars. Grunert-Hoppe, Archiv für Mathem. und Physik B. 64 (1879), S. 363—372.

Bour, *Cours de mécanique et machines.* Paris 1865—74. Fasc. III, p. 147—166.

Routh, *An elementary treatise on the Dynamics of a system of rigid bodies.* 3th edit. London 1877, p. 404—443.

Battaglini, *Trattato elementare sulla meccanica razionale.* Napoli 1873. Vol. II, p. 317—354.

---

§. 7. **Freie Bewegung eines unveränderlichen schweren Systems.** Wenn Kräfte das System afficiren, welche einer Einzelkraft fortwährend äquivalent sind, die durch den Massenmittelpunkt hindurchgeht, so bestimmt diese die Bewegung des Massenmittelpunktes und damit die Translationsbewegung des Systems, hat aber keinen Einfluss auf die Rotation desselben um eine durch diesen Punkt gehende Axe. Das Centralellipsoid rollt zugleich auf der invariabelen Ebene, wie bei dem Falle, dass gar keine continuirlichen Kräfte wirken. Ist das System z. B. schwer und wird demselben ein Anfangsgeschwindigkeitszustand ertheilt, indem es z. B. einen Stoss erhält, so beschreibt der Massenmittelpunkt eine Parabel, welche die Richtung des Stosses zur Tangente hat und dreht sich nach den Sätzen des §. 6 um diesen Massenmittelpunkt. Erfolgt der Stoss z. B. in einer Hauptebene des Massenmittelpunktes, so ist das Paar G der Momentankräfte senkrecht zu der dritten, zu dieser Hauptebene senkrechten Hauptaxe und dreht sich das System fortwährend um diese. Ist es eine homogene Kugel, so ist jede Ebene des Massenmittelpunktes Hauptebene und dreht sich die Kugel fortwährend um den Durchmesser senkrecht zu der Ebene des Massenmittelpunktes, welche

die Stossrichtung enthält. Anziehungen der Kugel durch andere Massen ändern nichts an dieser Bewegung, da sie immer einer Einzelkraft äquivalent sind, welche durch den Massenmittelpunkt geht. Ist das System eine schwere Linie (dünner Stab), so dreht sie sich um ihren Massenmittelpunkt und bleibt dabei stets in einer durch diesen Punkt gehenden Ebene. Wird das schwere System von einem momentanen Stosspaare afficirt, so sinkt der Massenmittelpunkt in einer Verticalen und dreht sich das System um ihn um, wie in §. 6.

§. 8. **Ein unveränderliches System, dessen Centralellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, bewegt sich unter Einwirkung eines continuirlichen Kräftepaares vom Axenmomente $G^{(1)}$; man soll die Bewegung desselben um den Massenmittelpunkt S bestimmen.**

1. Es sei (Fig. 124) SC die Rotationsaxe des Centralellipsoids, C das Trägheitsmoment um sie und $A = B$ das gemeinschaftliche Trägheitsmoment um alle

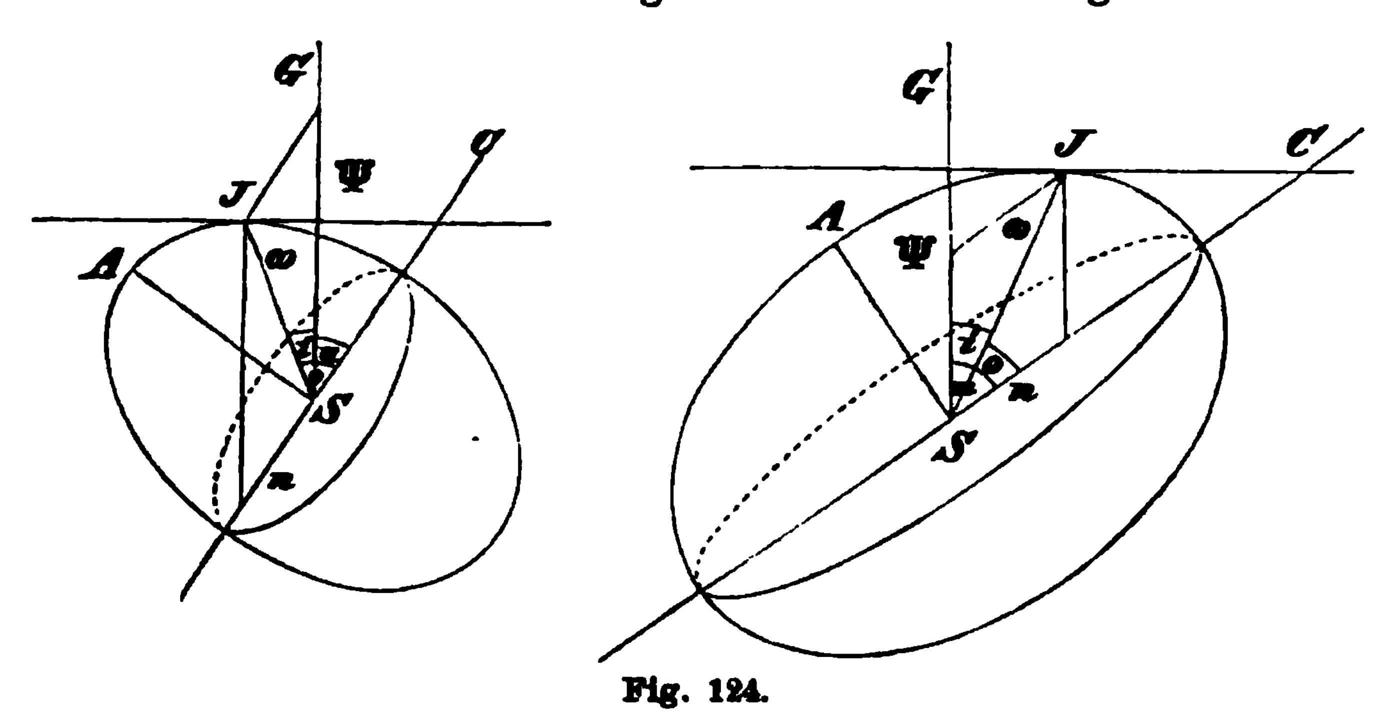


Fig. 124.

zu SC senkrechten, die Aequatorebene erfüllende Axen; es sei ferner SG die Axe des Axenmomentes G der Momentankräfte zur Zeit t und werde senkrecht zu ihr die Tangentenebene an das Ellipsoid gelegt, welche im Punkte J berührt und die Momentanaxe SJ bestimmt. Da die Normale des Ellipsoids in J parallel SG ist und die Rotationsaxe SC schneidet, so fallen SC, SG, SJ in eine Ebene. Ist das Ellipsoid ein Sphäroid (abgeplattetes Rotationsellipsoid), so fällt SG zwischen SC und SJ und ist $C > A$; ist es ein verlängertes, so liegt SJ zwischen SC und SG und ist $C < A$. Bezeichnet i den Winkel (SG, SJ), u den Winkel (SG, SC) und o den Winkel (SC, SJ), so wird für das Sphäroid $o = u + i$, für das verlängerte Ellipsoid $o = u - i$; man kann aber $o = u - i$ für beide Fälle gelten lassen, indem man i als negativ ansieht im Falle des Sphäroids.

Das Trägheitsmoment H um die Momentanaxe SJ ist $H = A \sin^2 o + C \cos^2 o$; nach der Theorie der Momentankräfte ist, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit des Systems bedeutet, die Componente von G um die Momentanaxe $\omega H = G \cos i$ und sind ω und G von gleichem Zeichen, da i stets $< \frac{1}{2}\pi$ ist. Zerlegt man die Winkelgeschwindigkeit in die Componenten $\omega \cos o$ und $\omega \sin o$ um die Hauptaxen SC und SA und ebenso das Axenmoment G in die Componenten $G \cos u$ und $G \sin u$ nach denselben Axen, so hat man nach Cap. I, §. 9, S. 369

$$G \cos u = C\omega \cos o, \quad G \sin u = A\omega \sin o,$$

aus welchen Gleichungen man weiter zieht

$$C \operatorname{tg} u = A \operatorname{tg} o, \quad G = \omega (A^2 \sin^2 o + C^2 \cos^2 o)^{\frac{1}{2}}, \quad \omega = G\left(\frac{\sin^2 u}{A^2} + \frac{\cos^2 u}{C^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Da die Elementarbewegung des Systems durch ω und o oder auch durch G und u bestimmt ist, so sind von den sechs Grössen G, ω, H, u, i, o nur zwei von einander unabhängig; daher bestehen zwischen ihnen vier von einander unabhängige Gleichungen.

2. Wirken keine continuirlichen Kräfte, so bleibt G geometrisch constant und behält die Tangentenebene des Ellipsoids constanten Abstand von S. Daher liegen alle Punkte J, welche im Laufe der Bewegung Pole werden, auf einem Parallelkreise, d. h. die Polodie ist ein Parallelkreis und der Polodienkegel ein Rotationskegel um die Axe SC. Ebenso ist, weil SJ constant bleibt, die Herpolodie ein Kreis und der Herpolodienkegel ein gerader Kegel um die invariabele Axe SG als Rotationsaxe (Fig. 125). Während der Polodienkegel auf dem Herpolodienkegel rollt, liegen SC, SJ, SG stets in einer Ebene. Die Winkel-

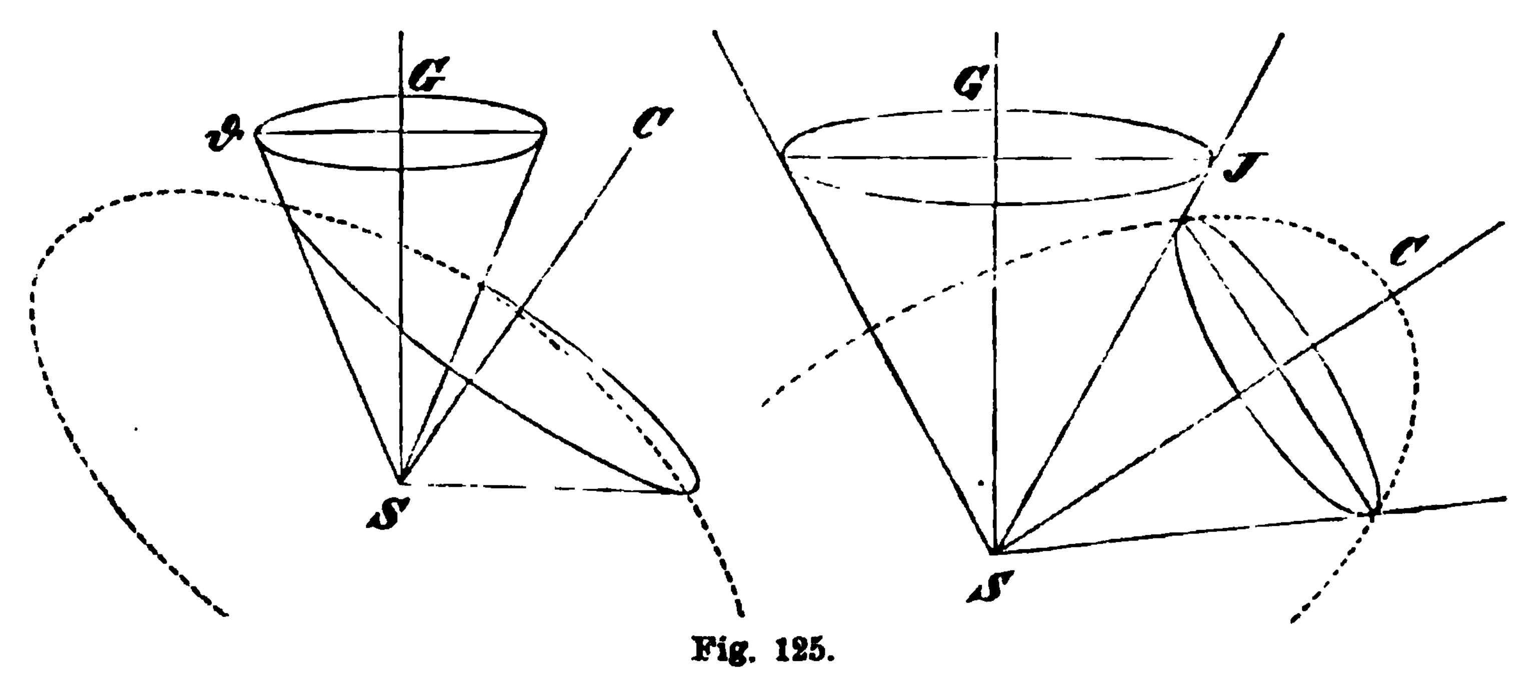


Fig. 125.

geschwindigkeit ω, welche vermöge der constanten Beschaffenheit von SJ constant bleibt, kann in zwei Componenten n, Ψ um SC und SG zerlegt werden (Fig. 124). Dieselben sind mit ω durch die Doppelproportion verbunden:

$$\frac{n}{\sin i} = \frac{\Psi}{\sin o} = \frac{\omega}{\sin u}, \quad i = u - o.$$

Indem man diese Componenten die Winkelgeschwindigkeit ω vertreten lässt, substituirt man dem Rollen des Kegels SJ auf dem Kegel SG als äquivalent die Rotation des Systems um die Axe SC mit der Winkelgeschwindigkeit n in Verbindung mit der Rotation der Ebene CSJ um die feste Axe SG des Raumes mit der Winkelgeschwindigkeit Ψ. Beide Componenten sind constant.

Durch die Componente Ψ wird die Axe SC um SG herumgeführt. Denkt man sich die invariabele Ebene durch S gelegt, so schneidet die Aequatorebene des Systems sie in einer Geraden SK, der Knotenlinie der Bewegung und diese Knotenlinie schreitet auf der invariabelen Ebene fort. Mit Rücksicht hierauf nennt man die Componente Ψ die **Winkelgeschwindigkeit der Präcession** oder auch kurz die **Präcession** des Systems oder die Präcession der Knotenlinie.

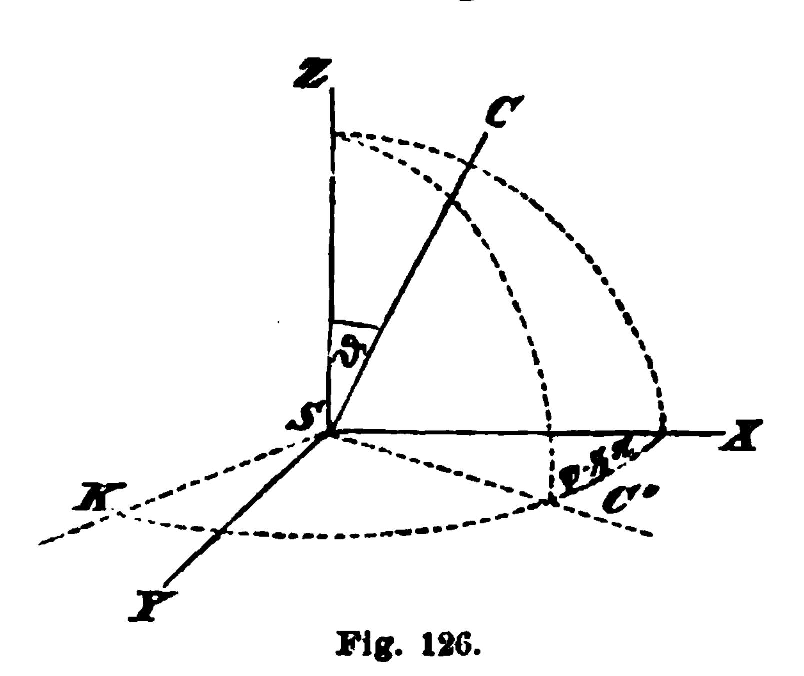


Fig. 126.

Die Lage der Systemaxe SC gegen die invariabele Axe SG, die wir als eine Axe der z ansehen wollen (Fig. 126), welcher wir in der invariabelen Ebene des Punktes S irgend zwei andere zu einander rechtwinklige

Axen als Axen der x und y hinzufügen, kann bestimmt werden durch den Winkel ϑ, welchen SC mit der z-Axe und den Winkel $(SC', x) = \psi - \frac{1}{2}\pi$, welchen die Projection SC' von SC auf die xy-Ebene mit der x-Axe bildet, wenn man mit ψ den Winkel bezeichnet, den die Knotenlinie SK mit derselben Axe bildet. Die Präcession wird dann $\Psi = \frac{d\psi}{dt}$. Der Winkel ϑ ist hier constant gleich u. Im allgemeineren Falle, in welchem der feste Kegel kein Rotationskegel ist und die Axe SG nicht mit einer festen Axe z des Raumes zusammenfallen wird, ist derselbe veränderlich und nennt man die Winkelgeschwindigkeit $\Theta = \frac{d\vartheta}{dt}$, mit welcher SC sich um die Knotenlinie SE umdreht, die Winkelgeschwindigkeit der Nutation oder auch die Nutation der Axe SC gegen die feste Axe SZ. In unserem Falle ist die Nutation gleich Null.

Aus den Gleichungen

$$G \cos u = C\omega \cos o, \qquad \Psi = \omega \frac{\sin o}{\sin u},$$
$$G \sin u = A\omega \sin o,$$

$$n = \omega \frac{\sin i}{\sin u} = \omega \frac{\sin(u - o)}{\sin u} = \omega \cos o - \frac{\omega \cos u \sin o}{\sin u} = \omega \cos o - \Psi \cos u$$

ergibt sich

$$G = A\omega \frac{\sin o}{\sin u} = A\Psi, \quad Cn = C\omega \cos o - C\Psi \cos u = (G - C\Psi)\cos u = (A - C)\Psi \cos u.$$

Aus $G = A\Psi$ folgt, dass die Präcession gleiches Zeichen mit G, also auch mit ω hat, aus $n = \omega \frac{\sin i}{\sin u}$, dass n mit i das Zeichen wechselt, also negativ wird für das Sphäroid.

3. Ist das System zur Zeit t der Einwirkung des continuirlichen Paares vom Axenmomente $G^{(1)}$ unterworfen, so fügt dieses dem Axenmomente G der Momentankräfte das Elementaraxenmoment $GG' = G^{(1)}dt$ hinzu (Fig. 127), welches sich mit G zu dem Axenmomente G' der Momentankräfte für die Zeit $t + dt$ geometrisch verbindet. Indem man senkrecht zur Axe von G' eine Tangentenebene an das Centralellipsoid legt, findet man den dieser Zeit entsprechenden Pol J' und die zugehörige Momentanaxe SJ'. Dieselbe fällt in den Meridian CSG' des Ellipsoids, welcher SG' enthält. Je nach dem Gesetze, nach welchem $G^{(1)}$ geometrisch variirt, kann durch Fortsetzung dieser Construction die Curve (J), der Kegel (SJ), sowie der feste Kegel, auf welchem dieser rollt, die Winkelgeschwindigkeit ω, überhaupt die ganze Bewegung infinitesimaliter bestimmt werden.

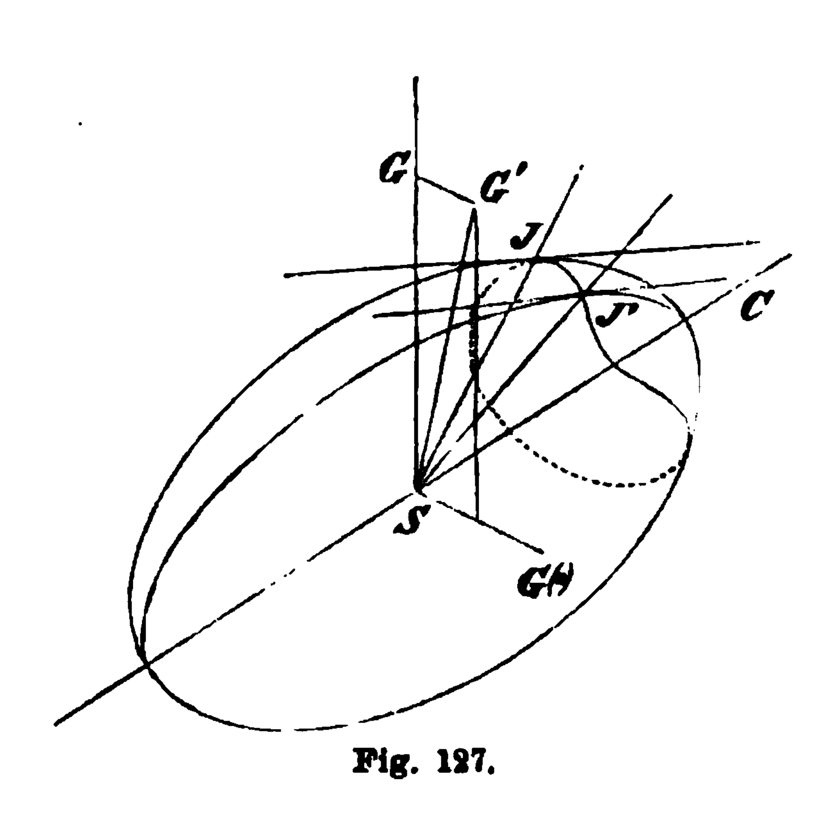


Fig. 127.

Für die analytische Behandlung empfiehlt es sich in unserem Falle, wo $A = B$ ist, nicht die Euler'schen Gleichungen zu gebrauchen, sondern drei andere, deren Benutzung zuerst Resal (*Cinématique pure* p. 349) gezeigt hat. Es seien Sx,

Sy, Sz (Fig. 128) drei feste rechtwinklige Coordinatenaxen, $S\xi$, $S\eta$, $S\zeta$ aber drei andere, dem System angehörige und mit ihm bewegliche Axen, welche wir folgendermassen wählen. Zur Axe $S\xi$ nehmen wir die Rotationsaxe SC des Centralellipsoids, zur Axe $S\eta$ die Knotenlinie SK, in welcher die Aequatorebene desselben die feste xy-Ebene schneidet, zur Axe $S\zeta$ aber die zu beiden senkrechte Projection der Axe SC auf die Aequatorebene. Diese drei Axen sind Hauptaxen; die erste bleibt während der Bewegung, aber die beiden letzteren wechseln von Moment zu Moment. Der Winkel, welchen die Axe $S\xi$ mit der festen z-Axe bildet, sei ϑ und folglich $\Theta = \frac{d\vartheta}{dt}$ die Nutation von SC gegen die z-Axe, der Winkel KSX sei ψ und also $\psi - \frac{1}{2}\pi$ der Winkel $C'SX$, welchen die Ebene zCC' mit der zx-Ebene bildet, sodass $\Psi = \frac{d\psi}{dt}$ die Präcession der Knotenlinie SK darstellt. Wir zerlegen nun zunächst die Winkelgeschwindigkeit ω um die Momentanaxe SJ in drei Componenten um die Axen SC, Sz und SK. Die Componente um SC sei n, die um die z-Axe wird Ψ und die um die Knotenlinie SK wird Θ sein. Wir zerlegen hierauf weiter Ψ in zwei Componenten $\Psi \cos\vartheta$ und $\Psi \sin\vartheta$ um SC und $S\zeta$. Hierdurch erhalten wir überhaupt als Componenten von ω um die drei beweglichen Axen SC, SK, $S\zeta$:

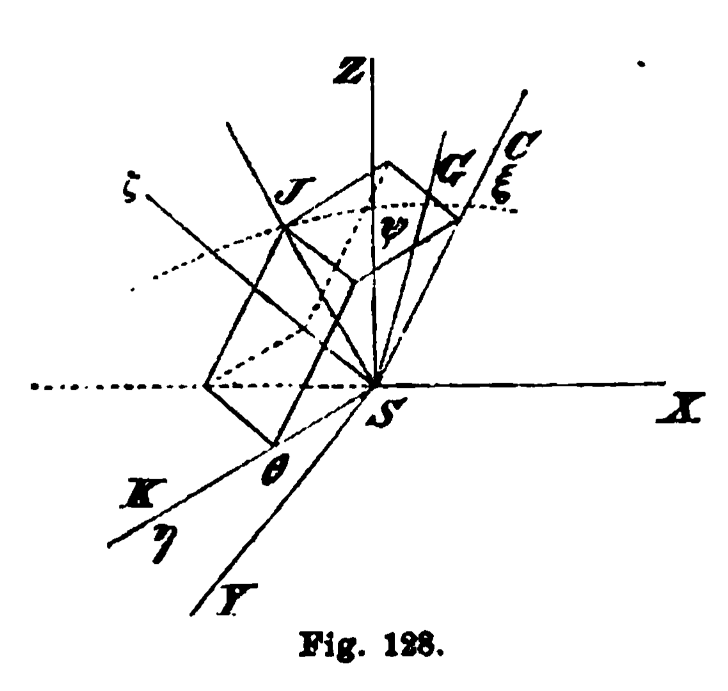


Fig. 128.

$$n + \Psi \cos\vartheta \text{ um } SC, \quad \Theta \text{ um } SK, \quad \Psi \sin\vartheta \text{ um } S\zeta.$$

Da diese drei Axen Hauptaxen sind, so werden die Componenten G_1, G_2, G_3 des Axenmomentes G der Momentankräfte um sie erhalten, indem man die Trägheitsmomente dieser Axen mit den Componenten der Winkelgeschwindigkeit multiplicirt, nämlich

$$G_1 = C(n + \Psi \cos\vartheta), \quad G_2 = A\Theta, \quad G_3 = A\Psi \sin\vartheta.$$

Um nun zu den drei Bewegungsgleichungen zu gelangen, welche an die Stelle der Euler'schen Gleichungen treten sollen, bemerken wir, dass G_1, G_2, G_3 die Coordinaten des Punktes J im System der Axen der ξ, η, ζ darstellen, dass also

$$\frac{dG_1}{dt}, \quad \frac{dG_2}{dt}, \quad \frac{dG_3}{dt}$$

die Componenten der relativen Geschwindigkeit von J, dass aber nach B. I, S. 275

$$\begin{vmatrix} \Theta & \Psi \sin\vartheta \\ G_2 & G_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \Psi \sin\vartheta & \Psi \cos\vartheta \\ G_3 & G_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \Psi \cos\vartheta & \Theta \\ G_1 & G_2 \end{vmatrix}$$

die der Geschwindigkeit des mit J zusammenfallenden Systempunktes in Bezug auf dieselben Axen sind. Die Summen der beiderlei Componenten bezüglich derselben Axe $S\xi$, $S\eta$, $S\zeta$ stellen aber die absoluten Geschwindigkeitscomponenten von J dar, welche, mit den Trägheitsmomenten A, C multiplicirt, den Componenten des Axenmomentes $G^{(1)}$ der continuirlichen Kräfte äquivalent sein müssen, die wir mit $G_\xi^{(1)}$, $G_\eta^{(1)}$, $G_\zeta^{(1)}$ bezeichnen wollen. Hierdurch erhalten wir als die gesuchten drei Bewegungsgleichungen:

$$C\frac{d}{dt}(n + \Psi \cos\vartheta) = G_\xi^{(1)},$$

$$A \frac{d\Theta}{dt} + (C - A)\, \Psi^2 \sin\vartheta \cos\vartheta + Cn\Psi \sin\vartheta = G_\eta^{(1)},$$

$$A \sin\vartheta \frac{d\dot{\Psi}}{dt} + (2A - C)\, \Theta\Psi \cos\vartheta - Cn\Theta = G_\zeta^{(1)}.$$

§. 9. Als speciellen Fall wollen wir die Aufgabe behandeln, das Paar $G^{(1)}$ so zu bestimmen, dass die Präcession Ψ und die Componente n um die Rotationsaxe SC constant und die Nutation Θ Null seien.

1. Wegen der constanten Componente n ist der Kegel der Momentanaxen im System ein Rotationskegel um SC und wegen der verschwindenden Nutation (des constanten Winkels ϑ) beschreibt die Momentanaxe im absoluten Raume gleichfalls einen Rotationskegel um die feste Axe SZ. Die Bewegung ist äquivalent dem Rollen eines Rotationskegels im System auf einen Rotationskegel im absoluten Raume von gegebener Axe und Oeffnung. Dieselbe unterscheidet sich von der Bewegung des §. 8 darin, dass die Axe des Paares G der Momentankräfte nicht mit der festen Axe zusammenfällt, sondern eine Kegelfläche beschreibt.

Aus den Bedingungen $\Theta = 0$, $\frac{d\Psi}{dt} = 0$, $\frac{dn}{dt} = 0$ folgt mit Hülfe der Bewegungsgleichungen §. 8, Nr. 3 $G_\xi^{(1)} = G_\zeta^{(1)} = 0$, sodass

$$G^{(1)} = G_\eta^{(1)} = (C - A)\, \Psi^2 \sin\vartheta \cos\vartheta + Cn\Psi \sin\vartheta$$

wird.

Das continuirliche Kräftepaar $G^{(1)}$ hat daher die Knotenlinie SK zur Axe. Da $\Theta = 0$ ist, so ist ω die Resultante von n und Ψ und fällt die

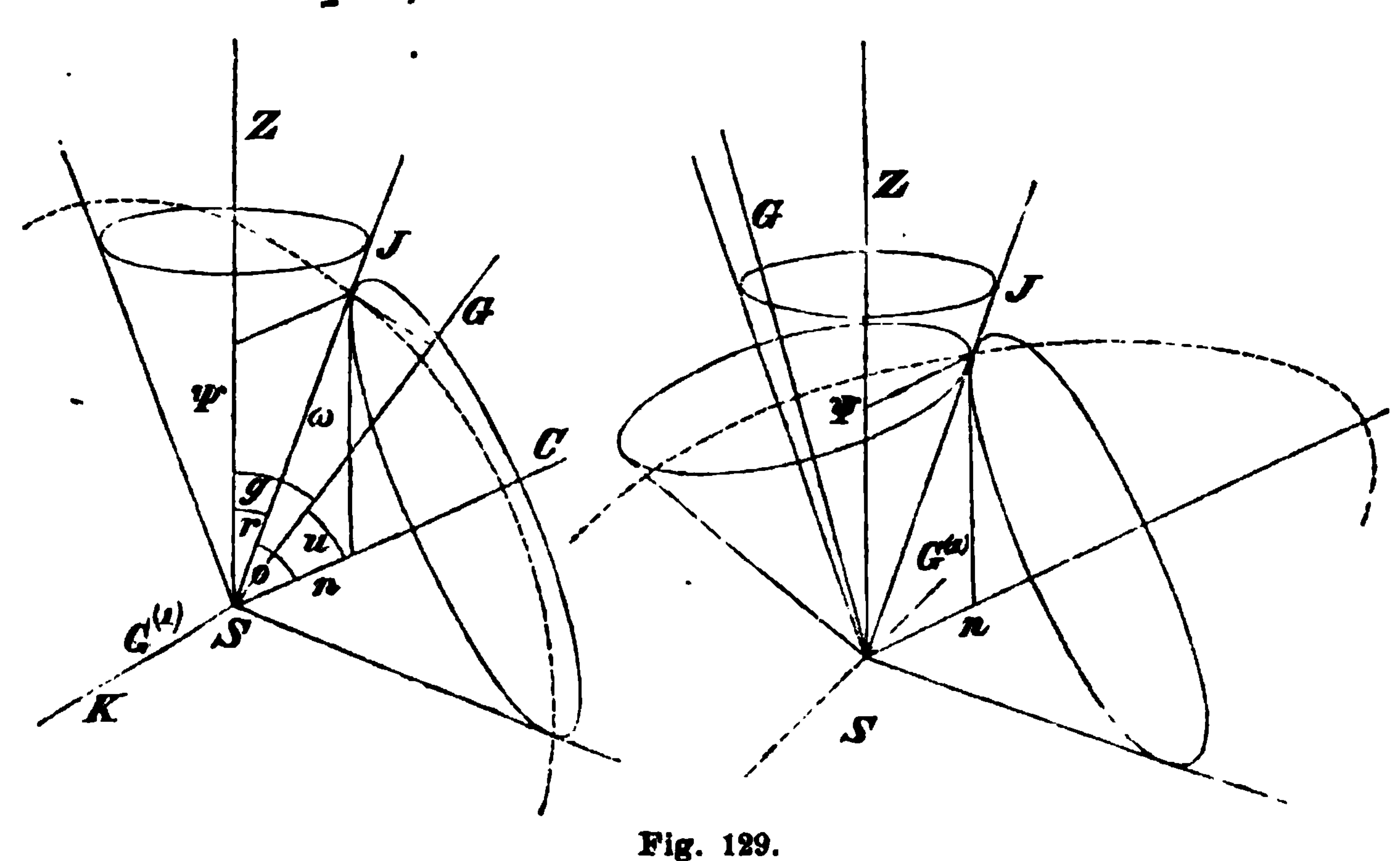


Fig. 129.

Momentanaxe in die Ebene CSZ. Wenn r den Winkel bezeichnet, den SJ mit SZ bildet, so hat man daher (Fig. 129)

$$\omega \sin r = n \sin\vartheta, \quad \omega \cos r = \Psi + n \cos\vartheta.$$

2. Man kann dem Axenmomente $G^{(1)}$ verschiedene Formen geben. Ist insbesondere g der Winkel zwischen SG und SZ, so hat man

$$G \cos(\vartheta - g) = C\omega \cos(\vartheta - r) = C(n + \Psi \cos\vartheta),$$

$$G \sin(\vartheta - g) = A\omega \sin(\vartheta - r) = A\Psi \sin\vartheta,$$

woraus

$$G \sin g = (C - A)\, \Psi \sin\vartheta \cos\vartheta + Cn \sin\vartheta,$$

$$G \cos g = (A \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta)\, \Psi + Cn \cos \vartheta$$

folgen. Die Vergleichung von $G \sin g$ mit dem obigen Ausdrucke für $G^{(1)}$ ergibt

$$G^{(1)} = G\Psi \sin g.$$

Dies Resultat interpretirt sich leicht, wenn man bedenkt, dass $G^{(1)}$ die Geschwindigkeit des Endpunktes von G darstellt. Da G um die Axe z rotirt, so ist die Geschwindigkeit seines Endpunktes gleich dem Abstande $G \sin g$ desselben von der z-Axe multiplicirt mit der Winkelgeschwindigkeit Ψ um diese Axe. Da diese Geschwindigkeit senkrecht zur Ebene CSZ ist, so folgt, dass $G^{(1)}$ in die Knotenlinie SK fällt.

Da $\omega \sin(\vartheta - r) = \Psi \sin \vartheta$ ist, so erhält man weiter durch Elimination von Ψ die Form

$$G^{(1)} = \frac{G\omega \sin g \sin(\vartheta - r)}{\sin \vartheta},$$

welche ursprünglich von Poinsot gegeben wurde (*Théorie des cônes circulaires roulants*. Liouville, Journ. de math. T. XVIII [1853], pp. 41—70). Man gelangt zu derselben direct auf folgende Weise. Vermöge der Eigenschaften des Centralellipsoids bleiben SC, SG, SJ und vermöge der Berührung der beiden Kegel SC, SJ, SZ fortwährend in einer Ebene. Es fallen daher die vier Geraden SC, SJ, SG, SZ in eine Ebene, welche um SZ als feste Axe rotirt, wobei SC gleichfalls einen geraden Kegel um SZ beschreibt. Sind nun SC', SG' die Lagen, welche SC, SG nach Verfluss des Zeitelementes dt annehmen, so haben die Pyramidenräume $SZCC'$ und $SZGG'$ an der Kante SZ denselben unendlichkleinen Winkel und besitzen SC und SG gleiche Winkelgeschwindigkeit um SZ. Zerlegt man also die Winkelgeschwindigkeit ω um die Momentanaxe SJ in zwei Componenten Ψ und n um SZ und SC, so sind diese, wenn wieder r und ϑ die Winkel bezeichnen, welche SJ und SC mit SZ bilden

$$\Psi = \omega \frac{\sin(\vartheta - r)}{\sin}, \qquad n = \omega \frac{\sin r}{\sin \vartheta}.$$

Die letztere ertheilt OC keine Winkelgeschwindigkeit, diese Gerade dreht sich vielmehr mit Ψ allein um SZ. Um die Winkelgeschwindigkeit von SG zu finden, bedenken wir, dass das Axenmoment G weder seine Grösse noch seine Neigung gegen die Axe SC oder SZ ändern darf, wenn die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der Kegel der Momentanaxen auf dem festen Kegel um SZ rollt und die Winkel $\vartheta - r$ und r constant bleiben sollen. Daher muss die unendlichkleine Componente $G^{(1)}dt$ vom Axenmoment, welche sich als die unendlichkleine Linie GG' am Endpunkte des Axenmomentes G mit diesem zu dem geänderten Axenmomente G' verbindet, senkrecht zur Ebene CSZ sein und folglich $G^{(1)}$, von S aus aufgetragen, in die Schnittlinie der Tangentenebene der beiden Kegel längs SJ mit der auf SZ senkrechten Ebene, oder, was dasselbe ist, in die Knotenlinie des Aequators des Centralellipsoids mit dieser Ebene fallen. Dividiren wir daher $GG' = G^{(1)}dt$ durch den Abstand $G \sin g = G \sin(\vartheta - u)$, wo $GSZ = g$, $GSC = u$ ist und durch dt, so erhalten wir die gesuchte Winkelgeschwindigkeit $G^{(1)} : G \sin g$. Daher besteht nach den Bedingungen der Aufgabe die Gleichung:

$$\omega \frac{\sin(\vartheta - r)}{\sin \vartheta} = \frac{G^{(1)}}{G \sin g}, \quad \text{woraus} \quad G^{(1)} = \frac{G\omega \sin g \sin(\vartheta - r)}{\sin \vartheta}.$$

Man ersieht hieraus zugleich, da in diesem Ausdrucke blos das Produkt $G\omega$ vorkommt und ω mit G gleichzeitig den Sinn wechselt, das $Gs^{(1)}$ den Sinn mit ω nicht wechselt.

3. Die Zahl der Specialfälle, welche in Frage kommen können, ist gross. Wir wollen annehmen, es sei $\vartheta < \frac{1}{2}\pi$. Sind ϑ, Ψ, n gegeben (Fig. 129), so liefert das Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten die Momentanaxe SJ, ω und die beiden Kegel. Sobald J bekannt ist, gibt die Tangente in J an den Meridian des Centralellipsoids die Axe SG, indem diese senkrecht zu ihr ist. Das Vorzeichen von Ψ oder der Sinn der Präcession bestimmt die gegenseitige Lage der beiden Kegel, ob sie nämlich sich gleichartig oder entgegengesetzt berühren, d. h. auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der gemeinschaftlichen Tangentenebene liegen. Im letzteren Falle stimmt der Sinn des Rollens mit dem Sinne der Rotation Ψ überein und hat die Knotenlinie, wie man sagt, eine directe Präcession. Fallen die Kegel auf dieselbe Seite der Tangentenebene und ist der bewegliche Kegel stärker gekrümmt als der feste, so tritt das Umgekehrte ein, die Präcession wird retrograd, ist er flacher, als jener, so wird sie direct. Aus dem Sinne der Geschwindigkeit des Endpunktes von G ergibt sich der Sinn des Paares $G^{(1)}$; er wechselt, wenn SG aus dem Winkel ϑ in den Nebenwinkel übertritt.

a) Es sei $\Psi > 0$, $n > 0$. Die Momentanaxe SJ fällt in den Winkel ϑ hinein; die Kegel berühren sich entgegengesetzt. Im Falle des Sphäroids ($C > A$) fällt SG zwischen SJ und SC und ist $G^{(1)}$ positiv; im Falle des verlängerten Ellipsoids ($C < A$) fällt SG in den Nebenwinkel und ist $G^{(1)}$ negativ. Im einen Falle drückt $G^{(1)}$ die Kegel an einander an, im anderen Falle ist die Wirkung von $G^{(1)}$ eine die Kegel aus einander haltende, das Eindringen in den festen Kegel hindernde. Fällt SG in den Nebenwinkel von ϑ, so würde ohne Hinzutritt von $G^{(1)}$ der bewegliche Kegel auf einem Kegel um SG als Axe rollen und dieser Kegel umschliesst den Kegel mit der Axe SZ; soll also der bewegliche Kegel nicht auf jenem, sondern auf dem letzteren rollen, so muss das Paar $G^{(1)}$ ihn an ihn andrücken. Poinsot glaubte, dass $G^{(1)}$ die Kegel stets von einander zu trennen strebe. Bour (*Communication à la Société philomathématique de Paris sur les cônes roulants. L'Institut*, 1865, p. 404) hat diese Ansicht berichtigt.

Fällt SG mit SZ zusammen, so wird $G^{(1)} = 0$; die Bewegung ist die des §. 6. Fällt SJ und folglich auch SG mit SC zusammen, so ist $G^{(1)}$ ebenfalls Null und zugleich $\Psi = 0$. Die Rotation findet permanent um die Hauptaxe SC statt.

b) Es sei $\Psi < 0$, $n > 0$ (Fig. 130). Die Momentanaxe tritt aus dem Winkel ϑ in den Nebenwinkel über. Ist $r < \frac{1}{2}\pi$, so rollt der bewegliche Kegel gleichartig auf dem festen (im Innern), SG fällt gleichfalls ausserhalb des Winkels ϑ; $G^{(1)}$ ist negativ und sucht die Kegel zu trennen. Wird $r = \frac{1}{2}\pi$, so geht der feste Kegel in eine Ebene über, darüber hinaus kehrt er sich um, die Kegel berühren sich ungleichartig, $G^{(1)}$ bleibt negativ. Wird $r = \frac{1}{2}\pi + \vartheta$, so geht der bewegliche Kegel in eine Ebene über und darüber hinaus umgibt er den festen Kegel. $G^{(1)}$ bleibt negativ, wie sehr auch immer r sich π nähern möge, wenn das Centralellipsoid ein verlängertes ist; beim Sphäroid kann $G^{(1)}$ positiv werden und die Kegel an einander pressen.

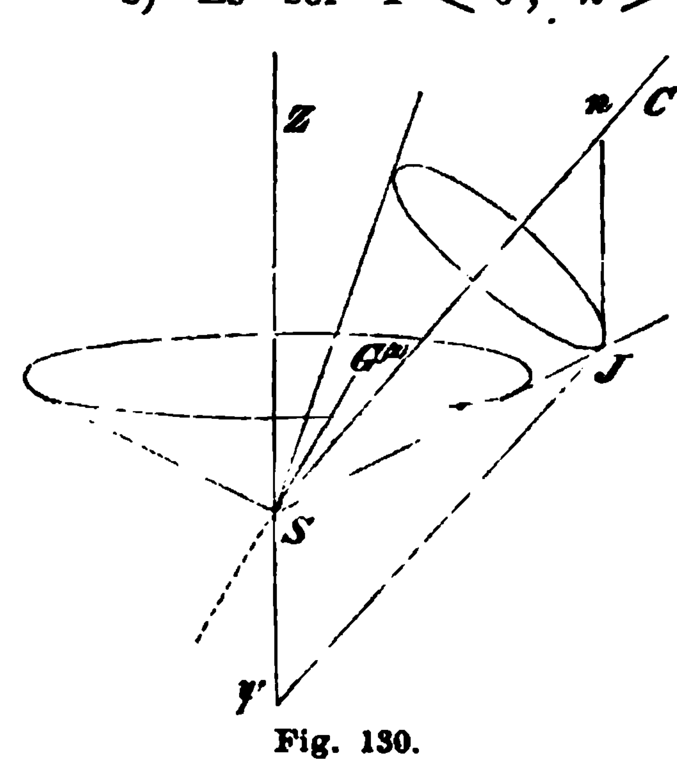


Fig. 130.

c) $n = 0$. Die Momentanaxe fällt mit SZ zusammen und bleibt dieselbe, obgleich sie keine Hauptaxe ist; es wird $r = 0$, $\Psi = \omega$, $G^{(1)} = G\omega \frac{\sin g}{\sin \vartheta}$.

d) $n < 0$. Diese Fälle bedürfen keiner besonderen Untersuchung; sie ergeben sich aus den Fällen $n > 0$ durch Zeichenwechsel von G und Ψ; $G^{(1)}$ behält das Zeichen, wenn Ψ und G beide wechseln.

3. Man kann zu einem Ausdrucke für das Paar $G^{(1)}$ auch auf folgendem Wege gelangen. Es seien o und r die halben Oeffnungen der Kegel JSC und JSZ, wie früher. Beschreibt man um S mit dem Radius 1 eine Kugel, so erhält man auf dieser durch die beiden Kegel zwei Kreise s und σ, von denen der erstere auf dem letzteren rollt. Der Schnittpunkt J der Momentanaxe mit der Kugel rückt im System auf s und im absoluten Raume auf σ fort, indem s auf σ hinrollt. In dem Zeitelemente dt dreht sich nun der bewegliche Kegel um die Summe der Contingenzwinkel $de + d\varepsilon$ beider Kegelflächen um, wenn diese auf verschiedenen Seiten der gemeinschaftlichen Tangentenebene liegen (um die Differenz, wenn sie auf dieselbe Seite fallen, welcher Fall aber in dem der Summe inbegriffen gedacht werden kann, wenn die Vorzeichen der Contingenzwinkel gehörig gewahrt werden), und da dieser Winkel auch ωdt ist, so besteht die Gleichung $\omega dt = de + d\varepsilon$. Sind nun ds und $d\sigma$ die beiden sich deckenden Bogenelemente von s und σ, über welche der Pol J während dt hinrückt und sind ϱ, ϱ' die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte der Kegel senkrecht zu OJ, so werden $de = ds : \varrho'$, $d\varepsilon = d\sigma : \varrho$ und da $ds = d\sigma$ ist, erhält man $\omega dt = d\sigma\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right)$. Hierzu kommt $\varrho = \operatorname{tg} o$, $\varrho' = \operatorname{tg} r$ und hiermit wird:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \omega \frac{\operatorname{tg} o \operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} o + \operatorname{tg} r}.$$

Andererseits aber ertheilt das Paar $G^{(1)}$ dem System um die Knotenlinie SK, in welche es fällt, da diese eine Hauptaxe ist, eine unendlichkleine Winkelgeschwindigkeit ϖdt, welche sich mit ω zu der Winkelgeschwindigkeit ω' um die Momentanaxe SJ' des folgenden Momentes nach dem Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten zusammensetzt, sodass ω' dessen Diagonale wird. Daher ist

$$\varpi dt : \omega = \sin J'SJ : \sin J'SK = d\sigma : 1,$$

sodass $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\varpi}{\omega}$ und folglich:

$$\varpi = \Omega^2 \frac{\operatorname{tg} o \operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} o + \operatorname{tg} r}$$

wird. Dies ist der Ausdruck für die Winkelbeschleunigung ϖ, welche um die Knotenlinie zur Winkelgeschwindigkeit ω um die Momentanaxe hinzutreten muss, damit der bewegliche Kegel auf dem festen Kegel rolle.

Es besteht nun aber das Paar $G^{(1)}$, welches die Bewegung der Kegel auf einander erhält, aus zwei Componenten, dem Paare der Centripetalkräfte und dem Paare, welches von den Kräften der Winkelbeschleunigung herrührt. Ersteres ist die Geschwindigkeit des Endpunktes des Axenmomentes G der Momentankräfte, hat also das Axenmoment $G\omega \sin i$, wenn i den Winkel GSJ bezeichnet und dieses fällt in die Knotenlinie. Wenn dasselbe nun um diese Linie, welche eine Hauptaxe ist, die unendlich kleine Winkelgeschwindigkeit γdt erzeugt, so fügt es dem Paare der Momentankräfte das Elementaraxenmoment $A\gamma dt = G\omega \sin i dt$ hinzu, woraus folgt, dass die Winkelbeschleunigung desselben um die Knoten-

linie $\gamma = \frac{G\omega}{A} \sin i$ ist. Da nun das gesuchte Paar mit seinem Axenmomente in die Knotenlinie fällt und der von den Centripetalkräften herrührende Theil bereits in dieser Linie liegt, so muss auch der Theil, welcher von den Winkelbeschleunigungskräften gegeben wird, in diese Linie fallen. Ist α die Winkelbeschleunigung, welche ihm entspricht, so ist sein Axenmoment $A\alpha$. Es bilden aber γ und α zusammen das obige ϖ, sodass $\varpi = \gamma + \alpha$ ist. Daher hat man

$$\alpha = \omega^2 \frac{\operatorname{tg} o \operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} o + \operatorname{tg} r} - \frac{G\omega \sin i}{A}.$$

Nun ist aber

$$G \cos i = \omega (A \sin^2 o + C \cos^2 o) \quad \text{und} \quad G = \omega (A^2 \sin^2 o + C^2 \cos^2 o)^{\frac{1}{2}}$$

(s. §. 8, Nr. 1), woraus folgt

$$G \sin i = (A - C) \sin o \cos o,$$

sodass nach einer leichten Reduction

$$\alpha = \omega^2 \sin o \cos o \left[\frac{C}{A} - \operatorname{tg} o \operatorname{cotg} (r + o)\right]$$

und also das gesuchte Paar wird:

$$G^{(1)} = A\alpha = \omega^2 \sin o \cos o \,[C - A \operatorname{tg} o \operatorname{cotg} (r + o)].$$

Man kann diese und die Poinsot'sche Form leicht in einander überführen, indem man o, C, A durch ϑ, g und G ausdrückt.

4. Man kann dieselbe Methode anwenden für den Fall, dass die beiden Kegel nicht Kreiskegel, sondern Kegel von beliebigen Basen s, σ sind. Man wird nämlich die beiden sie längs der Momentenaxe osculirenden Kegel, deren Radien ϱ, ϱ' seien, construiren und in der gemeinsamen Tangentenebene auf SJ ein Perpendikel $S\Pi$ errichten, um welches als Axe die Winkelbeschleunigung

$$\varpi = \frac{\omega^2}{\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}}$$

wie früher, sich ergibt. Dieselbe zerfällt wieder in zwei Componenten, von denen die eine, γ, von den Centripetalkräften, die andere, α, von den Winkelbeschleunigungskräften herrührt. γ und α fallen aber nicht in die Gerade $S\Pi$. Vielmehr hat man in dem Centralellipsoid zur Ebene GSJ den conjugirten Diameter zu suchen; um ihn erfolgt γ. Bildet die Axe von γ mit $S\Pi$ den Winkel φ, so folgt $\alpha^2 = \gamma^2 + \varpi^2 - 2\varpi\gamma \cos\varphi$. Das Paar, welches α gibt, ist so zu bestimmen, dass es mit dem Paare $G\omega \sin i$ der Centripetalkräfte zusammen die Winkelbeschleunigung ϖ um $S\Pi$ hervorruft.

5. Man verdankt die Entwickelungen dieses und des vorhergehenden Paragraphen grösstentheils Poinsot und Bour (*Cours de mécanique et machines*, Paris 1865—74, fasc. III, pp. 166—182). Poinsot gründet auf sie seine Theorie der Präcession der Nachtgleichen (*Précession des équinoxes*. Paris 1857). Vgl. B. I, S. 265. Man betrachtet die Erde als ein abgeplattetes Rotationsellipsoid von homogener Beschaffenheit oder aus concentrischen Krusten verschiedener Dichtigkeit gebildet. Jedenfalls muss dieselbe hiernach als ein System von zwei gleichen Hauptträgheitsmomenten gelten. Die Beobachtung zeigt, dass dies Erdsphäroid täglich um seine Rotationsaxe SC sich umdreht, während diese selbst um die Axe SZ der Ekliptik, wenn auch mit sehr geringer Geschwindigkeit, rotirt

und in Folge dessen die Knotenlinie des Erdäquators und der Ekliptik auf dieser langsam fortrückt. Diese Knotenlinie verbindet den Frühlings- und Herbstnachtgleichepunkt mit einander und ihre Drehung um die Axe der Ekliptik heisst die Präcession der Nachtgleichen. Sie ist dem Sinne nach der Erdrotation entgegengesetzt. In Wirklichkeit ist nicht SC die Momentanaxe der Erde, sondern eine andere Linie SJ, die Diagonale eines Parallelograms, welches SC und SZ zu Seitenrichtungen und die beiden Geschwindigkeiten der Rotation um SC und SZ zu Seitenlängen hat. Die Axe SJ beschreibt daher um SC einen Kegel, welcher auf einem Kegel um SZ rollt und zwar liegen wegen des entgegengesetzten Sinnes der Rotation die Kegel auf derselben Seite der Tangentenebene und ist der bewegliche Kegel sehr schmal.

Sind n und Ψ die Winkelgeschwindigkeiten um SC und SZ und ist ω die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe SJ, so ist, wie oben (Fig. 125)

$$n : \omega : \Psi = \sin r : \sin \vartheta : \sin (\vartheta - r)$$

und folgt für $\operatorname{tg} r$ ein sehr kleiner Werth und für $\omega : \Psi$ eine sehr wenig von 1 abweichende Zahl. In Wirklichkeit tritt zu der Präcession noch eine geringe periodische Nutation der Erdaxe, welche hier ausser Acht gelassen ist. Damit die Bewegung der Erde in der angegebenen Weise zu Stande komme, muss ein Paar $G^{(1)} = \omega^2 \sin o \cos o \, (A + B \operatorname{tg} o \operatorname{cotg} \vartheta)$ um die Knotenlinie drehend wirken. Dies Paar rührt von den Attractionen der Sonne und des Mondes her. Würde dasselbe plötzlich aufhören, so würde sich die Bewegung der Erde ändern. Der bewegliche Kegel JOA würde nicht mehr auf dem Kegel um SZ, sondern auf einem Kegel um OG rollen, nämlich um die Axe des resultirenden Paares der Momentankräfte, welche dann eine constante Richtung annähme. Die Projektion der Erdaxe auf die Ebene der Ekliptik und in Folge dessen die zu ihr senkrechte Knotenlinie würde dann nicht mehr eine retrograde Präcession, sondern nur eine kleine Oscillation zeigen. Das Paar $G^{(1)}$ kann dargestellt werden und ergeben sich aus seiner Betrachtung für die Astronomie wichtige Folgerungen. In Bezug auf diese Darstellung vgl. die citirte Schrift von Poinsot. Dieselbe gibt als Einleitung eine sehr lehrreiche synthetische Behandlung einiger hieher gehöriger Einzelprobleme. Ueber die Bewegung der Erde und des Mondes um ihre Massenmittelpunkte vgl. Rough, *Elementary treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. 3th edit.* London 1871, S. 497—522.

§. 10. Als Beispiel für die freie Bewegung eines unveränderlichen Systems im widerstehenden Mittel gehört hieher die Bewegung des Bumerang in der Luft. Näheres hierüber vgl. bei Erdmann, Erklärung der Bahnen des Bumerang (Poggendorff's Annalen B. 137 (1869), S. 1—18) und Stille, Versuche und Rechnungen zur Bestimmung der Bahnen des Bumerang (Ebendas. B. 147 (1872), S. 1—21).

Hieher gehört weiter das Problem der Bewegung der Spitzgeschosse in der Luft. Vgl. Resal, *Traité de Mécanique générale.* Paris 1873—79, T. I, S. 367—376 und S. 386—396.

IV. Capitel.

Probleme der gezwungenen Bewegung des unveränderlichen Systems.

§. 1. Ist ein unveränderliches System Bedingungen unterworfen, welche seine Beweglichkeit beschränken, so kann man dieselben in den meisten Fällen durch Kräfte ersetzen und hierauf dasselbe als ein freies betrachten, auf welches die Methoden von Cap. I—III Anwendung finden. Die einzuführenden Kräfte (Widerstände) treten als Unbekannte auf, welche mit Hilfe der Bedingungen zu ermitteln sind. Sie werden im Allgemeinen mit der Zeit veränderlich sein. Auch kann ein veränderliches System oft durch Einführung von entgegengesetzt gleichen Widerständen und Spannungen in mehrere unveränderliche Systeme aufgelöst werden, welche man einzeln behandeln kann.

Indem man aus den Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Bedingungen und ihrer Differentialgleichungen die Differentialquotienten der Coordinaten eliminirt, erhält man die nöthigen Gleichungen für die Widerstände. Die allgemeinen Principe der Bewegung (Cap. II, §. 13) leisten dabei in vielen Fällen ausgezeichnete Dienste.

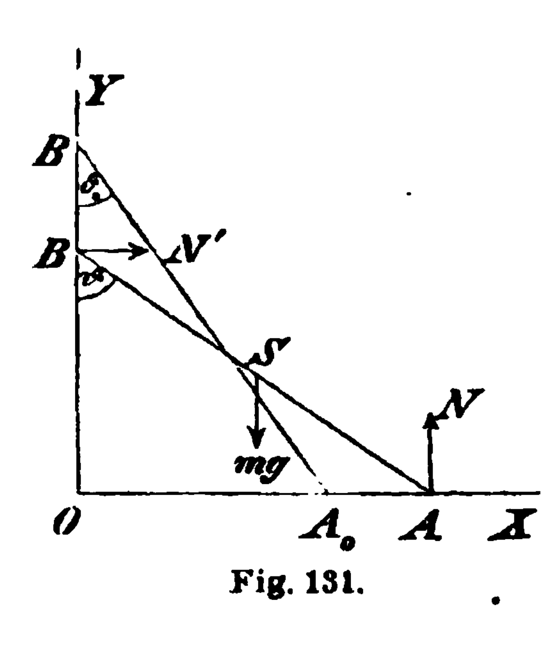


Fig. 131.

§. 2. Eine homogene schwere starre Linie AB von der Länge $2l$ und der Masse m (Fig. 131) berührt mit ihren Enden A, B in einer Verticalebene die horizontale und verticale Gerade OX und OY ohne Reibung. Sie sei zur Zeit $t=0$ unter dem Winkel ϑ_0 gegen die Verticale geneigt und gleite ohne anfängliche Einwirkung von Momentankräften vermöge der Schwere längs OX und OY. Man soll ihre Bewegung bestimmen und insbesondere die Zeit T finden, nach welcher sie auf die Horizontale OX auffällt.

Sind N und N' die Widerstände, welche OX und OY normal zu ihren Richtungen leisten, so sind die Bewegungsgleichungen des ebenen Systems, welches nunmehr frei ist,

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2}=N', \quad m\frac{d^2y_1}{dt^2}=-mg+N, \quad mk^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=Nl\sin\vartheta-N'l\cos\vartheta,$$

wenn x_1, y_1 die Coordinaten des Massenmittelpunktes zur Zeit t sind, ϑ der Winkel, welchen AB zu derselben Zeit mit OY bildet und k der Trägheitsradius für den Massenmittelpunkt S ist. Die Axe OX werde positiv vertical aufwärts und der positive Drehungssinn dem Uhrzeigersinn entgegengesetzt genommen.

Es ist zu allen Zeiten $x_1=l\sin\vartheta$, $y_1=l\cos\vartheta$ und mithin

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=-l\sin\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2+l\cos\vartheta\frac{d^2\vartheta}{dt^2}, \quad \frac{d^2y_1}{dt^2}=-l\cos\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2-l\sin\vartheta\frac{d^2\vartheta}{dt^2}.$$

Multiplicirt man die beiden ersten Bewegungsgleichungen mit $l\cos\vartheta$, $-l\sin\vartheta$ und addirt sie zur dritten, so kommt

$$l \cos \vartheta \frac{d^2 x_1}{dt^2} - l \sin \vartheta \frac{d^2 y_1}{dt^2} + k^2 \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = lg \sin \vartheta,$$

welche Gleichung mit Hilfe der Ausdrücke für $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$ und $\frac{d^2 y_1}{dt^2}$ übergeht in

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} - \frac{g}{l + \frac{k^2}{l}} \sin \vartheta = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} - \frac{g}{a} \sin \vartheta = 0,$$

wenn $l + \frac{k^2}{l} = a$ gesetzt wird. Aehnlich wie B. I, S. 395 erlangt man durch Einführung des halben Winkels als erstes Integral dieser Gleichung

$$\left(\frac{d \cdot \frac{1}{2} \vartheta}{dt}\right)^2 + \frac{g}{a} \cos^2 \tfrac{1}{2} \vartheta = C.$$

Die Constante C bestimmt man mit Hilfe von $\vartheta = \vartheta_0$ für $t = 0$, wofür zugleich, da keine anfänglichen Momentankräfte wirken, die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt}$ Null wird, sodass $C = \frac{g}{a} \cos^2 \frac{1}{2} \vartheta_0$ wird.

Mit dem Herabgleiten der Geraden AB wächst ϑ und ist mithin ϑ_0 der kleinste Werth, den ϑ während der Bewegung annimmt. Daher kann man in der sich ergebenden Gleichung

$$\frac{d \frac{1}{2} \vartheta}{dt} = \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{\cos^2 \tfrac{1}{2} \vartheta_0 - \cos^2 \tfrac{1}{2} \vartheta}$$

$\cos \frac{1}{2} \vartheta = \cos \frac{1}{2} \vartheta_0 \cdot \sin \psi$ setzen, wo ψ eine neue Integrationsvariabele bedeutet. Dies führt zu $-\sin \frac{1}{2} \vartheta \cdot d \cdot \frac{1}{2} \vartheta = \cos \frac{1}{2} \vartheta_0 \cdot \cos \psi \, d\psi$ und $\frac{d \cdot \frac{1}{2} \vartheta}{dt} = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \cos \frac{1}{2} \vartheta_0 \cos \psi$ oder wegen $\sin \frac{1}{2} \vartheta = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{1}{2} \vartheta_0 \cdot \sin^2 \psi}$ zu

$$dt = \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{-d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{1}{2} \vartheta_0 \sin^2 \psi}}.$$

Dem Winkel $\vartheta = \vartheta_0$ entspricht $\psi = \frac{1}{2} \pi$, $t = 0$, daher wird

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\psi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{1}{2} \vartheta_0 \sin^2 \psi}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \left[K - F(\psi, \cos \tfrac{1}{2} \vartheta_0)\right].$$

Dem Werthe $\vartheta = \frac{1}{2} \pi$ entspricht aber $\psi = \psi_0$, $t = T$, wofür $\sin \psi_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} : \cos \frac{1}{2} \vartheta_0$ ist, und mithin ist

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\psi_0}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{1}{2} \vartheta_0 \sin^2 \psi}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \left[K - F(\psi_0, \cos \tfrac{1}{2} \vartheta_0)\right].$$

Aus der Gleichung für t folgt

$$F(\psi_1 \cos \tfrac{1}{2} \vartheta_0) = K - t \sqrt{\frac{g}{a}};$$

daher wird

$$\psi = am \left(K - t \sqrt{\frac{g}{a}}\right),$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \cos \tfrac{1}{2} \vartheta_0 \cos am \left(K - t \sqrt{\frac{g}{a}}\right),$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\vartheta = \cos \tfrac{1}{2}\vartheta_0 \sin am \sqrt{\frac{g}{a}}(T-t), \qquad v_1 = l\frac{d\vartheta}{dt}, \quad \frac{dx_1}{dt} = l\cos\vartheta \frac{d\vartheta}{dt},$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\vartheta = \Delta am \sqrt{\frac{g}{a}}(T-t), \qquad \frac{dy_1}{dt} = -l\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} \text{ u. s. w.}$$

Die Bewegung des Systems um den Massenmittelpunkt ist eine Pendelbewegung von der Pendellänge $a = l + \frac{\varkappa^2}{l}$ (B. I, S. 397), wofür die Anfangsgeschwindigkeit Null und $\alpha = \frac{1}{2}\pi - \vartheta_0$ ist. T ist der vierte Theil der Oscillationsdauer. An einer gewissen Stelle wird AB die Verticale verlassen. Dann ist $N' = 0$ und mithin $\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0$, d. h. $\sin\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \cos\vartheta\,\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$, aus welcher Gleichung man vermöge der Werthe für $\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$ und $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ findet: $\cos\vartheta = \frac{2}{3}\cos\vartheta_0$.

Die Gesammtbewegung ist die elliptische Hypocycloidenbewegung Cardano's (B. I, S. 227). Die Radien der Kreise sind $\varrho = l$, $\varrho' = \frac{1}{2}l$; die Winkelgeschwindigkeit ω und die Wechselgeschwindigkeit u des Momentancentrums ergeben sich aus $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ und $\frac{\omega}{u} = -\frac{1}{l}$.

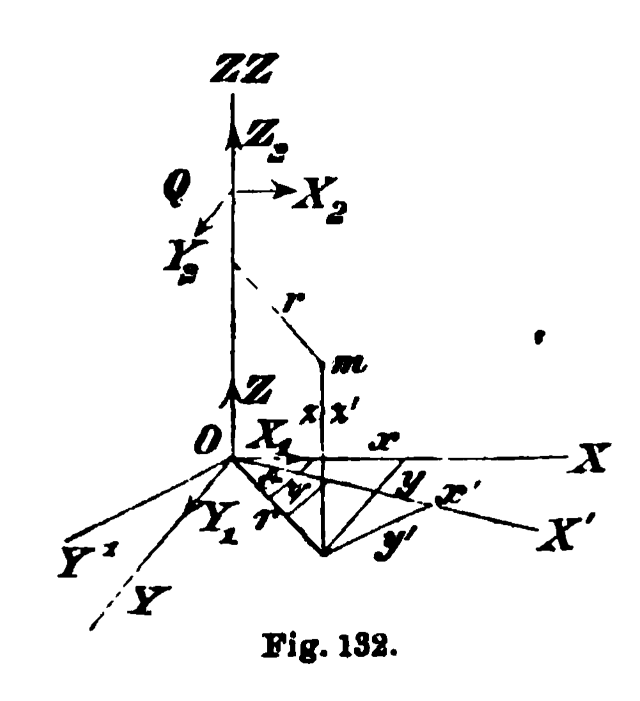


Fig. 132.

Die Aufgabe ist verschiedener Verallgemeinerungen fähig. Es kann ein anfänglicher Momentanstoss angenommen werden, an die Stelle der starren Linie kann ein Rotationscylinder von der Länge $2l$ und dem Radius r des Querschnitts treten, es kann die Reibung an den Wänden berücksichtigt werden u. s. w.

§. 3. **Rotation eines unveränderlichen Systems um eine feste Axe.** Sind R_1, R_2 die Widerstände, welche zwei beliebige Punkte O, Q der festen Axe leisten müssen, damit dieselbe fest bleibe, X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2 ihre Componenten bezüglich eines rechtwinkligen festen Coordinatensystems, dessen Ursprung und z-Axe der Punkt O und die feste Axe OQ sind, so sind die Bewegungsgleichungen des Systems, welche die Aequivalenz der gegebenen Kräfte einschliesslich der Widerstände mit den Kräften $m\varphi$ zur Zeit t darstellen (s. S. 407)

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X + X_1 + X_2$$

$$\Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y + Y_1 + Y_2$$

$$\Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z + Z_1 + Z_2,$$

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma(yZ - zY) - Y_2 h$$

$$\Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma(zX - xZ) + X_2 h$$

$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma(xY - yX)$$

worin $OQ = h$ gesetzt ist. Da die Bewegung des Systems durch die Bewegung von drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten bestimmt ist und die Bewegung von O, Q bereits bekannt ist (ihre Geschwindigkeit und Beschleunigung ist Null), so bedarf es blos noch der Kenntniss der Bewegung eines einzigen dritten, nicht in der Axe liegenden Punktes und muss es möglich sein, die Coordinaten aller Punkte $(x\,y\,z)$ durch seine Coordinaten auszudrücken. Man wählt hierzu irgend einen Punkt in der Entfernung 1 von der z-Axe. Bildet die Ebene dieser Axe, welche den Punkt enthält, die wir als $z'x'$-Ebene eines beweglichen Coordinatensystems ansehen können, das mit dem System der x, y, z den Ursprung und die z-Axe gemein hat zur Zeit t mit der zx-Ebene den Winkel ϑ, so sind 1, ϑ seine Polarcoordinaten, $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$ seine Geschwindigkeit, welche zugleich die Winkelgeschwindigkeit des Systems darstellt und $\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$ seine Tangentialbeschleunigung, welche zugleich die Tangentialcomponente der Winkelbeschleunigung und da eine Neigung der Axe ausgeschlossen ist, die ganze Winkelbeschleunigung des Systems darstellt. Die Lage eines Systempunktes $(x'y'z')$, dessen Coordinaten in Bezug auf das feste Coordinatensystem zur Zeit t gleich x, y, z sind, wird im System durch den Abstand r von der Axe, dessen Neigung ψ gegen die bewegliche Axe der x' und seinen Abstand z' von der $x'y'$-Ebene bestimmt und sind r, ψ, z' von der Zeit unabhängig. Behufs Reduction der Bewegungsgleichungen ist daher:

$$x = r\cos(\vartheta + \psi), \qquad \frac{dx}{dt} = -r\sin(\vartheta+\psi)\frac{d\vartheta}{dt} = -\omega y,$$

$$y = r\sin(\vartheta + \psi), \qquad \frac{dy}{dt} = \quad r\cos(\vartheta+\psi)\frac{d\vartheta}{dt} = \quad \omega x,$$

$$z = z', \qquad \frac{dz}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -y\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 x, \qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = (x^2+y^2)\,\omega = r^2\omega,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -x\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 y, \qquad x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = r^2\frac{d\omega}{dt},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Mit Hülfe dieser Relationen nehmen vermöge der Eigenschaften $Mx_1 = \Sigma mx$, $My_1 = \Sigma my$ des Massenmittelpunktes und wenn $\Sigma mr^2 = M\varkappa^2$ gesetzt wird, die Bewegungsgleichungen die Form an:

$$-My_1\frac{d\omega}{dt} - Mx_1\omega^2 = \Sigma X + X_1 + X_2$$

$$Mx_1\frac{d\omega}{dt} - My_1\omega^2 = \Sigma Y + Y_1 + Y_2$$

$$0 = \Sigma Z + Z_1 + Z_2,$$

$$-\Sigma mxz\cdot\frac{d\omega}{dt} + \Sigma myz\cdot\omega^2 = \Sigma(yZ - zY) - Y_2 h$$

$$-\Sigma myz\cdot\frac{d\omega}{dt} - \Sigma mxz\cdot\omega^2 = \Sigma(zX - xZ) + X_2 h$$

$$M\varkappa^2\cdot\frac{d\omega}{dt} = \Sigma(xY - yX).$$

Von diesen Gleichungen enthält die letzte nichts von den Widerständen R_1, R_2; die fünf übrigen enthalten deren Componenten. Wenn die sechste Gleichung ω und ϑ und in Folge dessen x und y als Functionen der Zeit geliefert hat, geben die fünfte und vierte die Werthe von X_2 und Y_2, hierauf die erste und zweite die von X_1, Y_1 und dann die dritte die Summe $Z_1 + Z_2$, welche in zwei beliebige Summanden zerlegt werden kann, in Wirklichkeit aber nur als eine einzige Kraft auftritt, welche längs OQ angreift.

Die durch die Integration dieser Gleichungen eintretenden Constanten werden mit Hülfe der Anfangslage und der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit bestimmt, indess kann zu dieser Bestimmung auch ein anfängliches System von Momentankräften gegeben sein, welches den Anfangszustand herbeiführt. Ist letzteres der Fall, bezeichnen Ξ, H, Z die Componenten einer am Punkte (xyz) zur Zeit $t = 0$ angreifenden Momentankraft und drücken Ξ_1, H_1, Z_1; Ξ_2, H_2, Z_2 die Componenten der Momentanwiderstände aus, welche die Punkte O, Q der Wirkung des Momentankräftesystems entgegensetzen, so hat man vermöge der Aequivalenz dieser Kräfte mit den Kräften mv die Gleichungen für den Anfangszustand:

$$\Sigma m \frac{dx}{dt} = \Sigma \Xi + \Xi_1 + \Xi_2, \qquad \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right) = \Sigma (yZ - zH) - H_2 h$$

$$\Sigma m \frac{dy}{dt} = \Sigma H + H_1 + H_2, \qquad \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt}\right) = \Sigma (z\Xi - xZ) + \Xi_2 h$$

$$\Sigma m \frac{dz}{dt} = \Sigma Z + Z_1 + Z_2, \qquad \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) - \Sigma (xH - y\Xi),$$

oder, wenn man, wie oben reducirt:

$$-M\omega_0 y_1 = \Sigma\Xi + \Xi_1 + \Xi_2, \qquad -\Sigma mxz \cdot \omega_0 = \Sigma (yZ - zH) - H_2 h$$

$$M\omega_0 x_1 = \Sigma H + H_1 + H_2, \qquad -\Sigma myz \cdot \omega_0 = \Sigma (z\Xi - xZ) + \Xi_2 h$$

$$0 = \Sigma Z + Z_1 + Z_2, \qquad M\varkappa^2 \cdot \omega_0 = \Sigma (xH - y\Xi).$$

Die Interpretation der reducirten Gleichungen ist sehr einfach. Nach Cap. I, §. 3, S. 354 stellen nämlich $M\omega_0 y_1$, $M\omega_0 x_1$, $-\Sigma mxz \cdot \omega_0$, $-\Sigma myz \cdot \omega_0$, $M\varkappa^2 \omega_0$ die Componenten der Resultanten und des resultirenden Axenmomentes der Momentankräfte zur Zeit $t = 0$ dar und nach S. 394 sind $-My_1\omega' - M\omega^2 x_1$, $Mx_1\omega' - M\omega^2 y_1$, 0; $-\Sigma mxz \cdot \omega' + \Sigma myz \cdot \omega^2$, $-\Sigma myz \cdot \omega' - \Sigma mxz \cdot \omega^2$, $M\varkappa^2 \omega'$ die entsprechenden Elemente der Reduction der Tangential- und Centripetalkräfte für die Zeit t dar, wobei $d\omega : dt = \omega'$ gesetzt ist. Da nämlich die Rotationsaxe nicht wechselt, so ist der dortige Winkel $\psi = 0$ und kann jeder Punkt der Axe als Mittelpunkt der Beschleunigungen angesehen werden.

Am Anfange der Bewegung erleidet das System einen Stoss und während der Bewegung einen continuirlichen Druck, beide Einflüsse werden durch die anfänglichen Momentanwiderstandskräfte und durch die continuirlich wirkenden Widerstände der Axe getilgt.

§. 4. **Rotation um eine feste Axe ohne Einwirkung von continuirlichen Kräften.** Ein System sei zur Zeit $t = 0$ von Momentankräften ergriffen, nachher aber sich selbst überlassen worden. Die Gleichungen seiner Bewegung zur Zeit t sind dann:

$$My_1 \frac{d\omega}{dt} + Mx_1\omega^2 + X_1 + X_2 = 0, \qquad \Sigma mxz \cdot \frac{d\omega}{dt} - \Sigma myz \cdot \omega^2 - Y_2 h = 0,$$

$$- Mx_1 \frac{d\omega}{dt} + My_1 \omega^2 + Y_1 + Y_2 = 0, \quad \Sigma myz \cdot \frac{d\omega}{dt} + \Sigma mxz \cdot \omega^2 + X_2 h = 0,$$

$$Z_1 + Z_2 = 0, \quad \frac{d\omega}{dt} = 0$$

und für den Anfangszustand gelten die folgenden:

$$\Sigma \Xi + My_1 \omega_0 + \Xi_1 + \Xi_2 = 0, \quad \Sigma(yZ - zH) + \Sigma mxz \cdot \omega_0 - H_2 h = 0,$$
$$\Sigma H - Mx_1 \omega_0 + H_1 + H_2 = 0, \quad \Sigma(z\Xi - xZ) + \Sigma myz \cdot \omega_0 + \Xi_2 h = 0,$$
$$\Sigma Z + \quad Z_1 + Z_2 = 0, \quad \Sigma(xH - y\Xi) - M\varkappa^2 \omega_0,$$

worin ω_0 die anfängliche Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Das System der sechs ersten Gleichungen zeigt 1. dass die Winkelgeschwindigkeit constant, $\omega = \omega_0$ ist; 2. dass die Axe in ihrer Richtung keinen Widerstand zu leisten hat, also auch keinen Druck erleidet, sondern blos senkrecht zu ihr ein solcher stattfindet. Die beiden Paare, welche die Axe umzustürzen drohen, sind wegen $\frac{d\omega}{dt} = 0$:

$$Y_2 h = \Sigma myz \cdot \omega^2, \quad - X_2 h = \Sigma mxz \cdot \omega^2;$$

sie bilden ein Paar, dessen Axenmoment $\omega^2 \sqrt{(\Sigma mxz)^2 + (\Sigma myz)^2}$ zur Axe senkrecht ist. Dasselbe ist nur Null, wenn die feste Axe eine Hauptaxe ist; in diesem Falle braucht sie, da alsdann X_2, Y_2 Null sind, nur in einem einzigen Punkte fest zu sein, d. h. rotirt das System um eine Hauptaxe eines festen Punktes zu irgend einer Zeit, so bleibt diese Axe permanent Rotationsaxe, ohne in einem weiteren Punkte gestützt werden zu müssen (permanente Rotationsaxe); 3. der Druck im Punkte $(0, 0, h)$ ist $\sqrt{X_2^2 + Y_2^2} = \frac{\omega^2}{h} \sqrt{(\Sigma mxz)^2 + (\Sigma myz)^2}$, der im Ursprung hat zu Componenten $- X_1 = Mx_1 \omega^2 - X_2$, $- Y_1 = My_1 \omega^2 - Y_2$; beide werden Null, wenn die Axe eine Hauptaxe des Massenmittelpunktes, d. h. $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ ist, d. h. rotirt das System zu irgend einer Zeit um eine Hauptaxe des Massenmittelpunktes, so bleibt diese Axe permanent Rotationsaxe, ohne in irgend einem Punkte gestützt werden zu müssen (freie Rotationsaxe).

Aus dem System der sechs für den Anfangszustand geltenden Gleichungen erhält man zunächst die Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = \frac{\Sigma(xH - y\Xi)}{M\varkappa^2}$; sie ist die Componente des resultirenden Paares der stossenden Momentankräfte, deren Axe parallel der Rotationsaxe ist, dividirt durch das Trägheitsmoment des Systems in Bezug auf die Rotationsaxe. Sodann liefern diese Gleichungen die Beantwortung aller Fragen, welche die anfängliche Erschütterung der Axe betreffen. Soll insbesondere die Axe keine Erschütterung erleiden, so müssen Ξ_1, H_1, Z_1; Ξ_2, H_2, Z_2 sämmtlich Null sein. Dies führt zu den Bedingungen:

$$\Sigma \Xi + My_1 \omega_0 = 0, \quad \Sigma(yZ - zH) + \Sigma mxz \cdot \omega_0 = 0,$$
$$\Sigma H - Mx_1 \omega_0 = 0, \quad \Sigma(z\Xi - xZ) + \Sigma myz \cdot \omega_0 = 0,$$
$$\Sigma Z = 0, \quad \Sigma(xH - y\Xi) - \Sigma mr^2 \cdot \omega_0 = 0.$$

Die Gleichung $\Sigma Z = 0$ zeigt, dass keine Stosscomponente parallel der Rotationsaxe vorhanden sein darf, dass also, wenn man die Stosskräfte für einen Punkt der Axe reducirt, die Resultante derselben senkrecht zur Axe sein muss; die erste und zweite Gleichung zeigen ferner, dass $\Sigma H : \Sigma \Xi = - x_1 : y_1$ sein muss; hieraus folgt, dass diese Resultante senkrecht zu der durch die Axe und den Massen-

mittelpunkt des Systems geführten Ebene sein muss. Die vierte und fünfte Gleichung liefern die Bedingung für die Richtung der Axe des Stosspaares, welches senkrecht zur Rotationsaxe gerichtet ist. Denn die Tangente der Neigung dieser Axe gegen die x-Axe ist $\frac{\Sigma(z\Xi - xZ)}{\Sigma(yZ - zH)} = \frac{\Sigma myz}{\Sigma mxz}$.

Wir wollen annehmen, der Stoss rühre von einer einzigen Kraft (Ξ, H, Z) her, welche im Punkte $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma = 0$ das System treffe. In diesem Falle reduciren sich die Gleichungen auf:

$$\begin{aligned} &\Xi + My_1\omega_0 = 0, \qquad &&\Sigma mxz = 0, \\ &H - Mx_1\omega_0 = 0, &&\Sigma myz = 0, \\ &Z = 0, &&\alpha Y - \beta X = M\varkappa^2\omega_0. \end{aligned}$$

Diese Kraft muss also senkrecht zur Ebene sein, welche durch die Axe und den Massenmittelpunkt geht. Bezeichnen wir sie mit P, so wird

$$P = \sqrt{\Xi^2 + H^2} = M\omega_0\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = M\omega_0 d,$$

wenn d den Abstand des Massenmittelpunktes von der Axe bedeutet und wenn f der Abstand der Kraft von der Axe ist, $\alpha Y - \beta X = P \cdot f$. Hierdurch liefert die letzte Gleichung $Pf = M\omega_0 df = M\varkappa^2\omega_0$ oder

$$f = \frac{\varkappa^2}{d}.$$

Zieht man durch den Massenmittelpunkt eine Axe parallel der Rotationsaxe und setzt das Trägheitsmoment in Bezug auf sie gleich $M\varkappa_0^2$, so wird

$$\varkappa^2 = \varkappa_0^2 + d^2$$

und folglich erhält man für den Abstand f, welchen eine Stosskraft haben muss, wenn sie die Axe nicht erschüttern soll:

$$f = d + \frac{\varkappa_0^2}{d}.$$

Der Schnittpunkt der Stossrichtung mit der Ebene durch die Axe und den Massenmittelpunkt heisst Mittelpunkt des Stosses.

Die hier entwickelten Eigenschaften der permanenten Rotationsaxen folgen mit grösserer Evidenz und Allgemeinheit aus den allgemeinen Untersuchungen über die Reduction der Momentankräfte und continuirlichen Kräften in Cap. I und II. Die Momentankräfte liefern am Massenmittelpunkt S die Reduction (R, G) und sind äquivalent (R, G_0) für die Centralaxe. Wirken keine continuirlichen Kräfte auf das System, so bleiben diese Elemente geometrisch constant. Die Bewegung des Systems hat für S reducirt die Reduction (v, ω) und bleibt auch v während der Bewegung geometrisch constant gleich $R : M$ von der Richtung und dem Sinne von R, während ω geometrisch variirt. Die Bewegung ist eine Windungsbewegung um eine wechselnde Momentanaxe. Sind v und ω senkrecht zu einander, so reducirt sich die Windungsbewegung auf eine blosse Rotation und ist dann auch R senkrecht zu ω, sind R und G zu einander rechtwinklig, so reduciren sich die Momentankräfte fortwährend auf eine Einzelkraft $R = Mv$ in der Richtungslinie der Centralaxe. Im Falle einer blossen Rotation ist R senkrecht zu der Ebene, welche den Massenmittelpunkt und die Rotationsaxe enthält und trifft diese Ebene in einem bestimmten Punkte C. Legt man durch S (s. Fig. 104, S. 357) OSO' senkrecht zur Rotationsaxe und bezeichnet mit a, a' die Abstände SO, SO' des Punktes S von dieser Axe und der Projection O'

von C auf OS, so wird $aa' = \varkappa_0^2$. Der Punkt C ist der obige Mittelpunkt des Stosses und $OO' = f = a + a' = a + \frac{\varkappa_0^2}{a}$, übereinstimmend mit dem Obigen, wo blos d für a geschrieben ist. Nach S. 357 ist der Abstand $CO' = b$ so beschaffen, dass ab constant $= -\lambda^2$ ist. Die Projection P des Mittelpunktes C des Stosses auf die Rotationsaxe wollen wir den Knotenpunkt der Rotationsaxe nennen. In Bezug auf S als Ursprung sind a und b für ihn rechtwinklige Coordinaten. Da die Rotation in Folge des Stosses frei um die Rotationsaxe erfolgt, so erleidet dieselbe keine Erschütterung. Ist sie eine Hauptaxe, so wechselt sie nicht im System und braucht daher nicht weiter in einem zweiten Punkte gestützt zu werden, wenn ihr Knotenpunkt P fest ist. Ist sie eine Hauptaxe, so bleibt die Winkelgeschwindigkeit ω um sie constant und ist von Beschleunigung blos die centripetale Componente ω^2 vorhanden. Ist sie eine Hauptaxe ihres Knotenpunktes P, so liefern die Centripetalkräfte $m\omega^2$ nach S. 394 bei der Reduction für P blos eine Resultante $\omega^2 Mf$ parallel und gleichen Sinnes mit der Centripetalbeschleunigung des Massenmittelpunktes, da die Paare $\omega^2 \Sigma myz$ und $-\omega^2 \Sigma mxz$ verschwinden. Daher hat P blos den Druck dieser Resultanten auszuhalten und braucht blos die Axe in P befestigt zu werden, wenn die Rotation permanent um sie erfolgen soll. Ist $f = 0$, d. h. ist die Axe eine Hauptaxe des Massenmittelpunktes, so fällt auch dieser Druck hinweg und rotirt das System um sie ganz frei.

Chelini, dessen Abhandlungen: 1. *Intorno ai principii fondamentali della dinamica con applicazioni al pendolo ed alla percussion de' corpi secundo Poinsot* (*Mem. dell' Accad. di Bologna*, Ser. 3za, T. VI (1875—76), pp. 409—459), 2. *Sopra alcune questione dinamiche, memoria che fa seguito a quella intorno ai principii fondamentali della dinamica* (Ibid. T. VIII (1877), pp. 273—306) eine ausführliche Theorie der permanenten Rotationsaxen enthalten, nennt eine Hauptaxe in Bezug auf den Punkt, für welchen sie Hauptaxe ist, eine permanente Axe und diesen Punkt selbst „*perno*", was wir mit „Knotenpunkt" wiedergegeben haben. Ueber verschiedene Orte der Knotenpunkte s. insbesondere die 2. Abhandlung S. 276 u. ffg.

§. 5. **Rotation um eine feste Axe unter Einfluss eines Paares, dessen Axe der Rotationsaxe parallel ist.** Wirkt auf das System nur ein Paar, dessen Axe der Rotationsaxe parallel ist, so sind $\Sigma X = \Sigma Y = \Sigma Z = 0$, $\Sigma(yZ - zY) = 0$, $\Sigma(zY - xZ) = 0$ und werden demnach die Gleichungen der Bewegung:

$$My_1 \frac{d\omega}{dt} + Mx_1\omega^2 + X_1 + X_2 = 0,$$

$$-Mx_1 \frac{d\omega}{dt} + My_1\omega^2 + Y_1 + Y_2 = 0,$$

$$Z_1 + Z_2 = 0,$$

$$\Sigma mxz \cdot \frac{d\omega}{dt} - \Sigma myz \cdot \omega^2 - Y_2 h = 0,$$

$$\Sigma myz \cdot \frac{d\omega}{dt} - \Sigma mxz \cdot \omega^2 + X_2 h = 0,$$

$$\Sigma(xY - yX) - M\varkappa^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Soll die Axe während der Bewegung nur in einem Punkte, dem Ursprung der Coordinaten, Druck erleiden, also die Bewegung ebenso erfolgen, wie wenn

die Axe in jenem Punkte allein befestigt, im Uebrigen aber frei beweglich wäre, so ist $X_2 = Y_2 = Z_2 = 0$ zu setzen. Dann liefern die vierte und fünfte Gleichung die Bedingungen

$$\Sigma mxz \cdot \frac{d\omega}{dt} - \Sigma myz \cdot \omega^2 = 0,$$

$$\Sigma myz \cdot \frac{d\omega}{dt} + \Sigma mxz \cdot \omega^2 = 0,$$

aus denen man durch Elimination von $\frac{d\omega}{dt}$ findet: $\omega^2 [(\Sigma mxz)^2 + (\Sigma myz)^2] = 0$, d. h. $\Sigma mxz = 0$, $\Sigma myz = 0$. Die Axe muss mithin eine Hauptaxe des Punktes sein, in welchem sie fest ist. Der Druck auf die Axe ergiebt sich aus den drei ersten Gleichungen; er ist, da $Z_2 = 0$, senkrecht zur Axe.

Soll der bis jetzt noch als fest angenommene Punkt gleichfalls keinen Druck erleiden, so muss auch $X_1 = X_2 = 0$ sein. Dies gibt die Bedingungen:

$$y_1 \frac{d\omega}{dt} + x_1 \omega^2 = 0, \qquad - x_1 \frac{d\omega}{dt} + y_1 \omega^2 = 0,$$

aus welchen man durch Elimination von $\frac{d\omega}{dt}$ findet: $\omega^2 (x_1^2 + y_1^2) = 0$, d. h. $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Demnach kann die geforderte Bedingung nur erfüllt werden, wenn die Axe durch den Massenmittelpunkt geht. Wenn also ein unveränderliches System sich anfänglich um eine Hauptaxe des Massenmittelpunktes dreht und der continuirlichen Einwirkung eines Kräftepaares unterworfen ist, dessen Axe mit der Hauptaxe parallel läuft, so rotirt es fortwährend um diese Axe weiter, auch wenn dieselbe frei wird.

Die Winkelbeschleunigung ergibt sich in allen Fällen aus der letzten Gleichung. Bezeichnet Pp das Paar, so wird

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Pp}{M\varkappa^2}.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert ω und den Rotationswinkel ϑ; der Anfangswerth ω_0 wird wie beim vorigen Problem bestimmt.

§. 6. **Rotation eines schweren Systems um eine horizontale Axe. Zusammengesetztes Pendel** (Fig. 133). Ein unveränderliches schweres System, welches unter alleinigem Einfluss der Schwere sich um eine feste horizontale Axe dreht, heisst ein zusammengesetztes Pendel. Die horizontale Rotationsaxe nehmen wir zur Axe der z, die Richtung der Vertikalen zur y-Axe, positiv abwärts gerechnet, die x-Axe horizontal. Es sind alsdann die Componenten der gegebenen Kräfte $X = 0$, $Y = mg$, $Z = 0$ und folglich

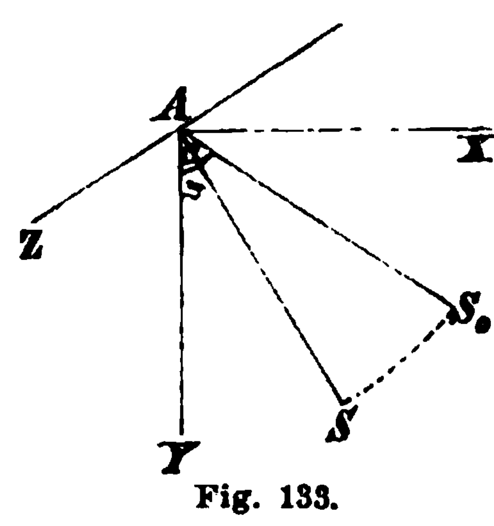


Fig. 133.

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = g\Sigma m = gM, \qquad \Sigma Z = 0,$$

$$\Sigma (yZ - zY) = - g\Sigma mz = - gMz_1,$$

$$\Sigma (zX - xZ) = 0, \quad \Sigma (xY - yX) = g\Sigma mx = gMx_1,$$

wenn M die Masse des Systems und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Massenmittelpunktes S bedeuten. Legen wir die xy-Ebene durch den Massenmittelpunkt, so wird $z_1 = 0$; wir erhalten daher als Gleichungen der Bewegung des Pendels:

$$gMy_1 \frac{d\omega}{dt} + gMx_1 \cdot \omega^2 + X_1 + X_2 = 0,$$

$$-gM - gMx_1 \frac{d\omega}{dt} + gMy_1 \cdot \omega^2 + Y_1 + Y_2 = 0,$$

$$Z_1 + Z_2 = 0,$$

$$\Sigma mxz \cdot \frac{d\omega}{dt} - \Sigma myz \cdot \omega^2 - hY_2 = 0,$$

$$\Sigma myz \cdot \frac{d\omega}{dt} + \Sigma mxz \cdot \omega^2 + hX_2 = 0,$$

$$gMx_1 - M\varkappa^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Es sei nun a der Abstand SA des Massenmittelpunktes von der Axe, α der Winkel den diese Linie zur Zeit $t = 0$ mit der Vertikalen bildet, ϑ derselbe Winkel zur Zeit t; man hat dann:

$$x_1 = a \sin \vartheta, \quad y_1 = a \cos \vartheta, \quad \omega = \frac{d(\alpha - \vartheta)}{dt} = -\frac{d\vartheta}{dt}, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{d^2\vartheta}{dt^2}.$$

Ferner ziehen wir durch den Massenmittelpunkt eine Parallele zur Axe und bezeichnen den Trägheitsradius des Systems in Bezug auf sie mit $\varkappa_0$. Dadurch wird das Trägheitsmoment für die Rotationsaxe $M(a^2 + \varkappa_0^2)$ und wenn wir diesen Werth in das Gleichungssystem einführen, so geht zunächst die letzte Gleichung über in

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{a + \frac{\varkappa_0^2}{a}} \sin \vartheta = 0.$$

Sie ist die eigentliche Gleichung der Bewegung, indem sie den Winkel ϑ und die Winkelgeschwindigkeit ω als Functionen der Zeit bestimmt. Sie hat aber dieselbe Form, wie die Gleichung

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \vartheta = 0,$$

welche die Bewegung eines einfachen Pendels von der Länge l bestimmt. Für $l = a + \frac{\varkappa_0^2}{a}$ erhalten wir folglich ein einfaches Pendel, welches zu denselben Zeiten dieselben Winkel ϑ mit der Vertikalen bildet, wie die Linie AS in unserem zusammengesetzten Pendel, welches also mit diesem gleiche Schwingungen ausführt. Es ist daher zunächst nur nöthig, dies einfache Pendel weiter zu untersuchen.

Sämmtliche Punkte des zusammengesetzten Pendels machen Schwingungen von derselben Art, wie das einfache Pendel von der Länge $l = a + \frac{\varkappa_0^2}{a}$. Denkt man sich einen Augenblick die Verbindung der Punkte unter einander gelöst und jeden für sich, unabhängig von den übrigen, um die gemeinsame Axe schwingend so werden alle Punkte, deren Abstand von der Axe kleiner ist, als l, schneller, alle die, welche weiter von ihr abliegen, langsamer schwingen, als das zusammengesetzte Pendel; diejenigen aber, welche den Abstand l von der Axe besitzen, werden frei dieselbe Bewegung haben, die sie im System besitzen. Alle Punkte der letzteren Art liegen auf einer um die Rotationsaxe mit dem Abstande l beschriebenen Cylinderfläche. Eine Ebene durch den Massenmittelpunkt und die

Rotationsaxe geführt, schneidet diese Cylinderfläche in zwei Geraden A', A'', welche von der mit der Rotationsaxe parallelen Massenmittelpunktsaxe die Abstände

$$a' = \frac{\varkappa^2}{a}, \qquad a'' = l + a = 2a + \frac{\varkappa_0^2}{a}$$

haben. Die erste dieser Geraden nennen wir die zur Rotationsaxe (Aufhängungsaxe) gehörige Schwingungsaxe und ihren Schnittpunkt mit der Linie AS den Schwingungsmittelpunkt. Zwischen der einfachen Pendellänge l, dem Abstande a der Aufhängungs- und dem Abstande a' der Schwingungsaxe vom Massenmittelpunkte bestehen die ~~Rotationen~~: Relationen

$$l = a + a', \qquad a a' = \varkappa^2.$$

Zwischen der Aufhängungs- und Schwingnngsaxe besteht Reciprocität in der Art, dass die Schwingungsaxe zur Aufhängungsaxe werden kann, ohne dass die einfache Pendellänge l sich ändert. Denn es vertauschen dadurch a' und a blos ihre Rollen und da sie in beiden vorstehenden Gleichungen symmetrisch vorkommen, so ändern sie bei dieser Vertauschung nicht die Grösse der Pendellänge. Es ist

$$l = a + \frac{\varkappa_0^2}{a} = a' + \frac{\varkappa_0^2}{a'}.$$

Aufhängungs- und Schwingungsaxe liegen immer auf entgegengesetzten Seiten der Massenmittelpunktsaxe in solchen Abständen von letzterer, dass deren Produkt constant, nämlich gleich dem Quadrate des Trägheitsradius um die Massenmittelpunktsaxe ist. Die Punkte A, A' bilden daher auf AS eine gleichliegende Involution, deren Mittelpunkt S und deren Constante $\varkappa_0^2$ ist.

Es gibt unendlich viele Axen im Raume, um welche ein schwereres System als um horizontale Axen schwingend, dieselben Schwingungen macht. Um sie zu finden, ziehen wir durch den Massenmittelpunkt eine Axe γ, deren Trägheitsradius $\varkappa_0$ sei. Nehmen wir alsdann im Abstande a von γ irgend eine zu γ parallele Axe A zur Aufhängeaxe, so ist die ihr zugehörende einfache Pendellänge $l = a + \frac{\varkappa_0^2}{a}$ und bleibt constant, wenn a constant bleibt. Demnach erhält man für jede Gerade auf einer um γ mit der Länge a beschriebenen Cylinderfläche dieselben Schwingungen. Weil aber Aufhängungs- und Schwingungsaxe reciprok sind, so liefern auch alle Geraden, welche auf einer zweiten um γ mit dem Abstande $a' = \frac{\varkappa_0^2}{a}$ beschriebenen Cylinderfläche liegen, dieselben Schwingungen; denn jede von ihnen ist Schwingungsaxe zu derjenigen Geraden des ersten Cylinders, welche mit ihr und γ in einer Ebene auf entgegengesetzten Seiten von γ liegt. Jedem Abstande a entsprachen zwei solche Cylinderflächen, um deren Geraden als Axen das Pendel Schwingungen derselben einfachen Pendellänge $l = a + \frac{\varkappa_0^2}{a}$ ausführt. Je nachdem man a wählt, ändern sich diese Cylinderflächen. Es kann gefragt werden, für welchen Werth von a die Länge l ein Minimum werde. Da $l = a + a'$ und $aa' = \varkappa_0^2$ ist, so kommt diese Aufgabe darauf hinaus, unter allen Rechtecken desselben Inhaltes $\varkappa_0^2$ dasjenige vom kleinsten Umfange zu finden. Da das Quadrat diese Eigenschaft allein besitzt, so folgt, dass $a = a' = \varkappa_0$ sein muss, welchem Werthe die Pendellänge $l = 2\varkappa_0$ entspricht. Die beiden Cylinderflächen fallen zusammen. Unter allen Axen

also, welcher einer gegebenen Massenmittelpunktsaxe γ von gegebenem Trägheitsradius $\varkappa_0$ parallel laufen, liegen die Axen der kürzesten Oscillationsdauer auf einem um γ mit dem Abstande $\varkappa_0$ beschriebenen Cylinder.

Durch den Massenmittelpnnkt kann man eine Kegelfläche zweiten Grades legen, welche alle Axen desselben Trägheitsradius $\varkappa_0$ enthält. Es gibt daher eine Schaar von Cylindern, welche der Ort der Axen kürzester Oscillationsdauer ist, dem Trägheitsradius $\varkappa_0$ entsprechend.

Da $l = 2\varkappa_0$ das Minimum der Pendellänge für den Trägheitsradius $\varkappa_0$ ist, so erhält man das absolute Minimum von l für das Minimum von $\varkappa_0$. Die Axen also, um welche ein Pendel die kürzeste Oscillationsdauer besitzt, liegen auf einem um die Massenmittelpunktshauptaxe des kleinsten Trägheitsmomentes mit dem Abstande gleich dem Trägheitsradius dieses letzteren beschriebenen Cylinder.

§. 7. Bewegung des Pendels im widerstehenden Mittel. Der auf ein Element $d\sigma$ der Oberfläche eines Körpers in einem Punkte A wirkende Widerstand des Mittels zerfällt in eine tangentielle und eine normale Componente. Die erstere ist im Allgemeinen sehr klein und soll gleich Null angenommen werden; die letztere nimmt man gleich einer Function der Geschwindigkeit v des Punktes A an und drückt ihn durch $kf(v)d\sigma$ aus. Die Constante k hängt von der Dichtigkeit des Mittels ab; die Function f kann nur experimentell bestimmt werden. Die Geschwindigkeiten der Punkte A haben zum Theil Richtungen, welche nach dem Aussenraume, zum Theil solche, welche nach dem Innern des Körpers hingehen, für gewisse Punkte fällt die Richtung der Geschwindigkeit in die Oberfläche, für andere endlich ist sie Null. Die Werthe der Function f für die drei letzteren Arten von Punkten nimmt man gleich Null an, indem man von dem Einflusse der Wirbel, welche auf der Rückseite des Körpers entstehen, absieht. Beim Pendel sind die Geschwindigkeiten $v = r\omega$ und indem man für f eine Potenz annimmt, erlangt der Widerstand die Form $kr^n\omega^n d\sigma$ und wird sein Moment bezüglich der Rotationsaxe $kr^{n+1}\omega^n d\sigma$. Das Gesammtmoment sämmtlicher elementaren Widerstände ist daher $k\omega^n\int r^{n+1}d\sigma = \mu\omega^n$, wo das Integral über alle in Frage kommenden Oberflächentheile des Körpers auszudehnen ist, so dass μ eine von der Oberflächenbeschaffenheit abhängige Constante wird. Indem wir diesen Widerstand in die Hauptgleichung der Pendelbewegung einführen, wird dieselbe

$$M\varkappa^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -Mg\sin\vartheta - \mu\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^n$$

oder

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\vartheta + \frac{\mu}{M\varkappa^2}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^n = 0.$$

Dies ist aber die Gleichung für die Bewegung eines einfachen Pendels von der Länge l im widerstehenden Mittel. Man kann sie ähnlich wie B. I, S. 411 gezeigt wurde, durch zwei andere ersetzen, auf welche die dort angegebene Methode anwendbar ist.

§. 8. Eine homogene schwere Fallthür, deren Angellinie gegen die Horizontale unter dem Winkel n geneigt ist (s. die Aufgabe S. 66, Fig. 12), schwingt ohne Anfangswinkelgeschwindigkeit von einer Lage aus, in welcher sie mit der Gleichgewichtslage den Winkel α bildet. Die Bewegung der Thür zu untersuchen.

Mit Beibehaltung der Bezeichnungen S. 66 und des dort angewandten Coordinatensystems, dessen Axen Hauptaxen sind, erhalten wir die Bewegungsgleichungen:

$$My_1 \frac{d\omega}{dt} + M\omega^2 x_1 + Mg\cos n + X + X' = 0, \quad bMg\sin\varphi\sin n + l(Y - Y') = 0,$$

$$-Mx_1 \frac{d\omega}{dt} + M\omega^2 y_1 + Y + Y' \qquad = 0, \quad bMg\cos\varphi\sin n + l(X - X') = 0,$$

$$-Mg\sin n + Z + Z' = 0, \quad \varkappa^2 \frac{d\omega}{dt} + bg\cos n\sin\vartheta = 0.$$

Die letzte Gleichung gibt, wenn $\varkappa_0^2$ der Trägheitsradius des Systems für die zur Angellinie parallele Axe des Massenmittelpunkts ist

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{g\cos n}{b + \frac{\varkappa_0^2}{b}} \sin\vartheta = 0.$$

Die Thür schwingt daher isochron mit einem Pendel von der Länge $\left(b + \frac{\varkappa_0^2}{b}\right)\sec n$, u. s. w.

§. 9. **Rotation eines unveränderlichen Systems um einen festen Punkt.** Sind X_0, Y_0, Z_0 die Componenten des Widerstandes, welchen der feste Punkt im Laufe der Bewegung zu leisten hat, parallel dreien rechtwinkligen Coordinatenaxen dieses Punktes, so sind die Gleichungen der Bewegung in der ursprünglichen Form:

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X + X_0, \quad \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y + Y_0, \quad \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z + Z_0,$$

$$\Sigma m \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma (yZ - zY),$$

$$\Sigma m \left(z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma (zX - xZ),$$

$$\Sigma m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma (xY - yX).$$

Von diesen sechs Gleichungen sagen die drei ersten aus, dass die Resultante der gegebenen Kräfte P in Verbindung mit dem Widerstande äquivalent ist der Resultante aller Kräfte $m\varphi$. Letztere ist gleich dem Produkte aus der Gesammtmasse M und der Beschleunigung des Massenmittelpunktes und kann leicht, wie bei der freien Bewegung, dargestellt werden. Die drei letzten Gleichungen gestatten dieselbe Transformation auf die Euler'sche Form, wie bei der freien Bewegung, mit dem Unterschiede, dass A, B, C die Trägheitsmomente für die Hauptaxen des festen Punktes werden, die Momentanaxe fortwährend durch diesen Punkt geht und $G_x^{(1)}$, $G_y^{(1)}$, $G_z^{(1)}$ sich auf jene Hauptaxen beziehen.

Ist das System continuirlichen Kräften nicht unterworfen, so rollt das Trägheitsellipsoid des festen Punktes auf der invariabelen Ebene, wie bei der freien Bewegung das Centralellipsoid. Der Widerstand ist ein continuirlicher und am Anfang der Bewegung eine Momentankraft, welche die Resultante der anfänglichen Momentankräfte vernichtet. Das anfängliche Paar G der Momentankräfte bestimmt die Bewegung.

§. 10. **Rotation eines unveränderlichen schweren Systems, für**

welches das Centralellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, um einen festen Punkt auf dessen Rotationsaxe.

1. Es sei O (Fig. 184) der feste Punkt, S der Massenmittelpunkt, also OSC die Rotationsaxe des Centralellipsoids und $OS = h$. Durch O ziehen wir die Verticale OZ, positiv aufwärts gerechnet, und legen durch sie die Verticalebene ZOC, welche die Axe OC enthält; in ihr liegt der Nutationswinkel $ZOC = \vartheta$ der Axe OC gegen die Verticale. Die Verticalebene ZOC bilde mit irgend einer festen Verticalebene ZOX den Winkel ψ, sodass $\psi + \frac{1}{2}\pi$ den Präcessionswinkel der Knotenlinie der zu OC senkrechten Ebene mit der Ebene XOY darstellen würde. Durch O ziehen wir ferner in der Verticalebene ZOC die Axe OA senkrecht zu OC, sowie senkrecht zur Ebene COA die Axe OB. Die Axen OA, OB, OC sind Hauptaxen des Punktes O und zwar sind die Trägheitsmomente für OA und OB einander gleich, während das Trägheitsmoment um OC von ihnen verschieden ist. Es sei A der gemeinsame Werth des Trägheitsmomentes für OA und OB, C der des Trägheitsmomentes für OC.

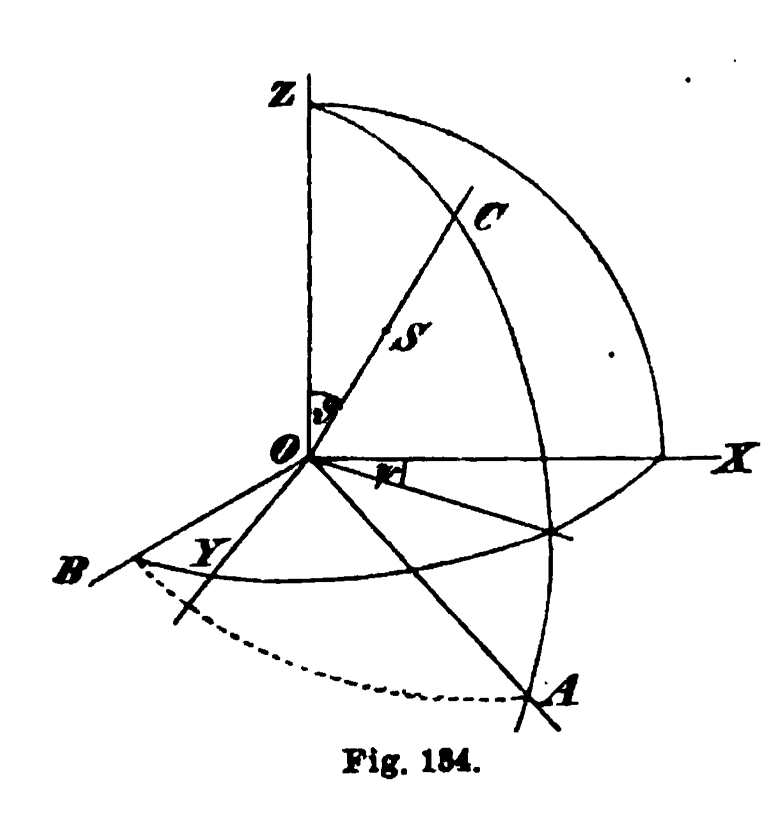


Fig. 184.

Wir wollen die Bewegung des Systems auf diese Axen beziehen. Sind G_1, G_2, G_3 die Componenten des resultirenden Axenmomentes der Momentankräfte und sind ω_1, ω_2, ω_3 die Componenten der Winkelgeschwindigkeit um sie, so ist, mit Rücksicht darauf, dass das Axenmoment des Gewichtes Mg, nämlich $Mgh \sin\vartheta$ in die Axe OB fällt und seine Componenten in Bezug auf OA und OC Null sind, wie S. 402

$$\frac{dG_1}{dt} + \omega_2 G_3 - \omega_3 G_2 = 0, \quad \frac{dG_2}{dt} + \omega_3 G_1 - \omega_1 G_3 = Mgh \sin\vartheta,$$

$$\frac{dG_3}{dt} + \omega_1 G_2 - \omega_2 G_1 = 0.$$

Da OA, OB, OC Hauptaxen sind, ist $G_1 = A\omega_1$, $G_2 = A_2\omega_2$, $G_3 = C\omega_3$ und hat man $\omega_1 = -\sin\vartheta \frac{d\psi}{dt}$, $\omega_2 = \frac{d\vartheta}{dt}$. Die dritte Gleichung reducirt sich auf $\frac{d\omega_3}{dt} = 0$ und folgt aus ihr, dass ω_3 constant, nämlich $\omega_3 = n$ ist, d. h. die Winkelgeschwindigkeit um die Rotationsaxe des Centralellipsoids ist constant. Dies ist selbstverständlich, da das Axenmoment des Paares $G^{(1)} = Mgh \sin\vartheta$ senkrecht zu dieser Axe ist.

Führt man diesen Werth und die Ausdrücke für ω_1, ω_2 in die erste der Bewegungsgleichungen ein, so nimmt sie die Gestalt an

$$-A \sin\vartheta \frac{d^2\psi}{dt^2} - 2A \cos\vartheta \frac{d\vartheta}{dt}\frac{d\psi}{dt} + Cn \frac{d\vartheta}{dt} = 0,$$

oder, indem man sie mit $-\sin\vartheta$ multiplicirt,

$$\frac{d}{dt}\left(A \sin^2\vartheta \frac{d\psi}{dt} + Cn \cos\vartheta\right) = 0,$$

woraus das Integral

$$A \sin^2 \vartheta \frac{d\psi}{dt} + Cn \cos \vartheta = E$$

folgt, unter E eine Constante verstanden. Der Sinn dieses Integrales ist der, dass die Componente des Axenmomentes der Momentankräfte in Bezug auf die Verticale OZ während der Bewegung constant bleibt. Dies leuchtet direct ein, da $G^{(1)}$ senkrecht zu OZ ist und also die Componente von G in Bezug auf OZ nicht ändern kann. Das dritte Integral wird durch die Gleichung der lebendigen Kraft gegeben. Multiplicirt man nämlich die Bewegungsgleichungen mit ω_1, ω_2, ω_3 und addirt sie, so wird

$$A\omega_1 \frac{d\omega_1}{dt} + A\omega_2 \frac{d\omega_2}{dt} + C\omega_3 \frac{d\omega_3}{dt} - Mgh \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} = 0,$$

also, wenn man integrirt,

$$\tfrac{1}{2}(A\omega_1^2 + A\omega_2^2 + C\omega_3^2) + Mgh \cos \vartheta = H,$$

oder nach Einführung der Werthe von ω_1, ω_2, ω_3

$$\tfrac{1}{2} A \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} A \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} Cn^2 + Mgh \cos \vartheta = H.$$

Die Constanten E, H der beiden Integrale, welche die Principe der Momente und der lebendigen Kraft geben, können durch die Anfangslage ϑ_0, ψ_0 und den anfänglichen Geschwindigkeitszustand $p_0 = n$, q_0, r_0 dargestellt werden.

2. Um die Integrale zweckmässiger zu gestalten, suchen wir auf der Axe OC (Fig. 135) jenseits S den Schmiegungsmittelpunkt P und die Länge $OP = l$ des einfachen Kreispendels, welches mit dem System um die Axe OB isochron schwingen würde. Es ist $l = A : Mh$. Würde das System in irgend einer Weise um O geschleudert, ohne dass es um OC rotirt, sodass also $n = 0$, so würde es sich bewegen, wie ein sphärisches Pendel von der Länge l. Für $C = 0$ geht das System in eine unveränderliche Strecke über, welche selbst ein spärisches Pendel darstellt. Sind n und C nicht Null, so findet nur Analogie zwischen der Bewegung des Systems mit der des sphärischen Pendels statt, nicht Coincidenz.

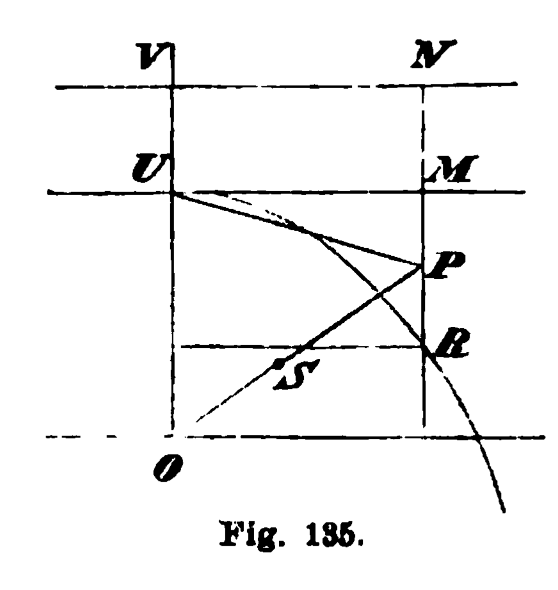


Fig. 135.

Auf der Verticalen OZ wollen wir die Längen $OU = \frac{El}{Cn} = a$ und $OV = \frac{l(H - \frac{1}{2}Cn^2)}{Mgh} = b$ auftragen und durch U und V zwei Horizontalebenen legen, welche von der Verticalen des Punktes P in M und N geschnitten werden. Die beiden zuletzt entwickelten Integrale nehmen hierdurch die Formen an

$$Mhl \sin^2 \vartheta \frac{d\psi}{dt} + Cn \cos \vartheta = Cn \cdot \frac{a}{l},$$

$$\tfrac{1}{2} l^2 \left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right] = g(b - l \cos \vartheta).$$

Aus dem ersten von ihnen ergibt sich für die horizontale Geschwindigkeitscomponente $l \sin \vartheta \frac{d\psi}{dt}$:

$$l \sin \vartheta \cdot \frac{d\psi}{dt} = \frac{Cn}{Mh} \cdot \frac{a - l \cos \vartheta}{l \sin \vartheta} = \frac{Cn}{Mh} \operatorname{tg}(UP, UM);$$

in der zweiten bedeutet die linke Seite das halbe Quadrat der Geschwindigkeit v des Punktes P, sodass

$$\tfrac{1}{2} v^2 = g (b - l \cos \vartheta)$$

wird. Die Geschwindigkeit von P hängt daher ab von der Tiefe $b - l \cos \vartheta$ desselben unter der Horizontalebene von V und ihre horizontale Componente ist proportional der Tangente des Winkels, welchen UP mit der Horizontalebene bildet. Befindet sich P unter der Horizontalebene von U, aber über der von O, so ist diese Tangente positiv und dreht sich die Verticalebene ZOP im positiven Sinn (übereinstimmend mit n); tritt P über diese Ebene, so tritt ein Wechsel des Sinnes dieser Rotation ein. Ebenso, wenn P unter den Horizont von O gelangt. Die horizontale Geschwindigkeit wird im Niveau von U gleich Null, die ganze Geschwindigkeit im Niveau von V. Höher als das Niveau von V kann P nicht steigen.

Die Elimination von $\frac{d\psi}{dt}$ aus den beiden Integralen liefert die Gleichung

$$\left(l \frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2g (b - l \cos \vartheta) - \frac{C^2 n^2}{M^2 h^2} \left(\frac{a - l \cos \vartheta}{l \sin \vartheta}\right)^2,$$

mit Hülfe deren der Nutationswinkel ϑ als Function der Zeit gefunden werden kann. Sobald dies geschehen, liefert das andere Integral ψ gleichfalls als Function der Zeit. Bevor wir hierzu übergehen, wollen wir aus vorliegender Differentialgleichung für ϑ die wichtigsten Folgerungen ziehen und sie geometrisch interpretiren.

Schreibt man die Gleichung so:

$$\tfrac{1}{2} \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l} \left(\frac{b}{l} - \cos \vartheta\right) (1 - \cos^2 \vartheta) - \tfrac{1}{2} \frac{C^2 n^2}{M^2 h^2 l^2} \left(\frac{a}{l} - \cos \vartheta\right)^2,$$

so sieht man, dass ϑ nicht Null werden kann, ausser wenn $a = l$ ist. Die Nothwendigkeit hiervon erkennt man auch direct, wenn man die Bedeutung von $a : l$ berücksichtigt. Es ist nämlich $a : l = E : Cn$, d. h. gleich dem Verhältnisse der Componenten des resultirenden Axenmomentes der Momentankräfte um die Verticale OZ und die Rotationsaxe OC des Centralellipsoids. Da aber E die Projectionssumme der Axenmomente um OA und OC auf OZ ist (OB ist senkrecht zu OZ) und für $\vartheta = 0$ auch OA senkrecht zu OZ wird, so muss $E = Cn$ werden, nämlich gleich dem Axenmomente um OC.

Ist nun $\vartheta = \vartheta_0$ der anfängliche Werth von ϑ, so nimmt ϑ von diesem Werthe an ab oder zu, je nachdem $d\vartheta : dt$ negativ oder positiv ist und erreicht seinen grössten und kleinsten Werth, wenn die rechte Seite der vorstehenden Gleichung verschwindet, d. h. für diejenigen reellen Werthe von $\cos \vartheta$, welche sie annulliren. Für $\cos \vartheta = -1$ wird sie negativ, für $\cos \vartheta = \cos \vartheta_0$ ist sie positiv, nämlich $\frac{1}{2} \sin^2 i \, (i')^2$, für $\cos \vartheta = +1$ wird sie wieder negativ und für $\cos \vartheta = \infty$ positiv. Daher liegen die Wurzeln der Gleichung, welche man erhält, indem man den Ausdruck zur Rechten gleich Null setzt, zwischen $\cos \vartheta = -1$ und $\cos \vartheta = \vartheta_0$, zwischen $\cos \vartheta = \cos \vartheta_0$ und $\cos \vartheta = +1$ und $\cos \vartheta = +1$ und $\cos \vartheta = \infty$. Die letztere Wurzel ist dem Probleme fremd, da sie keinen reellen Werth für ϑ liefert. Es oscillirt also ϑ zwischen einem Minimalwerthe α und einem Maximalwerthe β. Um die geometrische Bedeutung dieser Grenzen zu ermitteln, berücksichtige man, dass die obige Gleichung mit Rücksicht auf die Figur den Sinn hat:

$$\left(l \frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2g \,.\, PN - \left(\frac{Cn}{Mh}\right)^2 \left(\frac{PM}{UM}\right)^2$$

und construire die Parabel

$$y^2 = \frac{1}{2g}\left(\frac{Cn}{Mh}\right)^2 \cdot x,$$

deren Hauptaxe VO vertical abwärts gerichtet, deren Scheitel in O und deren Parameter $\frac{1}{2g}\left(\frac{Cn}{Mh}\right)^2$ ist. Die Verticale des Punktes P schneide sie in R, sodass $MR = x$, $UM = y$ die Coordinaten von R sind. Man hat dann

$$\frac{1}{PM} + \frac{1}{PR} = \frac{1}{PN - MN} + \frac{1}{x - PM} = \frac{x}{(PN - MN)\,x - PM^2}$$

$$= \frac{2g}{2g \cdot PN - 2g \cdot MN - \left(\frac{Cn}{Mh}\right)^2 \left(\frac{PM}{UM}\right)^2}$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{PM} + \frac{1}{PR}\right) = \frac{g}{\left(l\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - 2g \cdot MN}.$$

Für die Grenzlagen von P verschwindet $\left(l\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$ und folgt, dass für jede von ihnen das harmonische Mittel aus ihren Abständen von M und R gleich $-2 \cdot MN$ ist. Um die Punkte R auf der Parabel zu finden, die diesen Lagen entsprechen, setze man daher in der Gleichung für $\left(l\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$ diese Grösse gleich Null und wenn $UV = MN = c$ ist, $PN = c + x$, $PM = x$, $UM = y$, wodurch sie in die Gleichung

$$y^2 (x + c) = \frac{1}{2g}\left(\frac{Cn}{Mh}\right)^2 x^2$$

einer cubischen Curve übergeht, welche durch U hindurchgeht und VN zur Asymptote hat. Die Schnittpunkte derselben mit einem Kreise um O vom Radius l liefern die Punkte R, wozu sich sodann mit Hülfe des harmonischen Mittels die Grenzlagen für P ergeben.

3. Mit Hülfe von α und β hat man

$$\tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}\left(\frac{b}{l} - \cos\vartheta\right)(1 - \cos^2\vartheta) - \tfrac{1}{2}\frac{C^2n^2}{M^2h^2l^2}\left(\frac{a}{l} - \cos\vartheta\right)^2$$

$$= \frac{g}{l}\left\{\cos^3\vartheta - \left(\frac{1}{2g}\frac{C^2n^2}{M^2h^2l} + \frac{b}{l}\right)\cos^2\vartheta + \left(\frac{a}{g}\frac{C^2n^2}{M^2h^2l^2} - 1\right)\cos\vartheta - \left(\frac{a}{2g}\frac{C^2n^2}{M^2h^2l^2} - \frac{b}{l}\right)\right\}$$

d. h.

$$\tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}(\cos\vartheta - d)(\cos\vartheta - \cos\alpha)(\cos\vartheta - \cos\beta),$$

wo d gefunden wird, indem man $d + \cos\alpha + \cos\beta$ dem Coefficienten von $\cos^2\vartheta$ mit dem umgekehrten Zeichen gleichsetzt.

Da ϑ zwischen α und β liegt, so kann man setzen

$$\cos\vartheta = \cos\beta - (\cos\beta - \cos\alpha)\sin^2\varphi = \cos\beta\cos^2\varphi + \cos\alpha\sin^2\varphi.$$

Die geometrische Bedeutung dieser Substitution erhellt, wenn man um die Projection p_1p_2 des Abstandes (Fig. 136) der Grenzlagen des Punktes P auf die Verticale OZ als Durchmesser eine Kugel beschreibt und sie mit der Horizontallinie Pq von P, welche OZ trifft, schneidet. Ist Q der Schnittpunkt, so ist $\sphericalangle p_1p_2Q = \varphi$. Denn es ist $p_1q = l(\cos\vartheta - \cos\beta)$ und zugleich

$$p_1q = p_1p_2 \sin p_1p_2Q \,.\, \sin p_1Qq = l(\cos\alpha - \cos\beta)\sin^2 p_1p_2Q.$$

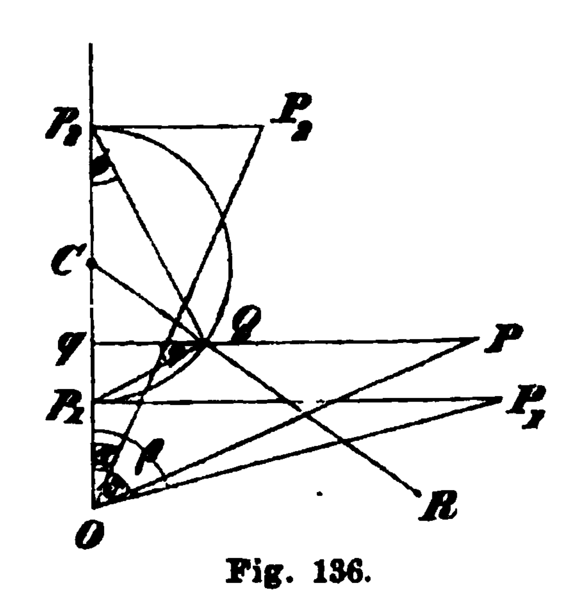


Fig. 136.

Dem Werthe $\vartheta = \beta$ entspricht $\varphi = 0$ und $\vartheta = \alpha$ der Werth $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Die Differentiation liefert

$$\sin\vartheta \frac{d\vartheta}{dt} = -2(\cos\alpha - \cos\beta)\sin\varphi\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

und zugleich wird

$$\cos\vartheta - \cos\alpha = -(\cos\alpha - \cos\beta)\cos^2\varphi,$$
$$\cos\vartheta - \cos\beta = (\cos\alpha - \cos\beta)\sin^2\varphi$$

und indem man diese Werthe in die Gleichung einführt, erhält man

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{g}{l}(d - \cos\vartheta) = \frac{1}{2}\frac{g}{l}[d - \cos\beta - (\cos\alpha - \cos\beta)\sin^2\varphi]$$
$$= \frac{1}{2}\frac{g}{l}\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\varkappa^2}(1 - \varkappa^2\sin^2\varphi), \qquad \varkappa^2 = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{d - \cos\beta}.$$

Hieraus ergibt sich weiter, wenn man t von dem Moment an rechnet, wo P eine tiefste Lage erreicht

$$t = \frac{\varkappa}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\beta}}\sqrt{\frac{2l}{g}}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\varphi}}$$

und wenn T die Zeit ist, entsprechend dem Uebergange des Punktes P aus einer tiefsten in die nächstfolgende höchste Lage, d. h.

$$T = \frac{\varkappa}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\beta}}\sqrt{\frac{2l}{g}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\varphi}} = \frac{\varkappa}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\beta}}\sqrt{\frac{2l}{g}}K,$$

so wird

$$\frac{K}{T}t = F(\varphi, \varkappa), \quad \varphi = am\left(\frac{K}{T}t, \varkappa\right)$$

und hiermit

$$\cos\vartheta = \cos\beta\cos^2 am\frac{K}{T}t + \cos\alpha\sin^2 am\frac{K}{T}t, \quad \frac{K^2}{T^2} = \frac{1}{2}\frac{g}{l\varkappa^2}(\cos\alpha - \cos\beta).$$

Die Oscillationsdauer der Nutation des Systems ist $2T$ und stimmt die Nutationsbewegung überhaupt überein mit der Bewegung des Kreispendels, so zwar, dass der Punkt P schwingt, wie der Punkt Q eines einfachen Pendels um die Mitte C von p_1, p_2 von der Länge $CR = 2l : (\cos\alpha - \cos\beta) = l^2 : CQ$ und der Oscillationsdauer $2T$.

4. Die Gleichung

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{Cn}{Mhl}\frac{\frac{a}{l} - \cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}$$

gibt, wenn man $\sin^2\vartheta = 1 - \cos^2\vartheta = (1 + \cos\vartheta)(1 - \cos\vartheta)$ setzt und den Bruch zerlegt

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{2}\frac{Cn}{Mhl}\left[\frac{\frac{a}{l} + 1}{1 + \cos\vartheta} + \frac{\frac{a}{l} - 1}{1 - \cos\vartheta}\right]$$

und daher vermöge $\cos\vartheta = \cos\beta - (\cos\beta - \cos\alpha)\sin^2\varphi$ und

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\cos\alpha - \cos\beta}\sqrt{\frac{g}{2l}}\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}\,,$$

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \tfrac{1}{2}\frac{Cn}{Mhl}\sqrt{\frac{2l}{g}}\frac{\varkappa}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\beta}}$$

$$\cdot\left[\frac{\left(\frac{a}{l}+1\right):(1+\cos\beta)}{\left(1+\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{1+\cos\beta}\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}} + \frac{\left(\frac{a}{l}-1\right):(1-\cos\beta)}{\left(1-\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\beta}\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}\right],$$

sodass der Präcessionswinkel ψ durch elliptische Integrale dritter Gattung dargestellt wird. Die Coefficienten derselben kann man vermöge der Vieta'schen Sätze über die Coefficienten algebraischer Gleichungen durch d, $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ vollständig ausdrücken. Man hat nämlich durch Vergleichung der obigen Formen des Integrales der lebendigen Kraft

$$\cos\alpha+\cos\beta+d = \frac{1}{2g}\frac{C^2n^2}{M^2h^2l}+\frac{b}{l},\quad d(\cos\alpha+\cos\beta)+\cos\alpha\cos\beta = \frac{a}{g}\frac{C^2n^2}{M^2h^2l^2}-1,$$

$$d\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\frac{a}{g}\frac{C^2n^2}{M^2h^2l^2}-\frac{b}{l}.$$

Bezüglich der Reduction des ganzen Problems auf die canonische Form vgl.:

Lottner, Reduction der Bewegung eines schweren, um einen festen Punkt rotirenden Revolutionskörpers auf die elliptischen Transcendenten (Crelle's Journ. B. 50 [1855], S. 111—125).

Richelot, eine neue Lösung des Problems der Rotation eines festen Körpers um einen Punkt (1851) (Mathem. Abhandlungen der Academie zu Berlin a. d. J. 1850, S. 1—60; Crelle's Journ. B. 44 [1852], S. 60—65).

Semmler, Reduction der Bewegung eines schweren, um einen festen Punkt seiner Axe rotirenden Rotationskörpers auf die elliptischen Transcendenten mit Hülfe der Sigmafunctionen. Göttingen 1874. (Dissertation.)

Greenhill, *On the motion of a top and allied problems in dynamics* (*Quarterly Journal of pure and appl. mathem.* Vol. 15 [1878] pp. 176—195). Die erste Reduction des Problems auf Quadraturen wurde von Lagrange gegeben (*Mécanique analytique*, p. II, sect. IX, Nr. 35).

5. Die vollständige Discussion des Problems erfordert die Betrachtung des Einflusses des anfänglichen Geschwindigkeitszustandes und umfasst viele Einzelfälle. Man kann dieselbe mit Hülfe der geometrischen Construction in Nr. 2 führen oder auch direct, indem man die dortigen Constanten oder die Constanten E und H durch die Anfangswerthe $p_0 = n$, q_0, r_0 von q und r ausdrückt. Resal hat in seiner *Cinématique pure*, p. 349 u. ffg., die Discussion durchgeführt, indem er q und r aus den Integralen des Problems sucht und alsdann verschiedene Voraussetzungen über n, q_0, r_0 eintreten lässt.

Sind a und b gleich, so fallen die Horizontalebenen von U und V zusammen und ist $c = 0$. Die obige cubische Curve geht in die Parabel UR und die Gerade UM über. Der Punkt P oscillirt zwischen der Parabel und der Horizontalebene von U.

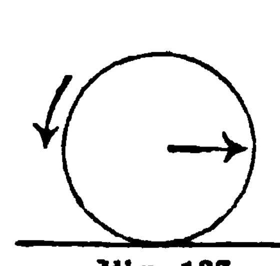
Sind p_0 und $q_0 = 0$, so wird $E = Cn\cos\vartheta_0$, $F - Cn^2 = 2gh\cos\vartheta_0$, wenn ϑ_0 den Anfangswerth von ϑ bezeichnet. Man erhält $a = b = l\cos\vartheta_0$. Setzt man $C^2n^2 : 2gMh^2 = 2\sigma l$, sodass $2\sigma l$ den Parameter der oben benutzten Parabel bedeutet, so werden die Wurzeln der cubischen Gleichung für ϑ gleich $\cos\vartheta_0$,

$\sigma \pm \sqrt{1 - 2\sigma \cos \vartheta_0 + \sigma^2}$, von denen $\sigma + \sqrt{1 - 2\sigma \cos \vartheta_0 + \sigma^2}$ dem Problem fremd ist, weil sie grösser als 1 ist, indem die Wurzel selbst für $\cos \vartheta_0 = 1$ nicht kleiner als 1 wird. Ist n sehr gross, so wird auch σ sehr gross und wenn man die Wurzelgrösse entwickelt, so sieht man, dass $\cos \vartheta$ zwischen $\cos \vartheta_0$ und $\cos \vartheta_0 - \frac{1}{2\sigma} \sin^2 \vartheta_0 + \cdots$, also im Allgemeinen zwischen engen Grenzen oscillirt.

Ueber einige andere mit dem vorliegenden verwandte Probleme, z. B. über die perimetrischen Rotationen von Sire vgl. Resal, *Cinématique pure*, Note IV, pp. 345—374 oder *Traité de Mécanique générale*, T. I, pp. 356—365.

Die hier gegebene Bearbeitung des Problems schliesst sich an Routh, *Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*, Chp. X, p. 444 sq. und die oben citirte Abhandlung von Greenhill an. Vgl. auch Poisson, *traité de mécanique*. Paris 1833, T. II, pp. 162—178, sowie Tournaire, *Sur la rotation des corps pesants*. (Comptes rendus, T. 50 [1860], pp. 476—481.)

§. 11. **Bewegung einer homogenen schweren Kugel auf der Horizontalebene mit Reibung** (Fig. 137). Die Kugel besitze eine anfängliche Translationsgeschwindigkeit parallel der Horizontalebene und eine Winkelgeschwindigkeit um den horizontalen Durchmesser, welcher senkrecht ist zu der Verticalebene, welche der Translationsgeschwindigkeit parallel ist. Weder die Schwere, noch der Normalwiderstand der Ebene, noch die Reibung vermögen die Richtung der Translationsgeschwindigkeit oder die Axe der Winkelgeschwindigkeit zu ändern, wie sich schon aus der Symmetrie der Figur ergibt. Nehmen wir an, der Sinn der Rotation sei so beschaffen, dass der Theil der Normalen des Berührungspunktes, welcher oberhalb des Mittelpunktes liegt, durch sie Geschwindigkeiten erlangt, welche der Translationsgeschwindigkeit entgegengesetzt sind. Dann wird Reibung an der Horizontalebene stattfinden, dem Sinne nach der Translation entgegengesetzt. Ist M die Masse, also Mg das Gewicht der Kugel und mithin der Druck auf die Ebene, so ist die Reibung μMg, wo μ den Reibungscoefficienten bezeichnet. Dieselbe vermindert sowohl die Geschwindigkeit v des Massenmittelpunktes, als auch die Winkelgeschwindigkeit ω um ihn, sodass die beiden Gleichungen bestehen


Fig. 137.

$$\frac{dv}{dt} = -\mu g, \quad \Sigma m r^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} = -\mu M g a,$$

wenn a den Radius der Kugel bedeutet. Mit Hülfe des Trägheitsmomentes der Kugel, nämlich $\Sigma m r^2 = \frac{2}{5} M r^2$, geht die zweite Gleichung über in

$$\frac{d\omega}{dt} = -\tfrac{5}{2} \frac{\mu g}{a}.$$

Die beiden Gleichungen liefern, wenn v_0, ω_0 die Werthe von v, ω sind, welche der Zeit $t = 0$ entsprechen:

$$v = v_0 - \mu g t, \quad \omega = \omega_0 - \tfrac{5}{2} \frac{\mu g}{a} t.$$

Man sieht, dass v und ω fortwährend abnehmen. Nach einiger Zeit wird es dahin kommen, dass eine dieser Grössen Null wird und hierauf in entgegengesetztem Sinne wächst, während die andere noch in demselben Sinne abnimmt. Es wird daher auch in einem gewissen Momente der Fall eintreten, dass $v + a\omega = 0$ wird, d. h. dass der Berührungspunkt der Kugel mit der Ebene die Geschwindigkeit Null erlangt. Dann hört das Gleiten der Kugel auf der Ebene auf und wird

die Kugel von jetzt an blos auf der Ebene rollen. Sieht man von dem meist kleinen Reibungswiderstande gegen das Rollen ab, so wird das Rollen gleichförmig sein. Ist t_1 die Zeit, zu welcher das Rollen eintritt, so wird

$$v + a\omega = v_0 + a\omega_0 - \tfrac{7}{2}\,\mu g t_0 = 0,$$

woraus folgt

$$t_0 = \tfrac{2}{7}\,\frac{v_0 + a\omega_0}{\mu g}.$$

Diese Zeit t_1 liegt zwischen den Zeiten $t_1 = \dfrac{v_0}{\mu g}$ und $t_2 = \tfrac{2}{5}\,\dfrac{a\,\omega_0}{\mu g}$, für welche v, resp. ω verschwindet. Ist $t_1 > t_2$, d. h. $v_0 > \tfrac{2}{5}\,a\omega_0$, so wird ω früher Null, als v, wechselt den Sinn und die Kugel rollt im Sinne der Translationsgeschwindigkeit v_0; ist $t_1 < t_2$, so wird v früher Null, als ω, und rollt die Kugel zurück; ist aber $t_1 = t_2$, so verschwinden v und ω zugleich und gelangt die Kugel zur Ruhe.

Complicirtere Fälle der Bewegung der Kugel auf der Horizontalebene werden wir später behandeln.

§. 12. **Bewegung eines schweren, homogenen Kreiscylinders auf der schiefen Ebene.** Der Cylinder bewege sich die schiefe Ebene hinab, so, dass seine Axe der Schnittlinie der schiefen Ebene mit dem Cylinder parallel bleibt. Ist α die Neigung dieser Ebene gegen den Horizont, M die Masse und a der Radius des Cylinders, R der Reibungswiderstand ohne Rücksichtnahme auf den Widerstand gegen das Rollen, so sind die Gleichungen der Bewegung des Massenmittelpunktes und der Bewegung um denselben

$$M\frac{dv}{dt} = Mg\sin\alpha - R,\quad \tfrac{1}{2}Ma^2\frac{d\omega}{dt} = -Ra$$

oder

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\alpha - \frac{R}{M},\quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{2R}{Ma}.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Wenn $v + a\omega = 0$ ist, so rollt der Cylinder auf der Ebene ohne zu gleiten. Damit dies stattfinde, muss $\dfrac{dv}{dt} + a\dfrac{d\omega}{dt} = 0$, d. h. $g\sin\alpha - \dfrac{3R}{M} = 0$, also $R = \tfrac{1}{3}Mg\sin\alpha$ sein. Die Reibung des Cylinders, wenn er die schiefe Ebene hinabgleitet, würde $\mu Mg\cos\alpha$ sein und da R nicht grösser sein kann als diese, so hat man $\tfrac{1}{3}Mg\sin\alpha < \mu Mg\cos\alpha$, d. h. $\operatorname{tg}\alpha < 3\mu$ als die Bedingung, unter welcher das Rollen des Cylinders stattfindet. Die diesem Falle entsprechenden Werthe von v und ω ergeben sich, wie in §. 11.

2. Wenn $v + a\omega$ nicht Null ist, so gleitet und rollt der Cylinder. Hierfür ist $R = \mu Mg\cos\alpha$.

In diesen Betrachtungen ist der Einfluss des Reibungswiderstandes gegen das Rollen (die rollende Reibung) nicht berücksichtigt. Soll derselbe berücksichtigt werden, so ist zu bedenken, dass derselbe einem Paare äquivalent ist, welches aber die Bewegung des Massenmittelpunktes nicht beeinflusst, sondern nur die Rotationsbewegung um diesen modificirt. Das Axenmoment desselben (parallel der Cylinderaxe) kann durch $kMg\cos\alpha$ dargestellt werden, wo k ein von der Natur der sich reibend berührenden Oberflächen abhängiger Coefficient ist. Daher sind die Gleichungen der Bewegung des Cylinders in diesem Falle

$$M\frac{dv}{dt} = Mg\sin\alpha - R,\quad \Sigma mr^2\cdot\frac{d\omega}{dt} = -Ra - kMg\cos\alpha,$$

oder

$$\frac{dv}{dt} = g \sin\alpha - \frac{R}{M}, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{2R}{Ma} - \frac{2kg\cos\alpha}{a^2}.$$

Soll nun blos Rollen stattfinden, so muss $v + a\omega = 0$, d. h.

$$R = \tfrac{1}{3} Mg\left(\sin\alpha + \frac{2\varkappa}{a}\cos\alpha\right)$$

sein.

§. 13. **Bewegung eines unveränderlichen Systems, welches mit einer Fläche (Oberfläche) fortwährend eine feste Ebene E berührt.**

1. Wir wollen zunächst annehmen, dass die Berührung der Fläche mit E nur in einem einzigen Punkte stattfindet, welcher im Allgemeinen in der Fläche, wie auch auf der Ebene wechseln wird, sodass die Fläche auf der Ebene rollt oder rollt und gleitet. Wir legen der Untersuchung ein festes Coordinatensystem der x, y, z zu Grunde, in Bezug auf welches ε, ε', ε'' die Richtungscosinusse der Normalen der festen Ebene und δ ihr Abstand vom Coordinatenursprung seien, sodass

$$\varepsilon x + \varepsilon' y + \varepsilon'' z - \delta = 0$$

ihre Gleichung wird. ε, ε', ε'' sind dann zugleich die Richtungscosinusse des Widerstandes R, welchen die Ebene im Berührungspunkte B leistet und $R\varepsilon = X_1$, $R\varepsilon' = Y_1$, $R\varepsilon'' = Z_1$ sind dessen Componenten parallel den festen Coordinatenaxen. Bezeichnen x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Massenmittelpunktes S, so hat man als die drei ersten Gleichungen der Bewegung:

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma X + X_1, \quad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma Y + Y_1, \quad M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma Z + Z_1. \quad (1)$$

Wir nehmen weiter die Hauptaxen des Massenmittelpunktes als Coordinatenaxen der x', y', z' an und bezeichnen mit a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' die Richtungscosinusse dieser Axen gegen die festen Coordinatenaxen. Die drei Euler'schen Gleichungen der Bewegung sind

$$\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr &= L' + (y'Z'_1 - z'Y'_1),\\
B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp &= M' + (z'X'_1 - x'Z'_1), \quad (2)\\
C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq &= N' + (x'Y'_1 - y'X'_1),
\end{aligned}$$

worin L', M', N' die Componenten des resultirenden Paares der gegebenen, am System angreifenden Kräfte in Bezug auf die Hauptaxen, x', y', z' die Coordinaten des Berührungspunktes B und X'_1, Y'_1, Z'_1 die Componenten des Widerstandes R parallel denselben Axen bedeuten. Setzt man die Componenten des resultirenden Paares der gegebenen Kräfte bezüglich des Massenmittelpunktes und der den Axen der x, y, z parallelen Axen dieses Punktes gleich L, M, N, so sind L', M', N' die Projectionen von L, M, N auf die Axen der x', y', z', nämlich:

$$L' = aL + bM + cN, \quad M' = a'L + b'M + c'N, \quad N' = a''L + b''M + c''N$$

und ebenso werden:

$$X'_1 = aX_1 + bY_1 + cZ_1, \quad Y'_1 = a'X_1 + b'Y_1 + c'Z_1, \quad Z'_1 = a''X_1 + b''Y_1 + c''Z_1.$$

Bezeichnen noch x, y, z die Coordinaten von B bezüglich der festen Axen, so hat man:

$$\begin{aligned} x - x_1 &= ax' + a'y' + a''z', \\ y - y_1 &= bx' + b'y' + b''z', \qquad (3) \\ z - z_1 &= cx' + c'y' + c''z', \end{aligned}$$

weil ferner dieser Punkt auf der festen Ebene liegt, so gilt die Gleichung

$$\varepsilon x + \varepsilon' y + \varepsilon'' z - \delta = 0 \qquad (4)$$

und zugleich besteht für ihn in Bezug auf die Hauptaxen die Gleichung der berührenden Fläche, welche

$$F(x', y', z') = 0 \qquad (5)$$

sei. Endlich hat man, da R die Richtung der gemeinschaftlichen Normale dieser Fläche und der Ebene besitzt, die Gleichungen

$$X'_1 : \frac{\partial F}{\partial x'} = Y'_1 : \frac{\partial F}{\partial y'} = Z'_1 : \frac{\partial F}{\partial z'} = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Denkt man sich die neun Cosinusse $a, b, c; \ldots$ durch die Euler'schen Winkel φ, ψ, ϑ dargestellt, so hat man als Unbekannte des Problems durch Functionen der Zeit auszudrücken: die Winkel φ, ψ, ϑ; die Componenten p, q, r der Winkelgeschwindigkeit um die Hauptaxen; die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Massenmittelpunktes S; die Coordinaten x', y', z' des Berührungspunktes B im beweglichen System; die Coordinaten x, y, z desselben Punktes im absoluten Raume oder auch statt dessen die Coordinaten $x - x_1, y - y_1, z - z_1$ bezüglich eines dem festen Coordinatensystem parallelen durch S gelegten Systems, sowie endlich den Widerstand R oder seine Componenten X'_1, X'_1, Z'_1. Zur Bestimmung dieser achtzehn Grössen liefern die Gleichungen (1) bis (6) dreizehn Bedingungen, wozu aber noch die Ausdrücke S. 406 für p, q, r, sowie die Relationen:

$$\frac{X'_1}{\varepsilon a + \varepsilon' b + \varepsilon'' c} = \frac{Y'_1}{\varepsilon a' + \varepsilon' b' + \varepsilon'' c'} = \frac{Z'_1}{\varepsilon a'' + \varepsilon' b'' + \varepsilon'' c''} \qquad (7)$$

kommen, welche man erhält, wenn man bedenkt, dass die drei Nenner die Cosinusse der Neigung des Widerstandes gegen die Hauptaxen sind. Man hat daher im Ganzen wirklich die nöthigen achtzehn Bedingungen zur Lösung des Problems.

Wenn die Fläche F die Ebene fortwährend mit einer Spitze berührt, so bleiben x', y', z' constant und hört die Bedingung auf, dass R die Richtung der Flächennormale besitze, denn diese wird an einer Spitze unbestimmt; x', y', z' sind bekannt und hat man also nur fünfzehn Unbekannte. Es fallen von den achtzehn obigen Bedingungen aber auch die drei

$$F(x', y', z') = 0, \quad X'_1 : Y'_1 : Z'_1 = \frac{\partial F}{\partial x'} : \frac{\partial F}{\partial y'} : \frac{\partial F}{\partial z'}$$

weg (die erste ist von selbst erfüllt).

Es kann aber auch der Fall eintreten, dass F die Ebene längs einer Geraden berührt. Da in diesem Falle die Ebene in allen Punkten der Geraden Tangentenebene ist, so sind die Widerstände in allen Punkten parallel und haben eine Einzelresultante mit bestimmtem, aber von Gerade zu Gerade wechselndem Angriffspunkte x', y', z'. Dieser vertritt die Stelle des obigen Berührungspunktes B und ändert sich die Anzahl der Gleichungen nicht. Dieser Fall tritt ein, wenn F abwickelbar ist. Ist aber F windschief, so findet die Berührung nur in einem Punkte der Geraden statt.

Besitzt die Fläche F eine scharfe Kante, mit welcher sie auf der Ebene gleitet, so fallen $F = 0$ und $X'_1 : Y'_1 : Z'_1 = \frac{\partial F}{\partial x'} : \frac{\partial F}{\partial y'} : \frac{\partial F}{\partial z'}$ hinweg, treten aber

an die Stelle dieser drei Bedingungen die beiden Gleichungen der Kante und die Bedingung, dass die Kante in die Ebene fällt, welche, da der Angriffspunkt x', y', z' des Widerstandes bereits in ihr liegt, sich darauf reducirt, dass die Kante auf der Richtung $(\varepsilon\,\varepsilon'\,\varepsilon'')$ senkrecht steht.

2. Eine Vereinfachung kann man in vorstehenden Gleichungen eintreten lassen, wenn man die feste Ebene zur xy-Ebene wählt. Dann ist $\varepsilon = \varepsilon' = 0$, $\varepsilon'' = 1$, $\delta = 0$ und hat man

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma X + X_1, \quad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma Y + Y_1, \quad M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma Z + Z_1 \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C-B)\,qr &= L' + (y'Z'_1 - z'Y'_1), \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)\,rp &= M' + (z'X'_1 - x'Z'_1), \qquad (2) \\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)\,pq &= N' + (x'Y'_1 - y'X'_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - x_1 &= ax' + a'y' + a''z', \\ y - y_1 &= by' + b'y' + b''z', \qquad (3) \\ z - z_1 &= cx' + c'y' + c''z, \end{aligned} \qquad z = 0 \quad (4), \qquad F(x', y', z') = 0, \quad (5)$$

$$X'_1 : \frac{\partial F}{\partial x'} = Y'_1 : \frac{\partial F}{\partial y'} = Z'_1 : \frac{\partial F}{\partial z'}, \quad (6) \qquad \frac{X'_1}{c} = \frac{Y'_1}{c'} = \frac{Z'_1}{c''}. \quad (7)$$

An die Stelle der Gleichungen (2) wird man oft mit Erfolg die entsprechenden Gleichungen treten lassen, welche sich auf das dem festen Coordinatensystem parallele System des Massenmittelpunktes beziehen und die Componenten des resultirenden Paares der continuirlichen Kräfte darstellen. Diese Componenten erhält man durch Projection der Grössen Ap, Bq, Cr, der Derivirten des resultirenden Paares der Momentankräfte auf jene Axen, nämlich:

$$Apa + Bqa' + Cra'', \quad Apb + Bqb' + Crb'', \quad Apc + Bqc' + Crc''.$$

Da R die Richtung der z-Axe hat, so sind $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$, $Z_1 = R$, reduciren sich die Componenten des Paares von R auf $-R(y-y_1)$, $R(x-x_1)$ und werden mithin (2) vertreten durch:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Apa + Bqa' + Cra'') &= L - R(y-y_1), \\ \frac{d}{dt}(Apb + Bqb' + Crb'') &= M + R(x-x_1), \\ \frac{d}{dt}(Apc + Bqc' + Crc') &= N. \end{aligned}$$

3. Es sei das System der Schwere unterworfen und finde Reibung an der festen Ebene statt. Letztere sei unter dem Winkel i gegen den Horizont geneigt. Man hat dann, wenn die x-Axe in der festen schiefen Ebene horizontal, die y-Axe positiv die schiefe Ebene hinunter und die positive z-Axe oberhalb derselben angenommen werden, der positive Sinn der x-Axe aber so bestimmt ist, dass die positive Drehung um die z-Axe die positive x-Axe zur positiven y-Axe führt, indem man die Componenten der Reibung nach den Axen der x, y mit Mf, Mf' bezeichnet, sodass f, f' ihre Verhältnisse zur Masse M des Systems darstellen:

$$\Sigma X = Mf, \quad \Sigma Y = Mg\sin i + Mf', \quad \Sigma Z = -Mg\cos i,$$

und da der Punkt B in Bezug auf die Axen des Punktes S parallel denen der

x, y, z die Coordinaten $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ besitzt, so sind L, M, N durch $-(z - z_1)Mf'$, $(z - z_1)Mf$, $(x - x_1)Mf' - (y - y_1)Mf$ zu ersetzen. Setzen wir also noch die relativen Coordinaten des Punktes B in Bezug auf S und die eben genannten Axen gleich x'', y'', z'', sodass $x'' = x - x_1$, $y'' = y - y_1$, $z'' = (z - z_1) = -z_1$, so wird das obige Gleichungssystem:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = f \qquad \frac{d}{dt}(Apa + Bqa' + Cra'') = -Mz''f' - Ry',$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = g\sin i + f' \qquad \frac{d}{dt}(Apb + Bqb' + Crb'') = Mz''f + Ry'',$$

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} = -g\sin i + \frac{R}{M} \qquad \frac{d}{dt}(Apc + Bqc' + Crc'') = M(x''f' - y''f),$$

$$\begin{aligned} x'' &= ax' + a'y' + a''z' \\ y'' &= bx' + b'y' + b''z' \\ z'' &= cy' + c'y' + c''z' \end{aligned} \qquad F(x', y', z') = 0 \qquad \frac{X'_1}{\frac{\partial F}{\partial x'}} = \frac{Y'_1}{\frac{\partial F}{\partial y'}} = \frac{Z'_1}{\frac{\partial F}{\partial z'}}$$

$$x - x_1 = x'', \quad y - y_1 = y'', \quad z - z_1 = z'', \quad z = 0, \quad \frac{X'_1}{c} = \frac{Y'_1}{c'} = \frac{Z'_1}{c''}.$$

Die Componenten der Geschwindigkeit des Berührungspunktes B sind:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx''}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + x'\frac{da}{dt} + y'\frac{da'}{dt} + z'\frac{da''}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy''}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + x'\frac{db}{dt} + y'\frac{db'}{dt} + z'\frac{db''}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz_1}{dt} + \frac{dz''}{dt} = \frac{dz_1}{dt} + x'\frac{dc}{dt} + y'\frac{dc'}{dt} + z'\frac{dc''}{dt} = 0, \quad Mz = 0.$$

Seine Geschwindigkeitscomponente senkrecht zur festen Ebene der x, y ist stets Null, da er in dieser Ebene bleibt. Er gleitet auf dieser Ebene und die Geschwindigkeit dieses Gleitens wird durch die Reibung verändert. Er gleitet aber nur so lange, als die Reibung nicht seine Geschwindigkeit zu vernichten vermag; sowie dies letztere eintritt, liegt der Berührungspunkt in der Momentanaxe und beginnt das System auf der Ebene zu rollen oder zu bohren, je nachdem die Momentanaxe in die Ebene fällt, oder unter einem spitzen oder rechten Winkel gegen sie geneigt ist. Wenn B gleitet, so ist die Reibung seiner Tangentialbeschleunigung direct entgegengesetzt und verhalten sich daher ihre Componenten Mf, Mf' wie die Richtungscosinusse seiner Geschwindigkeit oder also auch wie Componenten derselben, d. h. es ist $f : \frac{dx}{dt} = f' : \frac{dy}{dt}$ und da die Reibung dem Drucke proportional ist, so hat man zugleich $M\sqrt{f^2 + f'^2} = \mu R$, wo μ den constanten Reibungscoefficienten zwischen der Ebene und der Fläche F bedeutet. Reicht aber die Reibung hin, die Geschwindigkeit von B zu tilgen, so werden $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$ und ist das Verhältniss der Componenten der Reibung unbestimmt, das System hört auf zu gleiten. Wir setzen hier voraus, dass sobald das Gleiten aufhört, auch keine Reibung mehr stattfindet, d. h. dass die Reibung sich nur auf eine Resultante ohne Paar reducire oder die wälzende Reibung Null sei. Die Wirkung der Reibung ist überhaupt äquivalent einer Kraft F in Verbindung mit einem Paare G; die erstere wirkt in der Tangentenebene, entgegen der Tangentialbeschleunigung des Berührungspunktes, wenn die Berührung in einem einzelnen Punkte stattfindet oder ist äquivalent einer Resultanten von

Reibungskräften in dieser Ebene bei Berührung längs einer Linie oder innerhalb eines Flächenraumes; das Axenmoment des Paares ist im Allgemeinen gegen die gemeinschaftliche Normale der Berührungsflächen geneigt und kann dasselbe zerfällt werden in ein Axenmoment parallel der Tangentenebene und ein Axenmoment parallel der Normalen. Das Axenmoment parallel der Tangentenebene stellt die Wirkung der rollenden oder wälzenden Reibung dar, das parallel der Normalen gibt einen Widerstand gegen die Bewegung parallel zur Tangentenebene. Die wälzende Reibung und der letztgenannte Widerstand sind im Allgemeinen sehr klein und werden gewöhnlich ausser Acht gelassen.

§. 14. Als Beispiel zur vorstehenden Theorie behandeln wir die **Bewegung einer schweren homogenen Kugel auf einer schiefen Ebene.** Man hat hierfür, da der Massenmittelpunkt S zugleich der Kugelmittelpunkt, also z_1 constant ist, zunächst:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = f, \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = g \sin i + f', \quad 0 = R - Mg \cos i. \tag{1}$$

Ferner ist, da $A = B = C = \frac{2}{5} M s^2$, wenn s den Radius der Kugel bezeichnet, da zugleich $x'' = y'' = 0$, $z'' = s$ ist:

$$\tfrac{2}{5} s \frac{d}{dt}(ap + a'q + a''r) = -f',$$

$$\tfrac{2}{5} s \frac{d}{dt}(bp + b'q + b''r) = f,$$

$$\tfrac{2}{5} s \frac{d}{dt}(cp + c'q + c''r) = 0.$$

Nun sind p, q, r die Componenten der Winkelgeschwindigkeit um die im System festen, mit ihm beweglichen Axen der x', y', z' und da diese gegen die Axen der x'', y'', z'' die Richtungen abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ haben, so stellen

$$ap + a'q + a''r = p_1, \quad bp + b'q + b''r = q_1, \quad cp + c'q + c''r = r_1$$

die Componenten der Winkelgeschwindigkeit nach den Axen x'', y'', z'' von fester Richtung dar, für die wir aber von jetzt p, q, r schreiben wollen, da keine Verwechselung zu befürchten ist. Demnach lauten diese Gleichungen jetzt:

$$\tfrac{2}{5} s \frac{dp}{dt} = -f', \quad \tfrac{2}{5} s \frac{dq}{dt} = f, \quad \tfrac{2}{5} s \frac{dr}{dt} = 0. \tag{2}$$

Die Componenten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ der Geschwindigkeit des Punktes B lassen sich ebenfalls einfacher darstellen. Zunächst benutzen wir die Formeln B. I, S. 278 für $\frac{da}{dt}$, $\frac{da'}{dt}$, ..., mit deren Hülfe sich findet:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + (a'r - a''q)\,x' + (a''p - ar)\,y' + (aq - a'p)\,z',$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + (b'r - b''q)\,x' + (b''p - br)\,y' + (bq - b'p)\,z',$$

wo aber p, q, r die ursprüngliche Bedeutung haben.

Nun sind aber, da die Richtung BS die eines Kugelradius ist:

$$\frac{x'}{c} = \frac{y'}{c'} = \frac{z'}{c''} = \frac{s}{1},$$

d. h. $x' = cs$, $y' = c's$, $z' = c''s$ und folglich, wenn man diese Werthe in die vorstehenden Ausdrücke einsetzt und nach p, q, r ordnet:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + s\,[(a''c' - a'c'')\,p + (ac'' - a''c)\,q + (a'c - ac')\,r],$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + s\,[(b''c' - b'c'')\,p + (bc'' - b''c)\,q + (b'c - bc')\,r],$$

welche Ausdrücke aber mit Hülfe der Formeln B. I, S. 271 übergehen in

$$\frac{dx}{dt} = u + s\,(bp + b'q + b''r),$$
$$\frac{dy}{dt} = v - s\,(ap + a'p' + a''p''),$$

wobei zur Abkürzung noch $\frac{dx_1}{dt} = u$, $\frac{dy_1}{dt} = v$ gesetzt wurde. Setzen wir nun wieder p und q an die Stelle von $ap + a'q + a''r$, $bp + b'q + b''r$, so werden die Componenten der Geschwindigkeit des Punktes B:

$$\frac{dx}{dt} = u + sq, \qquad \frac{dy}{dt} = v - sp. \tag{3}$$

Die Richtigkeit dieser Formeln leuchtet auch sofort ein, wenn man bedenkt, dass sq, $-sp$ die Geschwindigkeitsbestandtheile sind, welche von den Rotationen um die y- und x-Axe herrühren, während u, v die Translationsgeschwindigkeiten des Systems sind.

Für den Fall, dass der Punkt B auf der Ebene gleitet, gelten demnach die Gleichungen:

$$\frac{du}{dt} = f, \qquad \tfrac{2}{5}s\frac{dp}{dt} = -f', \qquad M\sqrt{f^2 + f'^2} = \mu R,$$
$$\frac{dv}{dt} = g\sin i + f', \qquad \tfrac{2}{5}s\frac{dq}{dt} = f, \qquad \frac{f}{u + sq} = \frac{f'}{v - sp},$$
$$0 = R - Mg\cos i, \qquad \tfrac{2}{5}s\frac{dr}{dt} = 0.$$

Für den Fall des Rollens u. s. w. aber treten an die Stelle der beiden Gleichungen $M\sqrt{f^2 + f'^2} = \mu R$ und $f : f' = (u + sq) : (v - sp)$ die beiden

$$u + sq = 0,$$
$$v - sp = 0,$$

welche ausdrücken, dass der Punkt B jeden Augenblick in der Momentanaxe liegt oder seine Geschwindigkeit Null ist.

In beiden Fällen hat man zur Bestimmung von p, q, r, u, v, f, f', R die acht nöthigen Gleichungen.

Aus dem Gleichungssystem ergibt sich nun Folgendes:

1. Der Widerstand ist $R = Mg\cos i$, also constant während der ganzen Bewegung.

2. Die Componente r der Winkelgeschwindigkeit um die Vertikale des Massenmittelpunktes ist constant.

3. Die Elimination von f, f', im Falle des Gleitens, gibt:

$$\frac{du}{dt} = \tfrac{2}{5}s\frac{dq}{dt} \qquad \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} - g\sin i\right)^2 = \mu^2 g^2 \cos^2 i,$$
$$\frac{dv}{dt} + \tfrac{2}{5}s\frac{dp}{dt} = g\sin i, \qquad \frac{1}{u + sq}\cdot\frac{du}{dt} = \frac{1}{v - sp}\left(\frac{dv}{dt} - g\sin i\right).$$

Sind nun u_0, v_0 die Componenten der Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes zur Zeit $t = 0$, p_0, q_0 die Componenten der Winkelgeschwindigkeit um die Axen der x', y' zu derselben Zeit, so liefert die Integration der beiden ersten Gleichungen:

$$u - u_0 = \tfrac{2}{5} s (q - q_0),$$
$$v - v_0 + \tfrac{2}{5} s (p - p_0) = g \sin i \cdot t.$$

Bilden wir hiermit die Grössen $u + sq$, $v - sp$, welche die Componenten der Geschwindigkeit des Berührungspunktes B sind, nämlich

$$u + sq = \tfrac{7}{2} u - \tfrac{5}{2} u_0 + sq_0 = \tfrac{7}{2}(u - \tfrac{5}{7} u_0 + \tfrac{2}{7} sq_0) = \tfrac{7}{2} U,$$
$$v - sp = \tfrac{7}{2} v - \tfrac{5}{2} g \sin i \cdot t - \tfrac{5}{2} v_0 - sp_0 = \tfrac{7}{2}(v - g \sin i \cdot t - \tfrac{5}{7} v_0 - \tfrac{2}{7} sp_0) + g \sin i \cdot t$$
$$= \tfrac{7}{2} V + g \sin i \cdot t,$$

sodass also

$$u + sq = \tfrac{7}{2} U, \qquad U = u - \tfrac{5}{7} u_0 + \tfrac{2}{7} sq_0,$$
$$v - sp = \tfrac{7}{2} V + g \sin i \cdot t, \qquad V = v - g \sin i \cdot t - \tfrac{5}{7} v_0 - \tfrac{2}{7} sp_0,$$

so können wir zunächst U und V durch die Zeit darstellen, hiermit also auch u, v, sowie p und q. Wir führen zu dem Ende U und V in die beiden letzten der obigen Differentialgleichungen ein. Da nun $\frac{du}{dt} = \frac{dU}{dt}$, $\frac{dv}{dt} - g \sin i = \frac{dV}{dt}$ wird, so nehmen diese Gleichungen die Gestalt an:

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = \mu^2 g^2 \cos^2 i, \quad \frac{1}{U}\frac{dU}{dt} = \frac{1}{V + \frac{2}{7} g \sin i \cdot t} \cdot \frac{dV}{dt},$$

oder, wenn wir behufs weiterer Vereinfachung $\mu g \cos i \cdot t = \Theta$ und $\frac{2}{7} g \sin i \cdot t = \varkappa \Theta$ setzen, wobei also $\varkappa = \frac{2}{7} \frac{\operatorname{tg} i}{\mu}$ ist:

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dt}\right) = \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2, \quad \frac{1}{U}\frac{dU}{dt} = \frac{1}{V + \varkappa\Theta} \cdot \frac{dV}{dt}.$$

Behufs der Integration führen wir eine Hülfsvariabele σ ein, derart, dass die erste dieser Gleichungen von selbst erfüllt wird; wir setzen nämlich

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d\Theta}{dt} \cdot \sin\sigma, \quad \frac{dV}{dt} = \frac{d\Theta}{dt} \cdot \cos\sigma.$$

Mit Hülfe dieser Werthe wird die zweite der Gleichungen

$$V + \varkappa\Theta = U \cdot \operatorname{cotg}\sigma.$$

Sie gibt, differentiirt

$$\frac{dV}{dt} + \varkappa \frac{d\Theta}{dt} = \frac{dU}{dt} \operatorname{cotg}\sigma - \frac{U}{\sin^2\sigma}\frac{d\sigma}{dt}$$

und spaltet sich vermöge der Substitutionsgleichungen für σ, aus denen folgt $dV = dU \operatorname{cotg}\sigma$, $dU = \sin\sigma \cdot d\Theta$, in die beiden

$$\varkappa d\Theta = -\frac{U d\sigma}{\sin^2\sigma}, \quad \varkappa dU = -\frac{U d\sigma}{\sin\sigma}.$$

Von diesen liefert zunächst die letzte das Integral $\varkappa l U + l \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma + Const = 0$ oder

$$U^\varkappa = c \cdot \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\sigma,$$

worin c die Integrationsconstante bedeutet. Weiter ist

$$d\Theta = \frac{dU}{\sin\sigma}, \quad dV = dU \cdot \operatorname{cotg}\sigma$$

und wenn man also behufs Entfernung von σ die Combinationen

$$\cotg \tfrac{1}{2}\sigma + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma = \frac{2}{\sin \sigma} = \frac{1}{c} U^{\varkappa} + c U^{-\varkappa}$$

$$\cotg \tfrac{1}{2}\sigma - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma = 2 \cotg \sigma = \frac{1}{c} U^{\varkappa} - c U^{-\varkappa}$$

mit Hülfe des gefundenen Integrales bildet,

$$2 d\Theta = \left(\frac{1}{c} U^{\varkappa} + c U^{-\varkappa}\right) dU, \quad 2 dV = \left(\frac{1}{c} U^{\varkappa} - c U^{-\varkappa}\right) dU,$$

woraus zwischen U, V, Θ die beiden Gleichungen

$$2\Theta = \frac{U^{1+\varkappa}}{c(1+\varkappa)} + \frac{c U^{1-\varkappa}}{1-\varkappa} + C, \quad 2V = \frac{U^{1+\varkappa}}{c(1+\varkappa)} - \frac{c U^{1-\varkappa}}{1-\varkappa} + C',$$

fliessen, wenn $\varkappa \gtrless 1$ und

$$2\Theta = \frac{1}{2c} U^2 + l \cdot U^c + C, \quad 2V = \frac{1}{2c} U^2 - l \cdot U^c + C',$$

wenn $\varkappa = 1$. Sobald die Constanten C, C', c bestimmt sein werden, bestimmen diese beiden Integrale vermöge $\Theta = \mu g \cos i \cdot t$ die Grössen U, V und durch sie $u = U + \frac{5}{7} u_0 - \frac{2}{7} s q_0$, $v = V + g \sin i \cdot t + \frac{5}{7} v_0 + \frac{2}{7} s p_0$, sowie $q = \frac{1}{s}(\frac{7}{2} U - u)$, $p = \frac{1}{s}(u - \frac{7}{2} V - g \sin i \cdot t)$ als Functionen der Zeit t.

Um diese Constanten zu bestimmen, seien U_0, V_0 die Werthe von U, V für $t = 0$; man hat dann, da $\Theta = 0$ wird, für $t = 0$:

$$0 = \frac{U_0^{1+\varkappa}}{c(1+\varkappa)} + \frac{c U_0^{1-\varkappa}}{1-\varkappa} + C, \quad 2 V_0 = \frac{U_0^{1-\varkappa}}{c(1+\varkappa)} - \frac{c U_0^{1-\varkappa}}{1-\varkappa} + C',$$

wenn $\varkappa \lessgtr 1$ und

$$0 = \frac{1}{2c} U_0^2 + l \cdot U_0^c + C, \quad 2 V_0 = \frac{1}{2c} U_0^2 - l \cdot U_0^c + C',$$

wenn $\varkappa = 1$. Die Constante c ist aber eine überzählige und kam in die Rechnung durch die Integration nach σ, welche einer Differentiation folgte. Die beiden zu integrirenden Gleichungen

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2, \quad \frac{1}{U}\frac{dU}{dt} = \frac{1}{V + \varkappa\Theta} \cdot \frac{dV}{dt}$$

verlangen nur zwei Constanten und hängt also c von C, C', also von U_0, V_0 ab. Diese Abhängigkeit ergibt sich, indem man mit Hülfe der beiden Integrale die Grösse

$$2(V + \varkappa\Theta) = \frac{1}{c} U^{1+\varkappa} - c U^{1-\varkappa} + C' + C\varkappa$$

bildet, welche vermöge der Differentialausdrücke

$$2 d\Theta = \left(\frac{1}{c} U^{\varkappa} + c U^{-\varkappa}\right) dU, \quad 2 dV = \left(\frac{1}{c} U^{\varkappa} - c U^{-\varkappa}\right) dU$$

auf die Form

$$2(V + \varkappa\Theta) = 2U \frac{dV}{dU} + C' + C\varkappa$$

gebracht werden kann und sie mit dem aus der Differentialgleichung

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dt} = \frac{1}{V + \varkappa\Theta}\frac{dV}{dt}$$

folgenden Werthe $V + \varkappa\Theta = U\frac{dV}{dU}$ vergleicht. Dies liefert $C' + C\varkappa = 0$, welche Gleichung aber durch die Gleichungen der Constantenbestimmung übergeht in $2V_0 = \frac{1}{c}U_0^{1+\varkappa} - cU_0^{1-\varkappa}$, oder

$$c^2 + 2V_0U_0^{\varkappa-1}\cdot c - U_0^{2\varkappa} = 0,$$

sodass

$$c = U_0^{\varkappa-1}(-V_0 \pm \sqrt{U_0^2 + V_0^2})$$

wird und also immer reell ist. Ueber das Vorzeichen in diesem Ausdrucke entscheidet der anfängliche Geschwindigkeitszustand. Es sei z. B. die horizontale Anfangsgeschwindigkeitscomponente $u_0 + sq_0 = \frac{1}{2}U_0$ positiv, so ist auch U wenigstens eine, wenn auch noch so kurze Zeit positiv und folglich

$$\frac{dU}{d\Theta} = \frac{1}{c}U^{\varkappa} + cU^{-\varkappa} = \frac{1}{\mu g\cos i}\cdot\frac{du}{dt}$$

mit c zugleich positiv oder negativ. Daher hat c mit $\frac{du}{dt} = f$, d. h. mit dem Sinne, in welchem die Reibung parallel der x-Axe wirkt, gleiches Zeichen. Ist aber f negativ, so wird $c = -U_0^{\varkappa-1}(V_0 + \sqrt{U_0^2 + V_0^2})$ und hiermit

$$C = \frac{2}{1-\varkappa^2}(\varkappa V_0 + \sqrt{U_0^2 + V_0^2}), \quad C' = -\frac{2\varkappa}{1-\varkappa^2}(\varkappa V_0 - \sqrt{U_0^2 + V_0^2}),$$

da $C' + \varkappa C = 0$ ist.

4. Wenn $\varkappa \geqq 1$ ist, so ergibt sich aus den Gleichungen

$$2\Theta = \frac{U^{1+\varkappa}}{c(1+\varkappa)} + \frac{cU^{1-\varkappa}}{1-\varkappa} + C, \qquad 2\Theta = \frac{1}{2c}U^2 + l\cdot U^c + C,$$

und

$$2V = \frac{U^{1+\varkappa}}{c(1+\varkappa)} - \frac{cU^{1-\varkappa}}{1-\varkappa} + C' \qquad 2V = \frac{1}{2c}U^2 - l\cdot U^c + C',$$

worin $\Theta = \mu g\cos i\cdot t$ ist, dass für $U = 0$ die Grösse Θ und folglich auch die Zeit t unendlich gross werden muss; es kann also in diesem Falle die Geschwindigkeit des Berührungspunktes, deren Componenten

$$u + sq = \tfrac{1}{2}U, \quad v - sp = \tfrac{1}{2}V + g\sin i\cdot t$$

sind, niemals Null werden. Die Grösse $\varkappa$ ist $\frac{2}{7}\frac{\operatorname{tg} i}{\mu}$ und die Bedingung $\varkappa \geqq 1$ ist also $\operatorname{tg} i \geqq \frac{7}{2}\mu$.

Bewegt sich also eine schwere homogene Kugel auf einer unter einem Winkel i gegen den Horizont geneigten Ebene, dessen Tangente mindestens gleich $\frac{7}{2}$ vom Reibungscoefficienten zwischen Kugel und Ebene ist, so ist die Reibung niemals im Stande, die Geschwindigkeit des Berührungspunktes zu tilgen und kann mithin die Kugel nur gleiten, nie rollen.

Je grösser i wird, desto kleiner wird der Druck $R = Mg\cos i$ und die Reibung μR, um so leichter gleitet also die Kugel.

Mit wachsendem t, also wachsendem Θ und mithin fortwährend wachsendem U reduciren sich die vorstehenden Formeln für $\varkappa > 1$ immer mehr auf

$$\Theta = \frac{c}{2(1-\varkappa)} \cdot U^{1-\varkappa},$$

$$V = -\frac{c}{2(1-\varkappa)} \cdot U^{1-\varkappa} = -\Theta, \quad \text{also} \quad V + \Theta = 0$$

und werden, wenn man $\frac{c}{2(1-\varkappa)} = n$ setzt, indem man für U, V, Θ ihre Werthe einführt, immer näher die Gleichungen erfüllt:

$$u = \frac{1}{(n\mu g \cos i \cdot t)^{\varkappa-1}} + \tfrac{5}{7} u_0 - \tfrac{2}{7} s q_0,$$

$$v = g(\sin i - \mu \cos i)\, t + \tfrac{5}{7} v_0 + \tfrac{2}{7} s p_0,$$

welche abgekürzt lauten:

$$u = \tfrac{5}{7} u_0 - \tfrac{1}{7} s q_0, \quad v = g(\sin i - \mu \cos i)\, t.$$

Es nähert sich demnach die horizontale Componente u der Geschwindigkeit des Berührungspunktes einer Constanten, die Componente in der Richtung des steilsten Abfalles aber wird der Zeit proportional. Die Bahn des Berührungspunktes wird daher mit wachsendem t immer mehr parabolisch.

5. Ist $\varkappa < 1$, so wird $U = 0$ für $\Theta = C$, d. h. da $\Theta = \mu g \cos i \cdot t$ ist, für die Zeit

$$t_1 = \frac{C}{2\mu g \cos i} = \frac{1}{(1-\varkappa^2)\mu g \cos i}\left(\varkappa V_0 + \sqrt{U_0^2 + V_0^2}\right).$$

Für $U = 0$ wird aber $2V = C'$, also $2(V + \varkappa\Theta) = 2(C' + C\varkappa) = 0$, d. h. da $\varkappa\Theta = \frac{2}{7} g \sin i \cdot t$ ist, $V = -\frac{2}{7} g \sin i \cdot t_1$. Demnach werden die Componenten $u + sq = \frac{1}{2} U$, $v - sp = \frac{1}{2} V + g \sin i \cdot t_1$ der Geschwindigkeit des Berührungspunktes beide zugleich für $t = t_1$ Null. Es verschwindet also die Geschwindigkeit des Berührungspunktes und die Kugel beginnt zur Zeit t_1 zu rollen. Von diesem Augenblick an gilt mithin das Gleichungssystem:

$$\frac{du}{dt} = f, \qquad \tfrac{2}{5} s \frac{dp}{dt} = -f, \qquad u + sq = 0,$$

$$\frac{dv}{dt} = g \sin i + f', \qquad \tfrac{2}{5} s \frac{dq}{dt} = f', \qquad v - sp = 0,$$

$$R = Mg \cos i, \qquad \tfrac{2}{5} s \frac{dr}{dt} = 0.$$

Sind nun u_1, v_1, p_1 q_1 die Werthe von u, v, p, q für $t = t_1$, so erhält man, wie in Nr. 3.:

$$u - u_1 = \tfrac{2}{5} s (q - q_1),$$

$$v - v_1 + \tfrac{2}{5} s (p - p_1) = g \sin i\, (t - t_1).$$

Um die Constanten zu bestimmen, hat man für $t = t_1$ aus den Gleichungen von Nr. 3.:

$$U = u - \tfrac{5}{7} u_0 + \tfrac{2}{7} s q_0,$$

$$V = v - g \sin i \cdot t - \tfrac{5}{7} v_0 - \tfrac{2}{7} s p_0,$$

wofür $U = 0$, $V = -\frac{2}{7} g \sin i \cdot t_1$ ist:

$$u_1 = \tfrac{5}{7} u_0 - \tfrac{2}{7} s q_0, \quad v_1 = \tfrac{5}{7} g \sin i \cdot t_1 + \tfrac{5}{7} v_0 + \tfrac{2}{7} s p_0$$

und weil zur Zeit t_1 auch die obigen beiden Gleichungen $u + sq = 0$, $v - sp =$ gelten:

$$u_1 + s q_1 = 0, \quad v_1 - s p_1 = 0,$$

wodurch auch p_1 und q_1 bestimmt sind. Für irgend eine Zeit $t > t_1$ bestehen also die Gleichungen:

$$u - u_1 = \tfrac{2}{5} s (q - q_1), \qquad u + sq = 0,$$
$$v - v_1 + \tfrac{2}{5} s (p - p_1) = g \sin i \cdot (t - t_1), \qquad v - sp = 0.$$

Man erhält hiermit unter Berücksichtigung der Werthe der Constanten:

$$u = u_1, \quad q = q_1, \quad v - v_1 = s (p - p_1) = \tfrac{5}{7} g \sin i \cdot (t - t_1),$$

sowie

$$\frac{du}{dt} = 0, \qquad \frac{dv}{dt} = s \frac{dp}{dt} = \tfrac{5}{7} g \sin i, \qquad \tfrac{2}{5} s \frac{dp}{dt} = - f' = \tfrac{2}{7} g \sin i,$$

$$\frac{dq}{dt} = f = 0,$$

d. h.: Die horizontale Componente u der Geschwindigkeit des Mittelpunktes der rollenden Kugel ist constant und findet in ihrer Richtung kein Reibungswiderstand statt. Die Componente der Geschwindigkeit in der Richtung des stärksten Abfalles die schiefe Ebene hinab wächst der Zeit proportional. Der Kugelmittelpunkt beschreibt daher eine Parabel, parallel der schiefen Ebene, deren Hauptaxe die Richtung des stärksten Abfalles hat. Die Beschleunigung dieses Punktes in dieser Richtung ist $\tfrac{5}{7} g \sin i$ und die Reibung $- \tfrac{2}{7} Mg \sin i$. Da $R = \mu Mg \cos i$ und wegen $\varkappa < 1$ auch $\tfrac{2}{7} g \sin i < \mu g \cos i$ ist, so folgt, dass die Reibung im vorliegenden Falle nicht dem μfachen des ganzen Druckes, sondern nur einem Bruchtheil hiervon gleich ist. Die Componente q der Winkelgeschwindigkeit um den Kugeldurchmesser parallel der Linie steilsten Abfalles ist constant, sowie die um den zur schiefen Ebene senkrechten Durchmesser; die Winkelgeschwindigkeit p um den horizontalen Durchmesser ist gleichförmig beschleunigt.

6. Es seien die Anfangsgeschwindigkeiten u_0, v_0, p_0, q_0, r_0 sämmtlich Null. Dann findet in horizontaler Richtung überhaupt keine Geschwindigkeit statt, wird also auch keine Reibung erregt, d. h. es ist fortwährend $f = 0$. Demnach ist das Gleichungssystem:

$$\frac{du}{dt} = 0, \qquad \tfrac{2}{5} s \frac{dp}{dt} = - f', \qquad Mf' = \mu R, \qquad u + sq = 0,$$

oder

$$\frac{dv}{dt} = g \sin i + f', \qquad \tfrac{2}{5} s \frac{dq}{dt} = 0, \qquad u + sq = 0, \qquad v - sp = 0.$$

$$R = Mg \cos i, \qquad \tfrac{2}{5} s \frac{dr}{dt} = 0,$$

Man erhält hieraus mit Rücksicht auf den Anfangszustand:

$$u = 0, \quad q = 0, \quad u + sq = 0.$$

Der Mittelpunkt der Kugel bewegt sich also geradlinig der schiefen Ebene entlang und findet keine Rotation um eine Axe parallel der Richtung des steilsten Abfalles statt ebenso wenig wie um eine Axe senkrecht zur Ebene. Die horizontale Componente der Geschwindigkeit des Berührungspunktes ist Null.

Für den Fall des Gleitens der Kugel hat man nun:

$$\frac{dv}{dt} + \tfrac{2}{5} s \frac{dp}{dt} = g \sin i$$

und da f' aufwärts wirkt, also negativ, nämlich $f' = -\mu g \cos i$ ist:

$$\tfrac{2}{5} s \frac{dp}{dt} = \mu g \cos i.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$v + \tfrac{2}{5} sp = g \sin i \cdot t, \qquad \tfrac{2}{5} sp = \mu g \cos i \cdot t$$

und also wird:

$$v = g(\sin i - \mu \cos i)\, t, \qquad \tfrac{2}{5} sp = \mu g \cos i \cdot t$$

und die Geschwindigkeit des Berührungspunktes:

$$v - sp = g\,(\sin i - \tfrac{7}{2} \mu \cos i) \cdot t.$$

Dem Anfangszustande entsprechend kann das Gleiten nur abwärts stattfinden, daher muss diese Grösse positiv, d. h. $\sin i - \tfrac{7}{2}\mu \cos i > 0$ oder $\operatorname{tg} i > \tfrac{7}{2}\mu$ oder also $\varkappa > 1$ sein. Die Kugel kann also nur gleiten, wenn die Neigung i der schiefen Ebene gegen den Horizont die Bedingung erfüllt $\operatorname{tg} i > \tfrac{7}{2}\mu$.

Für das Rollen ist $\frac{dv}{dt} + \tfrac{2}{5} s \frac{dp}{dt} = g \sin i$, also $v + \tfrac{2}{5} sp = g \sin i \cdot t$ und hierzu kommt $v - sp = 0$, sodass

$$sp = \tfrac{5}{7} g \sin i \cdot t, \qquad v = \tfrac{5}{7} g \sin i \cdot t$$

wird. Die Reibung beträgt hier $-f' = \tfrac{2}{5} s \frac{dp}{dt} = \tfrac{2}{7} g \sin i$. Die Reibung des Gleitens ist $\mu g \cos i$; grösser als sie kann die im vorliegenden Falle stattfindende Reibung nicht sein, man muss also haben $\tfrac{2}{7} g \sin i < \mu g \cos i$, d. h. $\tfrac{2}{7} \operatorname{tg} i \leqq \mu$ oder $\varkappa \leqq 1$. Das Rollen der Kugel findet also in den Fällen statt, in welchen der Neigungswinkel i der Bedingung $\operatorname{tg} i \leqq \tfrac{7}{2}\mu$ genügt.

§. 15. Wir wollen den Fall der Bewegung einer homogenen schweren Kugel auf einer horizontalen Ebene besonders behandeln. Man hat hierfür, da $i = 0$:

$$\frac{du}{dt} = f \qquad \tfrac{2}{5} s \frac{dp}{dt} = -f' \qquad \qquad \sqrt{f^2 + f'^2} = \mu g \qquad \qquad u + sq = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = f' \qquad \tfrac{2}{5} s \frac{dq}{dt} = f \qquad \text{und} \qquad \frac{f}{u + sq} + \frac{f'}{v - sp} \qquad \text{oder} \qquad v - sp = 0.$$

$$R = My \qquad \tfrac{2}{5} s \frac{dr}{dt} = 0$$

1. Es seien wieder u_0, v_0, p_0, q_0 die Componenten der Anfangsgeschwindigkeiten und habe für den Fall des Gleitens, den wir zuerst behandeln, die positive x-Axe Richtung und Sinn der Anfangsgeschwindigkeit des Berührungspunktes $u_0 + sq_0 = \tfrac{7}{2} U_0$. Dadurch wird die ihrer Componente $v_0 - sp_0 = 0$ und $V_0 = 0$. Es bestehen also die Gleichungen (§. 14, Nr. 3.):

$$u + sq = \tfrac{7}{2} U, \qquad U = u - \tfrac{5}{7} u_0 + \tfrac{2}{7} sq_0,$$

$$v - sp = \tfrac{7}{2} V, \qquad V = v - \tfrac{5}{7} v_0 - \tfrac{2}{7} sp_0 = v - v_0, \qquad v_0 - sp_0 = 0.$$

Weiter wird

$$\varkappa = \tfrac{2}{7} \frac{\operatorname{tg} i}{\mu} = 0, \qquad C = 2\, U_0, \qquad C' = 0$$

und mithin

$$\Theta = \mu g t = U_0 - U, \qquad V = 0.$$

Daher ist

$$u + sq = \tfrac{1}{2} U = \tfrac{1}{2}(U_0 - \mu g t) = u_0 + s q_0 - \tfrac{7}{2}\mu g t, \qquad v - sp = 0;$$

d. h. die Geschwindigkeit des Berührungspunktes behält während des Gleitens constante Richtung und ist gleichförmig verzögert. Die Reibung ist daher ebenfalls constant nach Richtung und Intensität.

Für die Geschwindigkeit (u, v) des Kugelmittelpunktes hat man aus obigen Gleichungen:

$$u = U + \tfrac{5}{7}u_0 - \tfrac{2}{7}sq_0 = U_0 - \mu g t + \tfrac{5}{7}u_0 - \tfrac{2}{7}sq_0 = \tfrac{2}{7}(u_0 + sq_0) + \tfrac{5}{7}u_0 - \tfrac{2}{7}sq_0 - \mu g t,$$

d. h. $u = u_0 - \mu g t$, $v = v_0$.

Die Projection der Geschwindigkeit des Mittelpunktes auf die Richtung des Gleitens ist gleichförmig verzögert, die Projection derselben senkrecht zu dieser Richtung in der Horizontalebene constant; der Mittelpunkt beschreibt demnach, so lange die Kugel gleitet, einen Bogen einer horizontalen Parabel, deren Hauptaxe der Richtung des Gleitens parallel läuft. Dieser Satz rührt von J. Albr. Euler, dem Sohne L. Euler's her (*Mém. de l'Acad. de Berlin* 1758, p. 284).

Um ihre Gleichung zu erhalten, hat man

$$u = \frac{dx}{dt} = u_0 - \mu g t, \qquad v = \frac{dy}{dt} = 0$$

und hieraus, da $x = y = 0$ für $t = 0$, wenn der Ursprung des Coordinatensystems die Anfangslage des Berührungspunktes ist:

$$x = u_0 t - \tfrac{1}{2}\mu g t^2, \qquad y = v_0 t,$$

mithin nach Elimination von t:

$$(\mu g y - u_0 v_0)^2 = v_0^2 (u_0^2 - 2\mu g x).$$

Die Coordinaten α, β des Scheitels erhält man, indem man $x + \alpha$, $y + \beta$ für x und y in diese Gleichung einsetzt und α, β so bestimmt, dass die constanten Glieder verschwinden. Dies gibt $\alpha = \frac{u_0^2}{2\mu g}$, $\beta = \frac{u_0 v_0}{\mu g}$. Die Scheitelgleichung der Parabel ist also $y^2 = -\frac{v_0^2}{2\mu g}x$; ihr Parameter also $\frac{v_0^2}{2\mu g}$.

Die Componenten der Winkelgeschwindigkeit ergeben sich aus den obigen Gleichungen für die Componenten der Geschwindigkeit des Berührungspunktes, nämlich

$$p = \frac{v_0}{s}, \qquad q = \frac{1}{s}(\tfrac{1}{2}U - u) = q_0 - \tfrac{5}{2}\frac{\mu g t}{s}.$$

Die Componente der Winkelgeschwindigkeit um die Axe parallel der Richtung des Gleitens ist constant, um eine hierzu senkrechte horizontale Axe aber gleichförmig verzögert.

2. Die Bahn des Mittelpunktes ist nur so lange parabolisch, als die Kugel gleitet. Das Gleiten hört auf, sobald die Geschwindigkeit

$$u + sq = \tfrac{1}{2}U = u_0 + s_0 q_0 - \tfrac{7}{2}\mu g t$$

des Berührungspunktes Null wird. Dies und damit das Rollen der Kugel erfolgt mit der Zeit t_1, welche der Gleichung genügt

$$t_1 = \tfrac{2}{7}\frac{u_0 + sq_0}{\mu g} = \frac{U_0}{\mu g}.$$

Sind u_1, v_1 die Componenten der Geschwindigkeit des Mittelpunktes für diese Zeit t_1, so hat man aus den obigen Formeln $u = u_0 - \mu g t$, $v = v_0$:

$$u_1 = u_0 - \mu g t_1 = u_0 - \tfrac{2}{7}(u_0 + sq_0) = \tfrac{5}{7}u_0 - \tfrac{2}{7}sq_0, \qquad v_1 = v_0.$$

Zu derselben Zeit t_1 treten aber vermöge des Rollens die Bedingungen

$$u + sq = 0, \qquad v - sp = 0$$

ein. Daher geben diese $u_1 + sq_1 = 0$, $v_1 - sp_1 = 0$ und es bestehen daher für irgend eine auf t_1 folgende Zeit t die Gleichungen:

$$u - u_1 = \tfrac{2}{5}s(q - q_1), \qquad u + sq = 0, \quad u_1 = u_0 - \mu g t_1, \quad u_1 + sq_1 = 0,$$
$$v - v_1 + \tfrac{2}{5}s(p - p_1) = 0, \qquad v - sp = 0, \quad v_1 = v_0, \quad v_1 - sp_1 = 0,$$

woraus folgt: $u - u_1 = \frac{2}{5}s(q - q_1) = -s(q - q_1)$, also $q = q_1$, $u = u_1$; $v - v_1 = -\frac{2}{5}s(p - p_1) = s(p = p_1)$, also $p = p_1$, $v = v_1 = v_0$.

Es bleiben demnach die Componenten u, v der Geschwindigkeit des Mittelpunktes constant und behält diese selbst denselben Werth $\sqrt{u_1^2 + v_0^2}$ und dieselbe Richtung. Ebenso bleiben die Componenten p, q der Winkelgeschwindigkeit constant. Die Berührungspunkte mit der Ebene liegen in gerader Linie, nämlich in der Tangente der Parabel, welche die Projection der Bahn des Mittelpunktes bis zur Zeit t_1 darstellt.

Die Reibung ist von der Zeit t_1 an Null, wie aus $\frac{du}{dt} = 0 = f$, $\frac{dv}{dt} = 0 = f'$ folgt.

3. Ein interessanter Specialfall ist $v_0 = 0$. Hierfür ist für die Zeit des Gleitens $u = u_0 - \mu g t$, $v = 0$. Die Bahn des Mittelpunktes ist eine Gerade parallel der x-Axe, er beschreibt sie gleichförmig verzögert. Ferner ist $p = 0$, $q = q_0 - \frac{5}{2}\frac{\mu g t}{s}$. Von der Zeit $t_1 = \frac{2}{7}\frac{u_0 + sq_0}{\mu g}$ hört das Gleiten auf und rollt die Kugel. Die Geschwindigkeit ihres Mittelpunktes ist dann constant gleich $u_1 = u_0 - \mu g t_1 = \frac{5}{7}u_0 - \frac{2}{7}sq_0$. Wenn u während des Gleitens, also vor der Zeit t_1 Null und hierauf negativ wird, d. h. wenn für die Zeit t_2 zwischen 0 und t_1 die Gleichung $u_0 - \mu g t_2 = 0$ erfüllt wird, so wird die Kugel zurücklaufen. Es ist nämlich $t_2 < t_1$, d. h. $\frac{u_0}{2g} < \frac{2}{7}\frac{u_0 + sq_0}{\mu g}$, also $u_0 < \frac{2}{7}(u_0 + sq_0)$ und folglich $u_1 = u_0 - \frac{2}{7}(u_0 + sq_0)$ negativ. u_0 muss aber positiv sein, damit $u_0 - \mu g t_2 = 0$ für eine positive Zeit t_2 verschwinden könne.

4. Auch wenn v_0 nicht Null ist, kann der Rücklauf der Kugel eintreten. Der Mittelpunkt beginnt den Parabelbogen zu beschreiben mit der Anfangsgeschwindigkeit $\sqrt{u_0^2 + v_0^2}$ in der Richtung der Anfangstangente; zur Zeit t_1, von wo an er geradlinig in der Richtung der Endtangente fortgeht und die Kugel rollt, ist seine Geschwindigkeit $\sqrt{u_1^2 + v_0^2} = \sqrt{(\frac{5}{7}u_0 - \frac{2}{7}sq_0)^2 + v_0^2}$. Hat nun der Mittelpunkt zur Zeit t_1 den Scheitel der Parabel noch nicht erreicht, so erscheint diese Geschwindigkeit in Bezug auf die Anfangsrichtung rechtläufig, sowie er aber den Scheitel überschritten hat, rückläufig. Die Zeit, welche er aber braucht, um den Scheitel zu erreichen, ergibt sich aus $y = v_0 t$, wenn man für y die Ordinate $\beta = \frac{u_0 v_0}{\mu g}$ des Scheitels einsetzt, nämlich $t_2 = \frac{u_0}{\mu g}$. Da sie positiv sein muss, so bewegt sich der Mittelpunkt überhaupt nur dann nach dem Scheitel hin, wenn u_0 positiv ist. Soll also die Kugel rechtläufig gleiten, so muss $t_1 < t_2$, d. h. $\frac{2}{7}(u_0 + sq_0) < u_0$, d. h. $\frac{2}{5}sq_0 < u_0$ sein. Da nun t_1 positiv, also $u_0 + sq_0 > 0$ ist, so folgt $sq_0 > -u_0$. Es muss also für die Rechtläufigkeit sq_0 zwischen $-u_0$ und $+\frac{5}{2}u_0$ liegen. Ist aber $t_1 > t_2$, so hat der Mittelpunkt den Parabelscheitel

bereits überschritten, bis die Kugel zu rollen anfängt. Sie rollt daher in der Richtung einer Tangente fort, welche mit der Anfangsrichtung einen stumpfen Winkel bildet und ihre Bewegung erscheint rückläufig. Damit dies eintrete, muss u_0 positiv und $s q_0 > \frac{5}{2} u_0$ sein.

Ueber das Problem der Bewegung einer homogenen schweren Kugel auf einer Ebene mit Rücksicht auf Reibung ist von Literatur insbesondere anzuführen:

Coriolis, *Théorie mathématique des effets du jeu de billard*, Paris 1835, Cap. I.
Minding, Handbuch der theoretischen Mechanik. Berlin 1838. S. 325 etc.

Résal, *Etude géometrique sur le mouvement d'une sphère glissant ou roulant sur un plan horizontal.* (*Compt. rend. de l'Acad. des sciences*, T. LXVIII (1869), p. 1158.) — *Etude géometrique sur le mouvement d'une sphère pesante glissant sur un plan horizontale.* (*Nouv. Ann. de Math.* 2e Sér., T. II (1872), p. 193.)

Amthor, Ueber die Bewegung eines Körpers auf einer krummen Fläche mit Rücksicht auf gleitende Reibung (Dissertation). Leipzig 1869.

Jullien, *Problèmes de mécanique rationelle,* T. II, p. 192. (2ième édit.)

Ueber verwandte Probleme vgl.:

Piper, Ueber die Bewegung eines Körpers, dessen Oberfläche eine im Raume feste Curve berührt. Dessau 1879 (Dissert. Jena).

§. 16. Eine homogene, schwere Kreisfläche erleidet eine Momentanschraubenbewegung und fällt nach einer gewissen Zeit auf eine horizontale Ebene auf, sodass sie dieselbe mit einem Punkte des Randes berührt. Wie bewegt sich die Scheibe auf der Ebene weiter und wann gelangt sie (nach einer Reihe von Schwankungen) zur Ruhe?

§. 17. Bewegung eines schweren Körpers, dessen Centralellipsoid ein Rotationsellipsoid ist und welcher mit einer der Rotationsaxe angehörenden Spitze eine horizontale Ebene berührt (Kreisel) (Fig. 138).

Fig. 138.

Es sei der Massenmittelpunkt S der Ursprung eines Coordinatensystems der x, y, z von festen Axenrichtungen, dessen z-Axe vertical ist, sowie eines zweiten beweglichen, im System festen des x', y', z', dessen z'-Axe mit der Rotationsaxe des Centralellipsoids zusammenfällt. Der Abstand der Spitze P von S sei $SP = h$, ψ, φ, ϑ die Euler'schen Winkel, N der Widerstand der Ebene; ferner seien $A = B$, C die Trägheitsmomente in Bezug auf die Axen der x', y' und z' und p, q, r die Componenten der Winkelgeschwindigkeit ω um sie. Dann sind die Gleichungen der Bewegung des Massenmittelpunktes S in Bezug auf ein festes, dem der x, y, z paralleles Coordinatensystem mit dem Ursprung in der Horizontalebene

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} = 0, \quad \frac{d^2 y_1}{d t^2} = 0, \quad M \frac{d^2 z_1}{d t^2} = - g M + N.$$

Die Projection dieses Punktes auf die Horizontalebene beschreibt eine Gerade; er selbst oscillirt aber zugleich in Folge der Rotation auf und nieder. Die Euler'schen Gleichungen werden, da das Axenmoment $Nh \sin \vartheta$ des Widerstandes in die Knotenlinie SK fällt

$$A\frac{dp}{dt} + (C - A)\,qr = Nh \sin\vartheta \cos\varphi,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = -\,Nh \sin\vartheta \sin\varphi,$$

$$C\frac{dr}{dt} = 0.$$

Die dritte dieser Gleichungen gibt das Integral $r = n$, d. h. die Winkelgeschwindigkeit um die Rotationsaxe ist constant. Das Axenmoment der Momentankräfte in Bezug auf die Verticale des Punktes S ist constant, da weder N, noch das Gewicht dasselbe ändern können, d. h. es ist, wenn c, c', c'' die Richtungscosinusse der Verticalen gegen die Axen der x', y', z' sind:

$$Apc + Bqc' + Crc' = E;$$

das Princip der lebendigen Kraft gibt

$$A(p^2 + q^2) + Cn^2 + Mv^2 = -\,2gMh\cos\vartheta + H,$$

wenn v die Verticalcomponente der Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes S ist. Die Constante H bestimmt sich durch den anfänglichen Geschwindigkeitszustand $(p_0, q_0, v_0, \vartheta_0)$.

Zugleich hat man

$$c = \sin\vartheta \sin\varphi,\quad c' = \sin\vartheta\cos\varphi,\quad c'' = \cos\vartheta,$$

$$p = \sin\varphi \sin\vartheta\frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi\frac{d\vartheta}{dt},\qquad q = \cos\varphi\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Durch Einführung dieser Grössen in die Integrale nehmen diese die Formen an

$$A\sin^2\vartheta\frac{d\psi}{dt} + Cn\cos\vartheta = E,$$

$$A\sin^2\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + (A + Mh^2\sin^2\vartheta)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = -\,2gMh\cos\vartheta - Cn^2 + H,$$

indem $v = \dfrac{d(h\cos\vartheta)}{dt}$ ist.

In dem speciellen Falle $p_0 = q_0 = 0$ und folglich $\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 = 0$, d. h. wenn anfangs blos eine Rotation um die Axe des Körpers stattfindet, in Verbindung mit einer blos horizontalen Translationsgeschwindigkeit, hat man

$$A\sin^2\vartheta\frac{d\psi}{dt} = Cn(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta),$$

$$A\sin^2\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + (A + Mh^2\sin^2\vartheta)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2gMh(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)$$

und gelangt durch Elimination von $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)$ zu der Gleichung

$$\left(\sqrt{A + Mh^2\sin^2\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2Mgh(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta) - \frac{C^2n^2}{A}\left(\frac{\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right)^2,$$

welche dieselbe Behandlung gestattet, wie bei dem Problem §. 8. Man zieht daraus dieselben Folgerungen, wie dort, insbesondere:

Die Axe des Kreisels hat eine regelmässig periodische Nutation gegen die Verticale von constanter Oscillationsdauer. Die Winkelgeschwindigkeit ist ein Maximum für das Ende des Niederganges

und ein Minimum für die grösste Erhebung der Axe. Die Präcession der Knotenlinie der Aequatorebene und der Horizontalebene ist ungleichförmig, aber immer von demselben Sinne, harmonirend mit der Rotation um die Axe des Körpers; ihre Periode ist gleich der halben Nutationsperiode.

Die relative Bahn der Spitze P auf der in gleichförmiger Translation begriffenen Horizontalebene ist eine Art Rosette, welche zwischen zwei concentrischen Kreisen enthalten ist; dieselbe berührt den grösseren Kreis, steht mit ihren Spitzen senkrecht auf dem kleineren und schliesst sich nur in besonderen Fällen.

Vgl. über vorliegendes Problem, welches auch als besonderer Fall von §. 13 behandelt werden kann, ausser der dort angeführten Schrift von Amthor noch:

Finck, *Note sur la toupie* (*Nouvelles Annales de Mathem.* T. 9 [1850], p. 310—316).

Jullien, *Problème de mécanique rätionelle*, T. II, p. 186—189.

V. Capitel.

Die Bewegungsgleichungen eines beliebigen veränderlichen Systems. D'Alembert's Princip. Das Gauss'sche Princip des kleinsten Zwanges. Newton's Satz über die Aehnlichkeit der Bewegungen.

§. 1. Es sei ein beliebiges System von n Massenpunkten m_i gegeben, auf welches sowohl äussere als innere Kräfte einwirken; dasselbe sei frei, d. h. nicht an Bedingungen gebunden, dass gewisse Punkte auf gegebenen Curven oder Flächen bleiben sollen und dgl. Sind X_i, Y_i, Z_i die Componenten der Resultanten P_i aller auf m_i wirkenden Kräfte, parallel den Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems und x_i, y_i, z_i die Coordinaten von m_i, so sind

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i$$

die Bewegungsgleichungen desselben. Aehnliche Gleichungen erhält man für $i = 1, 2, 3 \ldots n$, d. h. für alle Punkte des Systems; im Ganzen $3n$. Die Grössen X_i, Y_i, Z_i sind Functionen der Coordinaten der n Punkte, deren Differentialquotienten nach der Zeit t und von t selbst, können zum Theil constant, insbesondere Null sein u. s. w. Man kann diese $3n$ Gleichungen in eine einzige zusammenfassen, welche vermöge der Willkürlichkeit gewisser darin vorkommender Grössen sofort wieder in sie zerfällt werden kann, ihrer Bedeutung wegen aber von Wichtigkeit ist. Bringen wir nämlich in jeder der drei Gleichungen die rechten Seiten auf Null, multipliciren sie mit willkürlichen unendlich kleinen virtuellen Verschiebungen δx_i, δy_i, δz_i der Punkte, addiren sie alle drei und summiren hierauf nach i durch das ganze System hindurch, so ergibt sich

$$\Sigma\left\{\left(m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - X_i\right)\delta x_i + \left(m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - Y_i\right)\delta y_i + \left(m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - Z_i\right)\delta z_i\right\} = 0,$$

eine Gleichung, welche vermöge der Willkürlichkeit der Grössen δx, δy, δz gleichbedeutend mit den $3n$ Bewegungsgleichungen des Systems ist.

Sowohl das System der Kräfte $m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}$, $m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}$, $m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}$, oder, was dasselbe ist, der Kräfte $m_i \varphi_i$, deren Componenten sie sind, als das System der gegebenen Kräfte P_i (X_i, Y_i, Z_i) vermag dem Punktsystem die Bewegung zu ertheilen, welche dasselbe annimmt. Daher sind beide Kräftesysteme äquivalent und halten sich folglich, wenn man eines von ihnen, z. B. das letzte, umkehrt, Gleichgewicht. Nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für ein freies System muss daher die Summe der virtuellen Arbeiten aller Kräfte

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - X_i, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - Y_i, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - Z_i$$

für jede beliebige virtuelle Verschiebung des Systems, d. h. für jede Wahl der Grössen δx_i, δy_i, δz_i verschwinden. Dies ist der Sinn der vorstehenden Gleichung.

Die Kräfte $m_i \varphi_i$, welche den Systempunkten m_i ihre Bewegung zu ertheilen vermögen und zwar jedem für sich so, als ob er nicht mit den übrigen das System bildete, heissen bei manchen Autoren Effectivkräfte und im umgekehrten Sinne genommen, Reactionskräfte. Da es für das Gleichgewicht einerlei ist, welches von den beiden Kräftesystemen, das der $m_i \varphi_i$ oder das der P_i, umgekehrt wird, so kann man den Inhalt jener Gleichung auch so aussprechen:

Das System der gegebenen Kräfte P_i und das der Reactionskräfte $-m_i \varphi_i$ halten sich in jedem Augenblicke während der Bewegung an dem Punktsysteme Gleichgewicht.

Da die gegebenen Kräfte P_i, welche auf das System einwirken, den Bewegungszustand jeden Augenblick abändern, so muss, damit der Bewegungszustand für jeden Zeitmoment bestimmt werden könne, derselbe für irgend eine Zeit, z. B. für $t = 0$ gegeben sein. Für diesen Anfangszustand müssen die Geschwindigkeiten aller Systempunkte nach Grösse, Richtung und Sinn bekannt oder wenigstens solche Bedingungen gegeben sein, mit Hülfe deren sie sich ermitteln lassen. Uebrigens kann dieser Anfangszustand auch der Zustand der Ruhe des Systems sein. An Stelle der Anfangsgeschwindigkeiten kann man auch ein System von Momentankräften K_i geben, welche fähig sind, dieselben zu erzeugen. Dies System ist alsdann dem System der Momentankräfte $m_i v_i$ für die Zeit $t = 0$ ebenso äquivalent, wie das System der Kräfte P_i es in Bezug auf $m_i \varphi_i$ ist.

Sind Ξ_i, H_i, Z_i die Componenten von K_i, so führen dieselben Schlüsse, wie oben, zu der Gleichung

$$\Sigma\left\{\left(m_i\frac{dx_i}{dt}-\Xi_i\right)\delta x_i+\left(\frac{dy_i}{dt}-H_i\right)\delta y_i+\left(m_i\frac{dz_i}{dt}-Z_i\right)\delta z_i\right\}=0,\ (t=0),$$

welche vermöge der Willkürlichkeit der Grössen δx_i, δy_i, δz_i in $3n$ Gleichungen zerfällt werden kann.

§. 2. Wir wollen die Hauptgleichung des §. 1 in die Form bringen:

$$\Sigma m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i+\frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i+\frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i\right)=\Sigma\left(X_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i\right).$$

Sie drückt aus, dass die virtuelle Arbeit der Kräfte $m_i\varphi_i$ der virtuellen Arbeit der Kräfte P_i gleich ist für jede beliebige Verschiebungsart des Systems. Sind nun X_i, Y_i, Z_i die partiellen Differentialquotienten einer Function U der Coordinaten der Systempunkte nach x_i, y_i, z_i genommen, nämlich

$$X_i=\frac{\partial U}{\partial x_i},\qquad Y_i=\frac{\partial U}{\partial y_i},\qquad Z_i=\frac{\partial U}{\partial z_i},$$

so wird die virtuelle Arbeit der Kräfte P_i rechter Hand:

$$\Sigma\left(X_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i\right)=\Sigma\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial U}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial U}{\partial z_i}\delta z_i\right)=\delta U$$

und nimmt jene Gleichung die Form an:

$$\Sigma m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i+\frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i+\frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i\right)=\delta U.$$

Die Function U, deren Natur in den einfachsten Fällen bereits S. 193 erörtert wurde und welche den Namen „Kräftefunction" führt, kann in folgenden Fällen leicht gebildet werden:

1. Wenn auf die Systempunkte Kräfte P_i von constanten Richtungen $(\alpha_i\,\beta_i\,\gamma_i)$ und Intensitäten wirken. Denn für eine solche ist

$$X_i=P_i\cos\alpha_i,\quad Y_i=P_i\cos\beta_i,\quad Z_i=P_i\cos\gamma_i,$$

$$X_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i=P_i(\cos\alpha_i\cdot\delta x_i+\cos\beta_i\cdot\delta y_i+\cos\gamma_i\cdot\delta z_i)$$
$$=\delta\cdot P_i(x_i\cos\alpha_i+y_i\cos\beta_i+z_i\cos\gamma_i),$$

mithin

$$U=\Sigma P_i(x_i\cos\alpha_i+y_i\cos\beta_i+z_i\cos\gamma_i)=\Sigma(A_ix_i+B_iy_i+C_iz_i),$$

wo A_i, B_i, C_i von t unabhängig sind, aber mit i variiren können.

2. Wenn Kräfte P_i wirken, deren Richtung senkrecht zu festen Ebenen $x\cos\alpha_i+y\cos\beta_i+z\cos\gamma_i-p=0$ und deren Intensitäten Functionen $f_i(\varrho_i)$ von dem Abstande

$$\varrho_i=-(x_i\cos\alpha_i+y_i\cos\beta_i+z_i\cos\gamma_i-p)$$

der Systempunkte von diesen Ebenen sind. Denn dann ist

$$X_i=f_i(\varrho_i)\cos\alpha_i,\quad Y_i=f_i(\varrho_i)\cos\beta_i,\quad Z_i=f_i(\varrho_i)\cos\gamma_i;$$

$$X_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i=f_i(\varrho_i)\,[\cos\alpha_i\cdot\delta x_i+\cos\beta_i\cdot\delta y_i+\cos\gamma_i\cdot\delta z_i]$$
$$=-f_i(\varrho_i)\cdot\delta\varrho_i=\delta\cdot\int-f_i(\varrho_i)\,d\varrho_i,$$

mithin

$$U = \Sigma \int - f_i(\varrho_i)\, d\varrho_i.$$

3. Wenn die Kräfte P_i Attractionen nach festen Centren C_i (a_i, b_i, c_i) und ihre Intensitäten Functionen der Entfernung r_i von diesen sind. Dann wird nämlich

$$X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i = -P_i \left[\frac{x_i - a_i}{r_i}\delta x_i + \frac{y_i - b_i}{r_i}\delta y_i + \frac{z_i - c_i}{r_i}\delta z_i\right]$$

$$= -P_i\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial r_i}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial r_i}{\partial z_i}\delta z_i\right) = -P_i \delta r_i = d \cdot \int - P_i\, dr_i,$$

also

$$U = \Sigma \int - P_i\, dr_i.$$

4. Wenn die Kräfte P_i gegenseitige Anziehungen der Systempunkte unter einander sind. Bezeichnen wir nämlich die Intensität der Kraft, mit welcher sich die Massen m_i und m_k anziehen, durch P_{ik}, so sind die Componenten der an m_i angreifenden Kraft $-P_{ik}\frac{\partial r_{ik}}{\partial x_i}$, $-P_{ik}\frac{\partial r_{ik}}{\partial y_i}$, $-P_{ik}\frac{\partial r_{ik}}{\partial z_i}$, oder wenn man $\int - P_{ik} dr_{ik} = R_{ik}$ setzt: $\frac{\partial R_{ik}}{\partial x_i}$, $\frac{\partial R_{ik}}{\partial y_i}$, $\frac{\partial R_{ik}}{\partial z_i}$. Die Componenten der an m_k angreifenden Kraft sind dann ebenso $\frac{\partial R_{ik}}{\partial x_k}$, $\frac{\partial R_{ik}}{\partial y_k}$, $\frac{\partial R_{ik}}{\partial z_k}$. Nun wirken auf m_1 Kräfte in den Richtungen nach allen übrigen Punkten $m_2, m_3, \ldots m_n$, daher sind die Componenten der ganzen an m_1 wirkenden Kraft:

$$X_1 = \frac{\partial (R_{12} + R_{13} + \cdots R_{1n})}{\partial x_1},$$

$$Y_1 = \frac{\partial (R_{12} + R_{13} + \cdots R_{1n})}{\partial y_1},$$

$$Z_1 = \frac{\partial (R_{12} + R_{13} + \cdots R_{1n})}{\partial z_1}.$$

Für den Punkt m_2 erhält man ebenso X_2, Y_2, Z_2, indem man die eingeklammerte Summe durch $R_{21} + R_{23} + \cdots + R_{2n}$ ersetzt u. s. f. Die Grössen R hängen nur von den Coordinaten der beiden Punkte ab, deren Indices ihnen angehängt sind; es sind daher die Differentialquotienten derselben nach Coordinaten mit anderen Indices Null. Daher kann man der Summe $R_{12} + R_{13} \cdots + R_{1n}$ die Summe aller übrigen R zufügen und erhält die Kräftefunction

$$U = R_{12} + R_{13} + \cdots + R_{1n} + R_{23} + R_{24} + \cdots + R_{2n} + \cdots + R_{n-1,\,n} = \Sigma R_{ik},$$

sodass

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

$$X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i = \delta U.$$

5. Wenn auf Punkte des Systems theils Kräfte der unter 1., theils solche, welche unter 2., 3. oder 4. aufgeführt sind, wirken. Die Kräftefunction ist dann die Summe von Gliedern, welche von den den einzelnen Kräftegruppen entsprechenden Kräftefunctionen gebildet werden. Die Attractionsgesetze, welche hierbei zu Grunde gelegt werden können, sind willkürlich, können auch von Punkt zu Punkt verschieden sein, sowohl nach der Kraftintensität als auch nach dem Sinne der Kraft, als auch nach der Stärke der Anziehung in der Einheit der Ent-

fernung. Auch ist es nicht nöthig, anzunehmen, dass jedes Centrum alle Massen anzieht.

§. 3. Sollen an die Stelle der $3n$ Coordinaten $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n$ neue Coordinaten $q_1, q_2, \ldots q_{3n}$ in die Bewegungsgleichungen oder in die Hauptgleichung des §. 1 eingeführt werden, so gestaltet sich die Ausführung dieser Operation folgendermassen. Man multiplicire die $3n$ Gleichungen

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} Z_i$$

resp. mit $\frac{\partial x_i}{\partial q_s}, \frac{\partial y_i}{\partial q_s}, \frac{\partial z_i}{\partial q_s}$, addire sie und summire nach i. Man erhält dann:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right).$$

Indem man nun dem Index s die Werthe $1, 2, \ldots 3n$ beilegt, erhält man $3n$ Gleichungen dieser Art und indem man sie mit den willkürlichen Variationen $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_{3n}$ der neuen Variabelen multiplicirt und addirt, weiter:

$$\sum_s \sum_i m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 y^2}{dt^2} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) \delta q_s$$
$$= \sum_s \sum_i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) \delta q_s.$$

Indem man die Ordnung der beiden Summationen umkehrt, erhält man

$$\sum_i m_i \left\{ \frac{d^2 x_i}{dt^2} \cdot \sum_s \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \cdot \sum_s \frac{\partial y_i}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \cdot \sum_s \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \delta q_s \right\}$$
$$= \sum_i \left\{ X_i \sum_s \frac{\partial x_i}{\delta q_s} \delta q_s + Y_i \sum_s \frac{\partial y_i}{\partial q_s} \delta q_s + Z_i \sum_s \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \delta q_s \right\}.$$

Die Vergleichung dieser Gleichung mit der früheren

$$\sum m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right) = \sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i)$$

zeigt, dass an die Stelle der Variationen $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ blos die Ausdrücke

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_{3n}} \delta q_{3n},$$
$$\frac{\partial y_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial q_{3n}} \delta q_{3n},$$
$$\frac{\partial z_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial q_{3n}} \delta q_{3n}$$

treten. Existirt eine Kräftefunction U, so nimmt die rechte Seite der Gleichung die Form an:

$$\sum_s \sum_i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) \delta q_s$$
$$= \sum_s \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) \delta q_s = \sum_s \frac{\partial U}{\partial q_s} \delta q_s.$$

Die neuen Coordinaten q sind von einander unabhängig, wie die Coordinaten x, y, z und zerfällt die obige Gleichung in $3n$ Gleichungen, indem man die Coefficienten der $q_1, q_2, \ldots q_{3n}$ der Reihe nach gleich Null setzt.

§. 4. Wir nehmen jetzt an, das System der Massenpunkte m_i sei nicht mehr frei, sondern Bedingungen unterworfen und stellen die Differentialgleichungen der Bewegung für dasselbe auf. Wir beschränken uns hierbei aber ausdrücklich auf solche Bedingungen, deren Einfluss durch Kräfte von bestimmter Intensität und Richtung vertreten werden kann und welche analytisch durch Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten der Punkte, welche ihnen genügen sollen, darstellbar sind. Von Bedingungen, welche durch Ungleichungen ausgedrückt werden, sehen wir ab. Ersetzen wir die Bedingungen durch Kräfte, so kann das System als ein freies angesehen werden. Es seien $S^{(i)}$ die Resultanten aller Bedingungskräfte, welche an den Punkten m_i angreifen, $S_x^{(i)}$, $S_y^{(i)}$, $S_z^{(i)}$ ihre Componenten; indem wir diese den Componenten X_i, Y_i, Z_i der äusseren und inneren Kräfte hinzufügen, erhalten wir gemäss §. 1 als Bewegungsgleichungen:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + S_x^{(i)}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + S_y^{(i)}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + S_z^{(i)},$$

worin die Grössen $S_x^{(i)}$, $S_y^{(i)}$, $S_z^{(i)}$ aber noch zu bestimmen sind. Indem wir ähnlich, wie §. 1 verfahren und die Bewegungsgleichungen mit den Componenten δx_i, δy_i, δz_i willkürlicher virtueller Verschiebungen multipliciren, sie addiren und hierauf nach dem Index i summiren, ergibt sich die eine Gleichung

$$\Sigma \left\{\left(m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - X_i\right) \delta x_i + \left(m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - Y_i\right) \delta y_i + \left(m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - Z_i\right) \delta z_i\right\}$$
$$= \Sigma \left(S_x^{(i)} \delta x_i + S_y^{(i)} \delta y_i + S_z^{(i)} \delta z_i\right),$$

welche aber wegen der Willkürlichkeit der δx_i, δy_i, δz_i wiederum in die ursprünglichen $3n$ Gleichungen zerfällt werden kann.

Denkt man sich die Glieder auf der linken Seite dieser Gleichung mit entgegengesetzten Zeichen den Gliedern rechter Hand zugefügt, so drückt dieselbe den Satz aus:

Die gegebenen Kräfte P_i, die Reactionskräfte $-m_i\varphi_i$ und die Bedingungskräfte $S^{(i)}$ halten sich während der Bewegung jeden Augenblick Gleichgewicht an dem System der Punkte m_i, wie an einem freien System von einander unabhängiger Punkte.

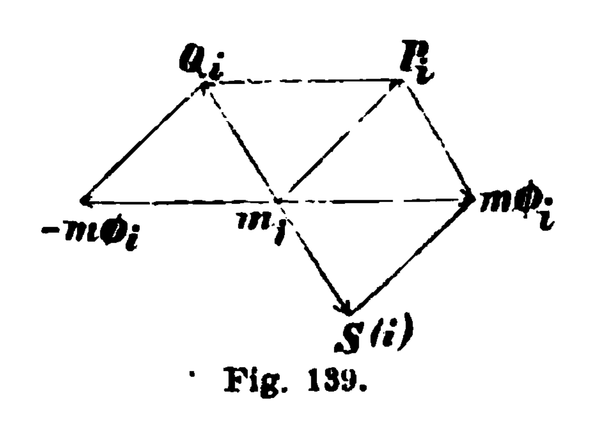


Fig. 139.

Es seien (Fig. 139) P_i und $S^{(i)}$ die Resultanten der gegebenen und die der Bedingungskräfte am Massenpunkte m_i. Die Resultante von P_i und $S^{(i)}$ ist die Effectivkraft $m_i\varphi_i$. Bringen wir sie und die ihr entgegengesetzte Reactionskraft $-m_i\varphi_i$ an, wodurch die Wirkung von P_i und $S^{(i)}$ nicht alterirt wird und bilden die Resultante Q_i von P_i und $-m_i\varphi_i$, so folgt $-[m_i\varphi_i] + [P_i] + [S^{(i)}] = [Q_i] + [S^{(i)}] = 0$,

d. h. dass Q_i entgegengesetzt gleich $S^{(i)}$ ist. Weiter folgt, dass P_i in die beiden Componenten $m_i\varphi_i$ und Q_i zerfällt. Da von diesen die Kraft $m_i\varphi_i$ die Bewegung des Punktes m_i für sich bestimmt, so nennt D'Alembert die Componente Q_i von P_i, weil sie nichts zur Bewegung beiträgt, vielmehr der Bedingungskraft $S^{(i)}$ Gleichgewicht zu halten hat, eine verlorene Kraft. Da dieselbe Betrachtung für alle Punkte gilt, so kann der Inhalt des vorstehenden Satzes auch so ausgesprochen werden:

Während der Bewegung des Systems halten jeden Augenblick die verlorenen Kräfte den Bedingungskräften (Spannungen, Pressungen) Gleichgewicht.

Sind daher δq_i und $\delta\sigma_i$ die Projectionen der virtuellen Verschiebung δs_i des Punktes m_i auf Q_i und $S^{(i)}$, so ist unter Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten $\Sigma\,(Q_i\delta q_i + S^{(i)}\delta\sigma_i) = 0$.

Restituirt man die Bedingungen selbst für die Kräfte $S^{(i)}$, so wird $\Sigma S^{(i)}\delta\sigma_i = 0$, also $\Sigma Q_i\delta q_i = 0$, d. h.:

Während der Bewegung des Systems halten jeden Augenblick mit Rücksicht auf die Bedingungen, denen das System unterworfen ist, die verlorenen Kräfte sich Gleichgewicht und ist mithin die virtuelle Arbeit derselben für jede mit der Natur des Systems vereinbare Verschiebung Null.

Dieser Satz führt den Namen des D'Alembert'schen Princips, weil er von diesem Mathematiker zuerst aufgestellt, in einem Memoire 1742 der Pariser Academie vorgelegt und in seinem *Traité de mécanique* (IIième partie, Chap. I) 1743 vollständig begründet wurde. Mit Hülfe der obigen Gleichung wird er durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten analytisch eingekleidet und dient dazu, die Probleme der Bewegung der Systeme auf Probleme des Gleichgewichts zurückzuführen.

Durch Einführung der Bedingungskräfte $S^{(i)}$ machten wir das System zu einem freien und waren in Folge dessen die Variationen δx_i, δy_i, δz_i vollkommen willkürlich. Es genügt aber zum Gleichgewichte von Kräften an einem Bedingungen unterworfenen System, dass nur solche Variationen eingeführt werden, welche mit den Bedingungen verträglich sind. Für solche ist aber die Summe der virtuellen Arbeiten der Bedingungskräfte $S^{(i)}$, nämlich $\Sigma\,(S^{(i)}_x\delta x_i + S^{(i)}_y\delta y_i + S^{(i)}_z\delta z_i) = 0$. Sind also $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$ die dem System vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen, so kann die obige Gleichung zweckmässig durch das Gleichungssystem

$$\Sigma\left\{\left(m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} - X_i\right)\delta x_i + \left(m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} - Y_i\right)\delta y_i + \left(m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} - Z_i\right)\delta z_i\right\} = 0,$$

$$\Sigma\left\{\frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial L}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial L}{\partial z_i}\delta z_i\right\} = 0,$$

$$\Sigma \left\{ \frac{\partial M}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial M}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial M}{\partial z_i} \delta z_i \right\} = 0,$$
$$\Sigma \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial N}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial N}{\partial z_i} \delta z_i \right\} = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

ersetzt werden.

Es bleiben nun noch die Grössen $S_x^{(i)}$, $S_y^{(i)}$, $S_z^{(i)}$ zu bestimmen, um die Differentialgleichungen der Bewegung der einzelnen Systempunkte vollständig zu geben. Hierzu bedienen wir uns der Euler'schen Methode der Multiplicatoren, die wir bereits Th. III, Cap. IX, §. 8 (S. 186) bei der Aufstellung der Bedingungen des Gleichgewichts anwandten. Von den $3n$ Variationen δx_i, δy_i, δz_i sind nämlich nur $3n - \varkappa$ von einander unabhängig, wenn $\varkappa$ die Anzahl der Bedingungsgleichungen ist, indem durch die zweite, dritte, ... $\varkappa$te der Gleichungen des vorstehenden Gleichungssystems $\varkappa$ Variationen durch die übrigen ausgedrückt und aus der ersten Gleichung eliminirt werden können. Multiplicirt man daher behufs dieser Elimination die zweite, dritte, ... Gleichung resp. mit den noch unbestimmten Multiplicatoren λ, μ, ν, ..., deren Anzahl $\varkappa$ ist und addirt sie zur ersten Gleichung, so können λ, μ, ν, ... so bestimmt werden, dass die Coefficienten von $\varkappa$ Variationen Null durch diese hierdurch eliminirt werden. Da die übrigen Variationen alsdann von einander unabhängig und vollkommen willkürlich sind, so erfordert das Bestehen der gewonnenen Gleichung, dass auch ihre Coefficienten verschwinden. Demnach sind in jener Gleichung alle Coefficienten der Variationen gleich Null zu setzen. Die Ausführung dieser Rechnung ergibt unmittelbar die $3n$ Gleichungen der Bewegung, nämlich:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial N}{\partial x_i} + \cdots,$$
$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial y_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial y_i} + \nu \frac{\partial N}{\partial y_i} + \cdots \qquad i = 1, 2, 3, \cdots n.$$
$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial z_i} + \nu \frac{\partial N}{\partial z_i} + \cdots,$$

Sie wurden zuerst von Lagrange gegeben.

Vergleicht man sie mit den obigen Bewegungsgleichungen, nämlich

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + S_x^{(i)}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + S_y^{(i)}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + S_z^{(i)},$$

so erhält man als Componenten der Bedingungskräfte $S^{(i)}$:

$$S_x^{(i)} = \lambda \frac{\partial L}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial N}{\partial x_i} + \cdots$$
$$S_y^{(i)} = \lambda \frac{\partial L}{\partial y_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial y_i} + \nu \frac{\partial N}{\partial y_i} + \cdots \qquad i = 1, 2, 3, \ldots n,$$
$$S_z^{(i)} = \lambda \frac{\partial L}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial z_i} + \nu \frac{\partial N}{\partial z_i} + \cdots$$

Die Bedeutung der einzelnen Glieder dieser Ausdrücke, sowie die der Multiplicatoren λ, μ, ν, ... ist dieselbe, wie sie S. 188 angegeben wurde. Um die Multiplicatoren wirklich darzustellen, muss man die Bedingungsgleichungen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, ... zweimal differentiiren, indem man x_i, y_i, z_i als Functionen von t behandelt und sodann in die zweiten Differentialgleichungen derselben für $\frac{d^2 x_i}{dt^2}$, $\frac{d^2 y_i}{dt^2}$, $\frac{d^2 z_i}{dt^2}$ die Ausdrücke

$$\frac{1}{m_i}\left(X_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial x_i} + \cdots\right), \quad \frac{1}{m_i}\left(Y_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial y_i} + \cdots\right), \quad \frac{1}{m_i}\left(Z_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial z_i} + \cdots\right)$$

einsetzen. Dies liefert $\varkappa$ Gleichungen zur Bestimmung von λ, μ, ν, ...

Zur Bestimmung der Bewegung des Systems ist die Kenntniss des Anfangszustandes erforderlich. Sind Ξ_i, H_i, Z_i die anfänglichen Momentankräfte, welche auf m_i stossend wirken, so hat man:

$$\Sigma\left\{\left(m_i \frac{dx_i}{dt} - \Xi_i\right)\delta x_i + \left(m_i \frac{dy_i}{dt} - H_i\right)\delta y_i + \left(m_i \frac{dz_i}{dt} - Z_i\right)\delta z_i\right\} = 0,$$

$$\Sigma\left\{\frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial L}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial L}{\partial z_i}\right\} = 0,$$

$$\Sigma\left\{\frac{\partial M}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial M}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial M}{\partial z_i}\right\} = 0, \qquad t = 0,$$

$$\Sigma\left\{\frac{\partial N}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial N}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial N}{\partial z_i}\right\} = 0,$$

aus welchen man für die anfänglichen Momentankräfte mit Hülfe eines Multiplicatorensystems λ_1, μ_1, ν_1, ... findet:

$$m_i \frac{dx_i}{dt} = \Xi_i + \lambda_1 \frac{\partial L}{\partial x_i} + \mu_1 \frac{\partial M}{\partial x_i} + \nu_1 \frac{\partial N}{\partial x_i} + \cdots,$$

$$m_i \frac{dy_i}{dt} = H_i + \lambda_1 \frac{\partial L}{\partial y_i} + \mu_1 \frac{\partial M}{\partial y_i} + \nu_1 \frac{\partial N}{\partial y_i} + \cdots, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots n, \quad t = 0.$$

$$m_i \frac{dz_i}{dt} = Z_i + \lambda_1 \frac{\partial L}{\partial z_i} + \mu_1 \frac{\partial M}{\partial z_i} + \nu_1 \frac{dN}{\partial z_1} + \cdots,$$

Um λ_1, μ_1, ν_1, ... zu bestimmen, hat man in die ersten Differentialgleichungen von $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, ... die Ausdrücke

$$\frac{1}{m_i}\left(\Xi_i + \lambda_1 \frac{\partial L}{\partial x_i} + \cdots\right), \quad \frac{1}{m_i}\left(H_i + \lambda_1 \frac{\partial L}{\partial y_i} + \cdots\right), \quad \frac{1}{m_i}\left(Z_i + \lambda_1 \frac{\partial L}{\partial z_i} + \cdots\right)$$

einzuführen.

Setzt man in den Gleichungen der Bewegung die Beschleunigungscomponenten $\frac{d^2 x_i}{dt^2}$, $\frac{d^2 y_i}{dt^2}$, $\frac{d^2 z_i}{dt^2}$ gleich Null, so erhält man die Bedingungen des Gleichgewichts, wie sie S. 187 angegeben sind.

Vermöge der Bedingungsgleichungen, deren Anzahl $\varkappa$ ist, hängen die Coordinaten der i Systempunkte von einander ab und ist daher die Bewegung aller bekannt, wenn es die einer gewissen Anzahl ist. Daher sind von den $3n$ obigen Bewegungsgleichungen nicht alle von einander unabhängig. Dies sind die $3n - \varkappa$ nach der Elimination von $\varkappa$ Variationen übrig bleibenden Gleichungen. Sie bestimmen zusammen mit den $\varkappa$ Bedingungsgleichungen wieder $3n$ Gleichungen für die n Punkte. Ist das System z. B. unveränderlich und frei, so sind die Bedingungsgleichungen die, welche die constante Entfernung der Systempunkte von einander ausdrücken und von der Form

$$L = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 - c = 0.$$

Ihre Anzahl ist $\varkappa = 3n - 6$, indem für drei Punkte drei, für jeden der $n - 3$ übrigen drei weitere Bedingungen erforderlich sind. Daher ist die Anzahl der von einander unabhängigen Bewegungsgleichungen des freien unveränderlichen Systems $3n - (3n - 6) = 6$. Dieselben ergeben sich, wie wir bald zeigen werden, durch Elimination von $S_x^{(i)}$, $S_y^{(i)}$, $S_z^{(i)}$ sehr einfach wieder.

Da die $3n - \varkappa$ Differentialgleichungen der Bewegung von der zweiten Ordnung sind, so führen sie $2(3n - \varkappa) = 6n - 2\varkappa$ Constanten durch die Integration ein. Dieselben bestimmen sich durch die Anfangswerthe der Coordinaten und der Geschwindigkeiten, deren Zahl $6n$ ist, zwischen denen aber $2\varkappa$ Bedingungen $L = 0$, $M = 0, \ldots, \frac{dL}{dt} = 0$, $\frac{dM}{dt} = 0, \ldots$ bestehen, sodass zu ihrer Bestimmung die nöthige Anzahl $6n - 2\varkappa$ Gleichungen vorhanden ist.

§. 5. Aus dem D'Alembert'schen Princip kann ein anderes Princip gefolgert werden, welches von Gauss aufgestellt und von ihm das Princip des kleinsten Zwanges genannt wurde. Den statischen Theil desselben lernten wir bereits S. 278 kennen.

Es sei (Fig. 139) A der Ort des Massenpunktes m_i zur Zeit t, B der Ort, an welchen er zur Zeit $t + dt$ gelangen würde, wenn die Kraft P_i auf ihn als einen freien Punkt wirken würde, d. h. wenn die Bedingungen, denen m_i als Systempunkt genügen muss, nicht vorhanden wären. Nach B würde er vermöge der in A zur Zeit t erlangten Geschwindigkeit und der Beschleunigung, die ihm P_i ertheilt, gelangen. Es sei ferner C der Ort, an welchen m_i am Ende der Zeit $t + dt$ vermöge seiner Geschwindigkeit und der Wirkung der Kraft $m_i \varphi_i$ oder, was dasselbe ist, vermöge der Kraft P_i und der Bedingungen, welche ihm seine Verbindung mit dem System auferlegen, wirklich gelangt.

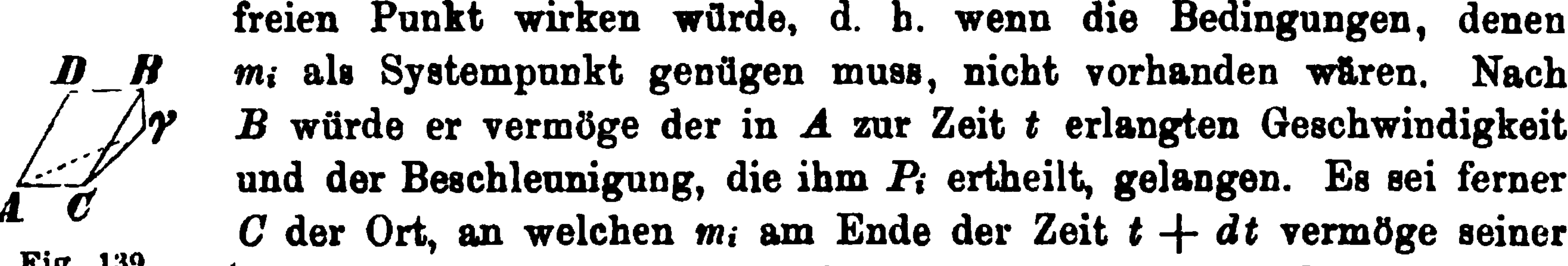


Fig. 139.

Die Kraft P_i zerfällt nun in die Kraft $m_i \varphi_i$ und die verlorene Kraft Q_i, welche ihn, ohne dass er weiter Geschwindigkeit besässe, von A nach D um die Strecke $AD = CB$ im Zeitelemente dt fortführen würde. Nach B. I, S. 323 hat man, indem man $\varphi = \frac{Q_i}{m_i}$, $\delta = AD$ setzt, $AD = \frac{1}{2} \frac{Q_i}{m_i} \cdot dt^2$ und folglich $Q_i = 2 m_i \cdot \frac{CB}{dt^2}$, also

der Strecke CD proportional. Nach dem D'Alembert'schen Princip halten nun die verlorenen Kräfte Q_i am System Gleichgewicht und ist also die Summe ihrer virtuellen Arbeiten für jede mit den Bedingungen des Systems vereinbare virtuelle Bewegung Null oder negativ. Es sei nun γ der Ort, an welchen m_i vermöge irgend einer solchen virtuellen Bewegung gelangen würde, sodass $A\gamma$ seine virtuelle Verschiebung darstellt. Da $[A\gamma] = [AC] + [C\gamma]$ ist, so wird die Projection von $A\gamma$ auf die Richtung der Kraft Q, nämlich auf die Richtung von AD gleich der Summe der Projectionen von AC und $C\gamma$ auf AD und wenn die Winkel DAC und $BC\gamma$ mit η und ϑ bezeichnet werden durch $AC \,.\, \cos\eta + C\gamma \,.\, \cos\vartheta$ ausgedrückt. Demnach stellt

$$Q_i\,(AC \,.\, \cos\eta + C\gamma \,.\, \cos\vartheta) = \frac{2m_i}{dt^2}\, CB \,.\, AC \,.\, \cos\eta + \frac{2m_i}{dt^2}\, CB \,.\, C\gamma \,.\, \cos\vartheta$$

die virtuelle Arbeit von Q_i dar und muss also nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten

$$\Sigma 2m_i \cdot CB \cdot AC \cdot \cos\eta + \Sigma 2m_i \cdot CB \cdot C\gamma \cdot \cos\vartheta \leqq 0$$

sein. Da die wirkliche Verschiebung AC aber auch zu den möglichen Verschiebungen gehört, so ist $\Sigma 2m_i \cdot CB \cdot AC \cdot \cos\eta \leqq 0$ und bleibt mithin

$$\Sigma 2m_i \cdot CB \cdot C\gamma \cdot \cos\vartheta \leqq 0.$$

Nun ist $\overline{\gamma B^2} = \overline{CB^2} + \overline{C\gamma^2} - 2 \cdot CB \cdot C\gamma \cdot \cos\vartheta$ und folglich

$$\Sigma m_i \cdot \overline{\gamma B^2} - \Sigma m_i \cdot \overline{CB^2} = \Sigma m_i \cdot \overline{C\gamma^2} - 2\,\Sigma m_i \cdot CB \cdot \cos\gamma\,\cos\vartheta.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung in Folge der eben entwickelten Bedingung unter allen Umständen positiv ist, so folgt, dass für jede beliebige virtuelle Bewegung

$$\Sigma m_i \cdot \overline{CB^2} < \Sigma m_i \cdot \overline{\gamma B^2}$$

ist. Die Linie CB stellt die Abweichung des Ortes C, welchen m_i zur Zeit $t + dt$ wirklich einnimmt, von dem Orte B, welchen er in Folge der freien Bewegung einnehmen würde, dar. Ebenso ist γB die Abweichung der Lage desselben Punktes von dem Orte der freien Bewegung, welche er bei irgend einer beliebigen anderen mit den Bedingungen des Systems vereinbaren Bewegung, als der wirklich erfolgenden, einnehmen würde. *Daher ist die Summe der Produkte aus den Massen der Systempunkte in die Quadrate ihrer Abweichungen von der freien Bewegung für die wirklich erfolgende Bewegung unter den ähnlich gebildeten Summen aller anderen mit den Bedingungen des Systems vereinbaren Bewegungen ein Minimum.*

Die Bewegung des Punktes m_i als eines Systempunktes ist eine gezwungene; der Zwang rührt von seiner Verbindung mit dem System her. Betrachtet man $\Sigma m_i \cdot \overline{CB^2}$ als das Maass dieses Zwanges, so kann der vorstehende Satz, den man nach seinem Entdecker das *Gauss'sche Princip vom kleinsten Zwange* nennt, auch so ausgesprochen werden: *Die Bewegung der Punkte eines irgend welchen Bedingungen unterworfenen Systems erfolgt in jedem Augenblick in möglichster Uebereinstimmung mit der freien Bewegung oder unter möglichst kleinem Zwange, wenn unter dem Maasse des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeitelemente erleidet, die Summe der Produkte aus dem Quadrate der Ablenkung jedes Punktes von dem Orte seiner freien Bewegung in seine Masse verstanden wird.*

Vgl. Gauss, Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik (Crelle's Journ. Bd. IV, S. 232 [1829]); Scheffler, Ueber das Gauss'sche Grundgesetz der Mechanik (Schlömilch's Zeitschrift für Mathem. und Physik. III. Jahrg. [1858] S. 197).

Für den Fall des Gleichgewichtes der Kräfte P_i an dem System fallen die verlorenen Kräfte Q_i mit den Kräften P_i zusammen, also die Punkte D mit B, C mit A und wird $\Sigma m_i \cdot \overline{AB}^2$ ein Minimum (vgl. S. 278).

Man kann die Arbeit bestimmen, welche die Ablenkung des Systempunktes von der freien Bewegung erfordert. Sie ist

$$\Sigma Q_i \cdot \overline{CB} = -\Sigma Q_i \cdot \overline{BC} = -\frac{2}{dt^2}\Sigma m_i \cdot \overline{BC}^2$$

und mithin dem Zwange proportional. — Gauss deutet in seiner Abhandlung noch auf die Analogie des Satzes mit der Methode der kleinsten Quadrate hin; Möbius hat, wohl hierdurch veranlasst, denselben das Princip der kleinsten Quadrate genannt.

Indem man die Kraft Q_i parallel den Richtungen $C\gamma$ und γB in die Componenten Q_i' und Q_i'' zerlegt und bedenkt, dass diese Kräfte den Punkt m_i um die Strecken $C\gamma = \frac{1}{2}\frac{Q_i'}{m_i}dt^2$ und $\gamma B = \frac{1}{2}\frac{Q_i''}{m_i}dt^2$ fortführen würden, kann man wegen $\overline{CB}^2 = \frac{1}{2}\frac{Q_i}{m_i}dt^2 \cdot CB$ und $\overline{\gamma B}^2 = \frac{1}{2}\frac{Q_i''}{m_i}dt^2 \cdot \gamma B$, die obige Ungleichung des Princips auch unter der Form

$$\Sigma Q_i \cdot CB < \Sigma Q_i \cdot \gamma B$$

darstellen. Das Princip erscheint dann unter der Gestalt eines Princips der kleinsten verlorenen Arbeit. Vgl. Rachmaninoff, das Princip der kleinsten Arbeit der verlorenen Kräfte als ein allgemeines Princip der Mechanik (Schlömilch's Zeitschr. für Mathem. u. Physik B. 24, S. 206—220 [1880]).

§. 6. Zwei Massenpunkte m, m' bewegen sich frei mit gegebenen Anfangsgeschwindigkeiten, indem sie allein ihrer gegenseitigen Anziehung oder Abstossung unterworfen sind; welches ist die Natur ihrer Bewegung?

1. Ist P die Kraftintensität, mit welcher sie sich im Abstande r anziehen oder abstossen, so greifen an m und m' resp. die Kräfte $X = \mp P\frac{x-x'}{r}$, $Y = \mp P\frac{y-y'}{r}$, $Z = \mp P\frac{z-z'}{r}$; $X' = -X$, $Y' = -Y$, $Z' = -Z$ an. Die Gleichungen der Bewegung sind daher:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

$$m'\frac{d^2x'}{dt^2} = -X, \quad m'\frac{d^2y'}{dt^2} = -Y, \quad m'\frac{d^2z'}{dt^2} = -Z.$$

Sie geben paarweise addirt $m\frac{d^2x}{dt^2} + m'\frac{d^2x'}{dt^2} = 0$ u. s. w., mithin durch Integration:

$$m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} = \alpha, \quad m\frac{dy}{dt} + m'\frac{dy'}{dt} = \beta, \quad m\frac{dz}{dt} + m'\frac{dz'}{dt} = \gamma.$$

Demnach bleiben die Componentensummen der Momentankräfte während der Be-

wegung constant. Setzt man daher in irgend einem Punkte, z. B. im Coordinatenursprung, die Momentankräfte zusammen, so bleibt die Resultante der Momentankräfte nach Grösse und Richtung fortwährend constant. Ihre Intensität ist $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}$ und ihre Richtungscosinusse sind α, β, γ proportional. Dies leuchtet ein, wenn man bedenkt, dass die continuirlichen Kräfte, welche diese Resultante abändern könnten, nämlich die Anziehungen oder Abstossungen der Punkte, entgegengesetzt gleich sind. Da für die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Massenmittelpunktes $(m + m')\, x_1 = mx + m'x'$; $(m + m')\, y_1 = my + m'y'$; $(m + m')\, z_1 = mz + m'z'$ ist, so geben die vorstehenden Gleichungen:

$$(m + m')\frac{dx_1}{dt} = \alpha, \qquad (m + m')\frac{dy_1}{dt} = \beta, \qquad (m + m')\frac{dz_1}{dt} = \gamma.$$

Der Massenmittelpunkt besitzt daher constante Geschwindigkeit von constanter Richtung; sie ist Null, wenn die Summe der Momentankräfte anfangs Null ist.

2. Man erhält weiter die Combinationen der Bewegungsgleichungen:

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) + m'\left(y'\frac{d^2z'}{dt^2} - z'\frac{d^2y'}{dt^2}\right) = 0,$$

$$m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) + m'\left(z'\frac{d^2x'}{dt^2} - x'\frac{d^2z'}{dt^2}\right) = 0,$$

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) + m'\left(x'\frac{d^2y'}{dt^2} - y'\frac{d^2x'}{dt^2}\right) = 0,$$

da

$$\begin{aligned} yZ - zY - (y'Z - z'Y) &= (y - y')\, Z - (z - z')\, Y \\ &= \mp P\, \{(y - y')(z - z') - (z - z')(y - y')\} = 0 \end{aligned}$$

ist. Diese Gleichungen drücken aus, dass das resultirende Paar der continuirlichen Kräfte verschwindet. Sie geben integrirt:

$$m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + m'\left(y'\frac{dz'}{dt} - z'\frac{dy'}{dt}\right) = c_1,$$

$$m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + m'\left(z'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dz'}{dt}\right) = c_2,$$

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + m'\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) = c_3.$$

Demnach ist das resultirende Paar der Momentankräfte während der Bewegung nach Grösse und Axenrichtung constant. Seine Grösse ist $(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)^{\frac{1}{2}}$ und seine Richtungscosinusse sind proportional c_1, c_2, c_3. Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$, so liefert ihre Addition:

$$c_1\,(x - x') + c_2\,(y - y') + c_3\,(z - z') = 0.$$

Da nun $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ den Richtungscosinussen der Verbindungslinie der Punkte m, m' proportional sind, so folgt: Das System der beiden Punkte bewegt sich so, dass ihre Verbindungslinie fortwährend zur Axenrichtung des resultirenden Paares der Momentankräfte senkrecht oder also zur invariabelen Ebene desselben parallel bleibt. Fallen die anfänglichen Momentankräfte in eine Ebene, so erfolgt die Bewegung der Punkte in dieser Ebene. Die drei Gleichungen drücken auch aus, dass die Summe der Projectionen der Flächenräume, die von den, von einem festen

Punkte nach den beweglichen Punkten gezogenen Radienvectoren beschrieben werden, auf eine beliebige Ebene constant bleibt.

3. Man kann denselben Gleichungen nach Poinsot noch eine andere Bedeutung abgewinnen. Wählen wir die invariabele Ebene zur Ebene der YZ, so sind c_2 und c_3 Null, weil sie den Richtungscosinussen der Axe des resultirenden Paares proportional sind, welche jetzt in die x-Axe fällt. Aus den zwei letzten der Gleichungen

$$m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+m'\left(y'\frac{dz'}{dt}-z'\frac{dy'}{dt}\right)=c_1,$$

$$m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+m'\left(z'\frac{dx'}{dt}-x'\frac{dz'}{dt}\right)=0,$$

$$m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)+m'\left(x'\frac{dy'}{dt}-y'\frac{dx'}{dt}\right)=0$$

erhält man daher durch Elimination von m, m':

$$\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right):\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\left(z'\frac{dx'}{dt}-x'\frac{dz'}{dt}\right):\left(x'\frac{dy'}{dt}-y'\frac{dx'}{dt}\right).$$

Nun denke man sich in m und m' die Tangenten an die Bahnen dieser Punkte, lege durch sie und den Coordinatenursprung Ebenen und errichte in diesem auf sie die Normalen N, N'. Sind p, q, r die Richtungscosinusse für N, so bestehen, weil sowohl der Punkt x, y, z als auch der Punkt $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ in die zu N senkrechte Ebene fällt, die Gleichungen:

$$px+qy+rz=0,$$
$$pdx+qdy+rdz=0,$$

aus welchen man

$$p:q:r=(ydz-zdy):(zdx-xdz):(xdy-ydx)$$

zieht. Ebenso ergibt sich für die Richtungscosinusse p', q', r' der Normalen N':

$$p':q':r'=(y'dz'-z'dy'):(z'dx'-x'dz'):(x'dy'-y'dx').$$

Mit Hülfe dieser Werthe kann die aus den Bewegungsgleichungen gezogene Proportion so geschrieben werden: $q:r=q':r'$. Nun sind aber die Gleichungen der beiden Normalen N, N':

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r} \quad \text{und} \quad \frac{x}{p'}=\frac{y}{q'}=\frac{z}{r'}$$

und folglich $\frac{y}{q}=\frac{z}{r}$, $\frac{y}{q'}=\frac{z}{r'}$ die ihrer Projectionen auf die invariabele Ebene. Beide sind hiernach identisch. Legt man daher durch die Tangenten der Bahnen der Punkte und einen festen Punkt Ebenen, so schneiden sie die durch denselben Punkt geführte invariabele Ebene in einer gemeinschaftlichen Schnittlinie.

4. Da der Massenmittelpunkt sich mit constanter Geschwindigkeit geradlinig bewegt, so braucht man nur die relative Bewegung der Punkte m, m' in Bezug auf ihn weiter zu verfolgen, um das ganze Problem zu lösen. Dazu kann man sich der Vereinfachung bedienen, dass man die Richtung der Bewegung jenes Punktes zu einer Coordinatenrichtung des ursprünglichen Systems, z. B. zur z-Richtung also die invariabele Ebene zur Ebene der xy wählt.

Setzt man in den Gleichungen Nr. 1 $x=x_1+\xi$, $y=y_1+\eta$, $z=z_1+\zeta$; $x'=x_1+\xi'$, $y'=y_1+\eta'$, $z'=z_1+\zeta'$, wo x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des

Massenmittelpunktes und $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ relative Coordinaten in Bezug auf diesen sind, so erhält man vermöge

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{d^2 z_1}{dt^2} = 0,$$

z. B. für m, die Gleichungen:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mp P\frac{\xi - \xi'}{r}, \quad m\frac{d^2\eta}{dt^2} = \mp P\frac{\eta - \eta'}{r}, \quad m\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \mp P\frac{\zeta - \zeta'}{r}.$$

Aus $m\xi + m'\xi' = 0$ erhält man aber durch Addition und Subtraction von $m'\xi$ weiter $(m + m')\xi = m'(\xi - \xi')$ und ebenso $(m + m')\eta = m'(\eta - \eta')$, $(m + m')\zeta = m'(\zeta - \zeta')$, sodass ξ', η', ζ' aus den Gleichungen für m verschwinden und diese werden:

$$mm'\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mp (m + m') P\frac{\xi}{r}, \quad mm'\frac{d^2\eta}{dt^2} = \pm (m + m') P\frac{\eta}{r},$$

$$mm'\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \mp (m + m') P\frac{\zeta}{r}.$$

Ihre weitere Behandlung hängt von der Natur der Kraft P ab. Für das Newton-sche Attractionsgesetz sind die relativen Bahnen von m, m' um ihren Massenmittelpunkt Kegelschnitte.

Um die relative Bewegung des Punktes m' gegen m zu bestimmen, würde man aus den ursprünglichen Gleichungen Nr. 1 ableiten:

$$\frac{\frac{d^2(x' - x)}{dt^2}}{x' - x} = \frac{\frac{d^2(y' - y)}{dt^2}}{y' - y} = \frac{\frac{d^2(z' - z)}{dt^2}}{z' - z},$$

worin $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ die relativen Coordinaten von m' gegen m sind u. s. w.

§. 7. Zwei schwere Massenpunkte m, m' sind durch einen biegsamen Faden mit einander verknüpft, welcher über eine verticale feste Rolle ohne Reibung hinweggeht. Welche Bewegung nimmt dies System unter Einwirkung der Schwere an?

Es seien x, x' (Fig. 140) die Abstände von m, m' bis zu den Berührungspunkten des Fadens mit der Rolle zur Zeit t; die gegebenen Kräfte P sind die vertikal abwärts wirkenden Gewichte mg, $m'g$; die Effectivkräfte $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m'\frac{d^2x'}{dt^2}$ und die verlorenen Kräfte mithin $mg - m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m'g - m'\frac{d^2x'}{dt^2}$. Das Gleichgewicht derselben erfordert für jede mit der Bedingung $x + x' = Const.$ vereinbare virtuelle Bewegung

m'

m

Fig. 140.

$$m\left(g - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + m'\left(g - \frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x' = 0, \quad \delta x + \delta x' = 0.$$

Multiplicirt man die zweite dieser Gleichungen mit λ, addirt sie zur ersten und setzt die Coefficienten von δx, $\delta x'$ gleich Null, so kommt

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg + \lambda, \quad m'\frac{d^2x'}{dt^2} = m'g + \lambda$$

und wenn man, um zunächst λ zu bestimmen, hiermit die Gleichung $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2} = 0$ verbindet, so ergibt sich

$$\lambda = -\frac{2mm'}{m + m'}\cdot g = -\frac{2mg \cdot m'g}{mg + m'g},$$

d. h. $-\lambda$ ist das harmonische Mittel der Gewichte mg, $m'g$. Hiermit werden die Bewegungsgleichungen der beiden Massen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = G, \quad \frac{d^2 x'}{dt^2} = -G, \quad \text{wo } G = \frac{m - m'}{m + m'} g.$$

Sind daher m und m' gleich, so ist $G = 0$ und die Bewegung beider Massen gleichförmig; ist G nicht Null, so ist sie gleichförmig veränderlich. Für die Geschwindigkeiten ergibt sich

$$v = \frac{dx}{dt} = Gt + \alpha, \quad v' = \frac{dx'}{dt} = -Gt + \alpha'$$

und da $\frac{dx}{dt} + \frac{dx'}{dt} = 0$ ist, so sind die Anfangsgeschwindigkeiten α und α' vermöge $\alpha + \alpha' = 0$ einander entgegengesetzt gleich. Für die Abstände x, x' hat man

$$x = \tfrac{1}{2} Gt^2 + \alpha t + \beta, \quad x' = -\tfrac{1}{2} Gt^2 - \alpha t + \beta',$$

wo $\beta + \beta' = Const.$, nämlich gleich der Länge des Fadens weniger des Stücks, welches auf der Rolle aufliegt.

Sind nicht die Anfangsgeschwindigkeiten α, α' sondern anfängliche momentane Stosskräfte $m\omega$, $m'\omega'$ gegeben, welche in der Richtung des Fadens wirken, so liefert das D'Alembert'sche Princip für sie:

$$m\left(\omega - \frac{dx}{dt}\right)\delta x + m'\left(\omega' - \frac{dx'}{dt}\right)\delta x' = 0, \quad \delta x + \delta x' = 0, \quad \text{für } t = 0,$$

$$m\frac{dx}{dt} = m\omega + \lambda_1, \quad m'\frac{dx'}{dt} = m'\omega' + \lambda_1, \quad \text{für } t = 0,$$

also

$$\lambda_1 = -\frac{mm'}{m + m'}(\omega + \omega'), \quad \frac{dx}{dt} = \alpha = -\frac{dx'}{dt} = \frac{m\omega - m'\omega'}{m + m'}.$$

Die Grössen $-\lambda$ und $-\lambda_1$ drücken die continuirlich wirkende Spannung T zur Zeit t und die momentane Spannung T_1 zur Zeit $t = 0$ aus, welche der Faden auszuhalten hat. Denn indem man den Faden durchgeschnitten und an seine Stelle die Spannung T eingeführt denkt, wird z. B. die Bewegungsgleichung für die Masse m werden $m\frac{d^2 x}{dt^2} = mg - T$, deren Vergleichung mit der oben aufgestellten $T = -\lambda$ ergibt, u. s. w.

Die vorliegende Aufgabe und ihre Lösung enthält die Theorie der Atwood-schen Fallmaschine. Für $m : m' = 7 : 8$ erhält man deren gewöhnliche Einrichtung, für welche $G = \frac{1}{15} g$ wird.

Man kann die Aufgabe etwas verallgemeinern. Die Punkte m, m' seien genöthigt, auf zwei Geraden zu bleiben, welche sich tangirend an die Rolle anschliessen und mit der Horizontalen die Winkel α, α' bilden. Die Gewichte zerfallen in zwei Componenten $mg \cos\alpha$, $m'g \cos\alpha'$, welche durch die Normalwiderstände der Geraden vernichtet werden und $mg \sin\alpha$, $m'g \sin\alpha'$, welche an die Stelle der obigen mg, $m'g$ treten. Dies ist die einzige Modification, welche in die oben behandelte Lösung eingeführt zu werden braucht, um die Lösung der erweiterten Aufgabe zu erhalten.

§. 8. Eine schwere homogene Kette hängt über eine verticale feste Rolle auf beiden Seiten mit ungleich langen Stücken herab; welche Bewegung nimmt sie an? Ist $2a$ die Summe der Kettenstücke, welche rechts und links niederhängen, von den Berührungspunkten mit

der Rolle an gerechnet (ohne das auf der Rolle aufliegende Stück), x das eine, $2a - x$ das andere Stück, so ist das Gewicht der Differenz $2(x - a)$ die beschleunigende Kraft des Systems. Man erhält daher als Bewegungsgleichung:

$$2\mu a \frac{d^2 x}{dt^2} = 2\mu g (x - a),$$

wo μ das Gewicht der Längeneinheit bedeutet. Die Integration derselben gibt:

$$x - a = A e^{t\sqrt{\frac{g}{a}}} + B e^{-t\sqrt{\frac{g}{a}}}.$$

War die Kette anfangs in Ruhe und hing auf der einen Seite die Länge $a + b$, so hat man zur Bestimmung der Constanten $b = A + B$, $0 = A - B$, wo letztere Gleichung mit Hülfe der Gleichung für die Geschwindigkeit folgt. Daher wird:

$$x - a = \tfrac{1}{2} b \left(e^{t\sqrt{\frac{g}{a}}} + e^{-t\sqrt{\frac{g}{a}}}\right).$$

Diese Gleichung gilt bis $x = 2a$, wo die Kette bis auf ein Stück abgerollt ist, welches auf der Rolle berührend aufliegt. Die Zeit t_0 hierfür ergibt sich aus

$$\frac{2a}{b} = e^{t_0\sqrt{\frac{g}{a}}} + e^{-t_0\sqrt{\frac{g}{a}}}.$$

Mit Hülfe der Relation $(e^\alpha + e^{-\alpha})^2 - (e^\alpha - e^{-\alpha})^2 = 4$ findet sich hierzu noch

$$2\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1} = e^{t_0\sqrt{\frac{g}{a}}} - e^{-t_0\sqrt{\frac{g}{a}}},$$

deren Addition zur vorigen

$$t_0\sqrt{\frac{g}{a}} = l\left[2\,\frac{a}{b} + \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}\right]$$

ergibt, woraus t_0 folgt. Beispiel: $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$.

§. 9. An einem biegsamen Faden, welcher, mit seinem einen Ende A befestigt, vertikal herabhängt, befinden sich zwei schwere Massenpunkte m, m'; das System macht, aus der Gleichgewichtslage herausgebracht, Schwingungen um dieselbe. Wie sind dieselben beschaffen, wenn die Entfernung aus dieser Lage sehr klein ist und das System in einer Ebene schwingt?

Die x- und y-Axe seien horizontal, die z-Axe vertikal, positiv abwärts, der Ursprung der Coordinaten in A. Die Länge der Fadenstücke Am, mm' sei a, a'. Ferner sei der Winkel, den Am mit der z-Axe bildet, ϑ und der Winkel, den die Ebene mAz mit der xz-Ebene bildet, φ; endlich seien ϑ', φ' die analogen Winkel für das Fadenstück mm'. Indem man die Spannungen T, T' der Fadenstücke einführt, erhält man sogleich die Gleichungen der Bewegung beider Massen m, m', nämlich:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -T\sin\vartheta\cos\varphi + T'\sin\vartheta'\cos\varphi', \qquad m'\frac{d^2x'}{dt^2} = -T'\sin\vartheta'\cos\varphi',$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -T\sin\vartheta\sin\varphi + T'\sin\vartheta'\sin\varphi', \qquad m'\frac{d^2y'}{dt^2} = -T'\sin\vartheta'\sin\varphi',$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - T\cos\vartheta + T'\cos\vartheta', \qquad m'\frac{d^2z'}{dt^2} = m'g - T'\cos\vartheta'.$$

Hierzu kommen:

$$x = a \sin\vartheta \cos\varphi, \qquad x' = a' \sin\vartheta' \cos\varphi,$$
$$y = a \sin\vartheta \sin\varphi, \qquad y' = a' \sin\vartheta' \sin\varphi,$$
$$z = a \cos\vartheta, \qquad z' = a' \cos\vartheta'.$$

Diese Gleichungen vereinfachen sich, wenn ϑ, ϑ' sehr klein sind und die Bewegung in der xz-Ebene erfolgt. Man hat dann näherungsweise:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -T\vartheta + T'\vartheta', \quad m'\frac{d^2x'}{dt^2} = -T'\vartheta', \quad x = a\vartheta, \quad x' = a\vartheta + a'\vartheta',$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - T + T', \quad m'\frac{d^2z'}{dt^2} = m'g - T', \quad z = a, \quad z' = a + a'.$$

Da z, z' constant bleiben, so folgt sofort $T' = m'g$, $T = (m + m')\,g$. Weiter erhält man:

$$ma\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -(m + m')\,g\vartheta + m'g\vartheta', \qquad m'\left(a\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + a'\frac{d^2\vartheta'}{dt^2}\right) = -m'g\vartheta'.$$

Multiplicirt man die letzte dieser Gleichungen mit einer unbestimmten Grösse λ und addirt sie zur ersten, so kommt

$$(m + \lambda m')\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \lambda m'\frac{a'}{a}\frac{d^2\vartheta'}{dt^2} + \frac{g}{a}\{(m + m')\,\vartheta + m'(\lambda - 1)\,\vartheta'\} = 0.$$

Bringt man diese Gleichung auf die Form

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\vartheta + \frac{a'}{a}\cdot\frac{\lambda m'}{m + \lambda m'}\cdot\vartheta'\right) + \frac{g}{a}\cdot\frac{m + m'}{m + \lambda m'}\left(\vartheta + \frac{(\lambda - 1)\,m'}{m + m'}\,\vartheta'\right) = 0,$$

setzt

$$\vartheta + \frac{a'}{a}\,\frac{\lambda m'}{m + \lambda m'}\,\vartheta' = \varphi = \vartheta + \varkappa\vartheta'$$

und disponirt über λ so, dass

$$\frac{\lambda}{m + \lambda m'} = \frac{a}{a'}\,\frac{\lambda - 1}{m + m'}$$

wird, so geht die Gleichung über in die Form

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{a}\,\frac{m + m'}{m + \lambda m'}\,\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + n\varphi = 0; \qquad n = \frac{g}{a}\,\frac{m + m'}{m + \lambda m'}.$$

Die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung für λ sind reell und ist die eine positiv, die andere negativ; auch für die negative Wurzel ist $m + \lambda m'$ positiv, wie sich aus der vorstehenden Form dieser quadratischen Gleichung ergibt, deren rechte Seite und deren Zähler linker Hand für ein negatives λ negativ sind. Demnach ist der Coefficient von φ in unserer Differentialgleichung positiv und erhalten wir als Integral

$$\varphi = \vartheta + \varkappa\vartheta' = \alpha\cos(nt + \beta),$$

oder entsprechend den beiden Wurzelwerthen λ_1, λ_2 von λ, zu welchen n_1, n_2 gehören mögen, die beiden Integrale

$$\varphi_1 = \vartheta + \varkappa_1\vartheta' = \alpha_1\cos(n_1t + \beta_1),$$
$$\varphi_2 = \vartheta + \varkappa_2\vartheta' = \alpha_2\cos(n_2t + \beta_2),$$

woraus

$$\vartheta = \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1}\left[\alpha_1\varkappa_2\cos(n_1t + \beta_1) - \alpha_2\varkappa_1\cos(n_2t + \beta_2)\right],$$

$$\vartheta' = -\frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1}\left[\alpha_1\cos(n_1t + \beta_1) - \alpha_2\cos(n_2t + \beta_2)\right]$$

folgt. Die Anfangswerthe von ϑ, ϑ', $\frac{d\vartheta}{dt}$, $\frac{d\vartheta'}{dt}$ bestimmen die Constanten α_1, α_2; β_1, β_2. Man sieht, dass die Winkel ϑ, ϑ' algebraische Summen sind von Winkeln, welche zwei Pendelschwingungen von den Oscillationsdauern $\frac{2\pi}{n_1}$, $\frac{2\pi}{n_2}$ entsprechen. Sind daher n_1 und n_2 commensurabel, so wird die Bewegung periodisch, sodass das System in die Anfangslage zurückkehrt.

§. 10. **Zwei schwere Massenpunkte m, m' sind durch einen nicht schweren Stab verbunden und liegt dies System in einer Vertikalebene auf zwei gegen die Vertikale unter den Winkeln α, α' geneigten Geraden auf; dasselbe macht kleine Schwingungen um eine Gleichgewichtslage; man soll die Oscillationsdauer derselben finden.**

Ist ϑ die Neigung des Stabes gegen die Vertikale zur Zeit t, T seine Spannung, sind N, N' die Widerstände der beiden Geraden, x, x' die Abstände von m, m' vom Schnittpunkte derselben und a die Länge des Stabes, so bestehen die Gleichungen:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\cos\alpha + T\cos(\vartheta+\alpha), \qquad N = mg\sin\alpha + T\sin(\vartheta+\alpha),$$

$$m'\frac{d^2x'}{dt^2} = m'g\cos\alpha' - T\cos(\vartheta-\alpha'), \qquad N' = m'g\sin\alpha' + T\sin(\vartheta-\alpha'),$$

$$x = x'\cos(\alpha+\alpha') - a\cos(\vartheta+\alpha),$$

$$x' = x\cos(\alpha+\alpha') + a\cos(\vartheta-\alpha'),$$

mit Hülfe welcher Gleichungen x, x', N, N', T, ϑ als Functionen der Zeit zu finden sind. Für die fraglichen kleinen Schwingungen hat man zunächst die Gleichgewichtslagen dadurch zu suchen, dass man

$$mg\cos\alpha + T\cos(\vartheta+\alpha) = 0,$$

$$m'g\cos\alpha' - T\cos(\vartheta-\alpha') = 0$$

setzt. Es seien x_1, x'_1 die Werthe von x, welche einer solchen entsprechen. Dann kann man setzen:

$$x = x_1 + \xi, \qquad x' = x'_1 + \xi'$$

und sind ξ, ξ' sehr kleine Grössen, deren Quadrate und Produkt getilgt werden sollen. Indem man nun aus den Gleichungen der Bewegung T eliminirt und abkürzend $\alpha + \alpha' = \beta$ setzt, ergibt sich

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2} - g\cos\alpha\right)(x' - x\cos\beta) - m'\left(\frac{d^2x'}{dt^2} - g\cos\alpha'\right)(x - x'\cos\beta) = 0.$$

Aus der Gleichung $x^2 + x'^2 - 2xx'\cos\beta = a^2$ folgt aber nach Einsetzung der Werthe $x = x_1 + \xi$, $x' = x'_1 + \xi'$ mit Streichung der Glieder zweiter Ordnung: $x_1\xi + x'_1\xi' - (x_1\xi' + x'_1\xi)\cos\beta = 0$, woraus

$$\xi' = \xi\frac{x_1 - x'_1\cos\beta}{x_1\cos\beta - x'_1}.$$

Durch Elimination von x, x', ξ' ergibt sich daher, wenn blos die Glieder erster Ordnung beibehalten werden:

$$[m(x'_1 - x_1\cos\beta)^2 + m'(x_1 - x'_1\cos\beta)^2]\frac{d^2\xi}{dt^2}$$

$$+ g\sin^2\beta\,(mx_1\cos\alpha + m'x'_1\cos\alpha')\cdot\xi = 0,$$

eine Gleichung von der Form

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + n^2\xi = 0,$$

welche auf die Oscillationsdauer $\frac{2\pi}{n}$ hinweist.

§. 11. **Bewegung des Rades an der Welle.** Es seien m, m' (Fig. 141) die schweren Massen, welche durch Fäden mit dem Rade und der Welle verbunden sind, x, x' die Abstände ihrer Schwerpunkte von den Berührungspunkten. Dann sind $m\left(g - \frac{d^2x}{dt^2}\right)$, $m'\left(g - \frac{d^2x'}{dt^2}\right)$ deren verlorene Kräfte. Ein Massenpunkt μ des Rades oder der Welle im Abstande r von der Axe wird von der Tangentialkraft $\mu r \frac{d\omega}{dt}$ afficirt, wo ω die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit t bedeutet; die Centripetalkraft $\mu r \omega^2$ kommt nicht in Betracht, da sie bei einer mit der Natur des Systems vereinbaren Verschiebung keine virtuelle Arbeit leistet. Die verlorene Kraft an μ ist daher die der Tangentialkraft entgegengesetzte Kraft, da keine gegebene Kraft an μ angreift, wenn wir das Gesammtgewicht des Rades und der Welle am Schwerpunkte der Maschine angreifend denken, woselbst aber von ihm gleichfalls keine Arbeit geleistet wird. Sind nun der Radius des Rades und der der Welle c und c', so sind, wenn der Apparat um den unendlich kleinen Winkel $\delta\vartheta$ gedreht wird, $c\delta\vartheta$, $c'\delta\vartheta$, $r\delta\vartheta$ die virtuellen Wege und besteht daher nach dem D'Alembert'schen Princip die Gleichung:

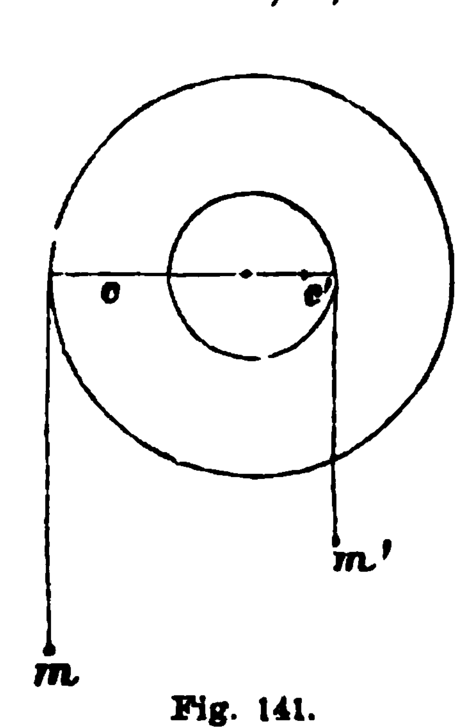


Fig. 141.

$$m\left(g - \frac{d^2x}{dt^2}\right)c\delta\vartheta - m'\left(g - \frac{d^2x'}{dt^2}\right)c'\delta\vartheta - \frac{d\omega}{dt}\Sigma\mu r^2 \cdot \delta\vartheta = 0.$$

Nun hat man $\frac{dx}{dt} = c\omega$, $\frac{dx'}{dt} = -c'\omega$, weil die Geschwindigkeiten der Massen m, m' denen der Berührungspunkte gleich sind, x' aber mit wachsendem Drehungswinkel abnimmt; daher sind $\frac{d^2x}{dt^2} = c\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d^2x'}{dt^2} = -c'\frac{d\omega}{dt}$ und nimmt die Gleichung die Form an:

$$mc\left(g - c\frac{d\omega}{dt}\right) - m'c'\left(g + c'\frac{d\omega}{dt}\right) - \frac{d\omega}{dt}M\varkappa^2 = 0,$$

wenn $M\varkappa^2$ das Trägheitsmoment der Maschine für ihre Axe ist. Hieraus folgt:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{mc - m'c'}{M\varkappa^2 + mc^2 + m'c'^2} \cdot g,$$

mithin, wenn $\omega = 0$ für $t = 0$ ist:

$$\omega = \frac{mc - m'c'}{M\varkappa^2 + mc^2 + m'c'^2} \cdot gt.$$

Ist also $mc - m'c'$ nicht Null, d. h. sind m und m' nicht im Gleichgewicht, so ist die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte. Die Spannungen T, T' der Fäden sind:

$$T = m\left(g - \frac{d^2x}{dt^2}\right) = m\left(g - c\frac{d\omega}{dt}\right) = \left(m - \frac{c\,(mc - m'c'}{M\varkappa^2 + mc^2 + m'c'^2}\right)g,$$

$$T = m\left(g - \frac{d^2x'}{dt^2}\right) = m\left(g + c'\frac{d\omega}{dt}\right) = \left(m + \frac{c'\,(mc - m'c')}{M\varkappa^2 + mc^2 + m'c'^2}\right)g.$$

Die Spannungen sind constant während der Bewegung.

§. 12. Zwei geometrische Systeme, welche so auf einander bezogen sind, dass jedem Punkte des einen ein einziger Punkt des anderen entspricht und umgekehrt, stehen in einer eindeutigen Verwandtschaft zu einander in Bezug auf diese Punktpaare. Solche Verwandtschaften sind die Congruenz, die Aehnlichkeit, die projectivische Verwandtschaft u. s. w. Zwei mechanische Systeme können, wenn ihren Punkten die Coefficienten zukommen, welche man Masse nennt, ausser diesen geometrischen Beziehungen auch hinsichtlich letzterer verwandt sein und wenn an ihnen Kräfte wirken, so kann auch hinsichtlich dieser eine Correspondenz zwischen beiden Systemen bestehen, vermöge welcher die Kräfte des einen Systems eindeutig durch die Kräfte des anderen nach Intensität, Richtung und Sinn bestimmt werden. Ist dies der Fall und ist ausserdem noch für irgend eine Zeit eine bestimmte Beziehung der Geschwindigkeiten für die Punkte beider Systeme festgesetzt, so werden auch die Bewegungen, welche beide Systeme annehmen, eine bestimmte Verwandtschaft zeigen, sodass die Beschaffenheit der Bewegung des einen aus der des anderen gefolgert werden kann. Von den Einheiten, welche in der Mechanik in Anwendung kommen, können drei, die der Länge, der Zeit und der Masse, willkürlich angenommen werden, während die der Geschwindigkeit und der Kraft auf sie zurückführbar sind. Je nach der Definition der beiden mit einander zu vergleichenden Bewegungen werden diese fünferlei Grössen bestimmte Verhältnisse zu einander haben und umgekehrt entsprechen bestimmt vorausgesetzten Beziehungen dieser Grössen bestimmte Verwandtschaften der Bewegungen.

Aus der grossen Menge von Möglichkeiten, welche hinsichtlich der Verwandtschaft der Bewegungen zweier Systeme eintreten können, wollen wir hier nur den einfachsten Fall behandeln, dass die homologen Längen (also auch Flächen und Körperräume), die Zeiten, in welchen homologe Punkte homologe Bahnstrecken durchlaufen, die homologen Massen, die Geschwindigkeiten und die Kräfte während der Bewegung beider Systeme constante Verhältnisse bewahren sollen. Wegen der constanten Linienverhältnisse werden die Systeme geometrisch ähnlich sein; der constanten Massenverhältnisse wegen werden sie beiderseits aus gleich viel ähnlichen übereinander gelagerten Systemen bestehend angesehen werden können und wenn hierzu noch die Bedingung tritt, dass die Kräfte in beiden Systemen dieselben Richtungen, gleichen Sinn und constantes Verhältniss ihrer Intensitäten haben, so werden auch die homologen Zeiten und Geschwindigkeiten constante, von den Verhältnissen der genannten Grössen abhängige Verhältnisse besitzen. Um dies näher zu begründen, seien x_i, y_i, z_i; ξ_i, η_i, ζ_i; m_i, μ_i; X_i, Y_i, Z_i; Ξ_i, H_i, Z_i die Coordinaten, Massen und Kräfte der homologen Punkte. Dann bestehen für die homologen Bewegungen

beider Systeme die Beziehungen:

$$\Sigma \left\{\left(m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - X_i\right) \delta x_i + \left(m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - Y_i\right) \delta y_i + \left(m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - Z_i\right) \delta z_i\right\} = 0,$$

$$\Sigma \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial L}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial L}{\partial z_i} \delta z_i\right) = 0,$$

$$\Sigma \left(\frac{\partial M}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial M}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial M}{\partial z_i} \delta z_i\right) = 0 \quad .$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

für das eine und

$$\Sigma \left\{\left(\mu_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} - \Xi_i\right) \delta \xi_i + \left(\mu_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} - H_i\right) \delta \eta_i + \left(\mu_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} - Z_i\right) \delta \zeta_i\right\} = 0,$$

$$\Sigma \left(\frac{\partial L'}{\partial \xi_i} \delta \xi_i + \frac{\partial L'}{\partial \eta_i} \delta \eta_i + \frac{\partial L'}{\partial \zeta_i} \delta \zeta_i\right) = 0,$$

$$\Sigma \left(\frac{\partial M'}{\partial \xi_i} \delta \xi_i + \frac{\partial M'}{\delta \eta_i} \delta \eta_i + \frac{\partial M'}{\delta \zeta_i} \delta \zeta_i\right) = 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

für das andere, wenn $L(x, y, z;\, x', y', z', \ldots) = 0$, $M(x, y, z;\, x', y', z', \ldots) = 0, \ldots$, $L'(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = 0$, $M'(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = 0, \ldots$ die Bedingungen sind, welchen beide Systeme genügen müssen. Ist nun α das constante Verhältniss der Liniendimensionen, β das der Massen, γ das der Kräfte und sind ε und σ die Verhältnisse der homologen Zeiten und Geschwindigkeiten, so hat man:

$$\xi_i = \alpha x_i, \quad \eta_i = \alpha y_i, \quad \zeta_i = \alpha z_i; \quad \mu_i = \beta m_i;$$
$$\Xi_i = \gamma X_i, \quad H_i = \gamma Y_i, \quad Z_i = \gamma Z; \quad t' = \varepsilon t.$$

Hierdurch geht die Hauptgleichung für das zweite System über in

$$\Sigma \left\{\left(\frac{\alpha\beta}{\varepsilon^2} \frac{d^2 x_i}{dt^2} - \gamma X_i\right) \alpha \delta x_i + \left(\frac{\alpha\beta}{\varepsilon^2} \frac{d^2 y_i}{dt^2} - \gamma Y_i\right) \alpha \delta y_i \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\alpha\beta}{\varepsilon^2} \frac{d^2 z_i}{dt^2} - \gamma Z_i\right) \alpha \delta z_i\right\} = 0$$

und diese Relation muss vermöge der Aehnlichkeit der Systeme und der Bewegungen unabhängig von den Multiplicatoren $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ bestehen. Demnach müssen diese als gemeinschaftliche Factoren zur Linken herausfallen und muss

$$\frac{\alpha\beta}{\varepsilon^2} = \gamma$$

sein. Das Verhältniss σ der Geschwindigkeiten ergibt sich, wenn man bedenkt, dass Geschwindigkeit der Quotient des Bogenelementes durch das Zeitelement ist; es wird daher

$$\sigma = \frac{\alpha}{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta}}.$$

Was die Bedingungen $L = 0$, $L' = 0$; $M = 0$, $M' = 0$, ... betrifft, so müssen vermöge der geometrischen Aehnlichkeit der Systeme die Functionen L', M', ... dieselben wie L, M, ... und damit L', M', ... von dem Factor α unabhängige homogene Functionen der Coordinaten sein. Die vorstehende Betrachtung liefert daher den Satz:

Zwei Systeme, welche einander geometrisch ähnlich nach dem Aehnlichkeitsverhältnisse α sind, deren homologe Punkte Massen vom constanten Verhältniss β besitzen und an deren homologen Punkten Kräfte wirken, deren Richtungen und Sinn in beiden ähnliche Lage und Intensitäten besitzen, welche im constanten Verhältniss γ stehen, welche ferner von homologen Stellungen mit Geschwindigkeiten ausgehen, deren Verhältniss $\sigma = \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta}}$ ist, führen durchweg ähnliche Bewegungen aus und zwar ist das Verhältniss ε der homologen Zeiten, in welchen je zwei homologe Punkte homologe Bahnstrecken beschreiben, $\varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma}}$ und behalten die Geschwindigkeiten das Verhältniss σ fortwährend bei.

Man verdankt diesen wichtigen Satz Newton (*Principia*, lib. II, propos. 32). Schon Galilei wirft in seinen Dialogen die Frage auf, wie es komme, dass zwei ähnlich construirte Maschinen nicht auch immer ähnliche Bewegungen zeigen, dass oft eine Maschine im Modell sehr gut ist, während sie in grossem Massstabe ausgeführt, nicht das Gewünschte leistet. Er findet die Schwierigkeit in der Verschiedenheit der Widerstände, welche in beiden Maschinen auftreten. Nach Newton haben Cauchy [*Mém. de l'Acad. des sc.* T. IX, p. 117 (1829) und Combes Folgerungen aus den Betrachtungen Galilei's gezogen, Cauchy in Bezug auf physikalische Vorgänge, Combes in Bezug auf die Turbinen. In neuerer Zeit hat Bertrand (*Note sur la similitude en mécanique*, Journ. de lécole polytechn. Cah. XXXII, p. 189 (1848)] den Newton'schen Satz aus dem D'Alembert'schen Princip entwickelt und eine Menge älterer und neuerer Beispiele gesammelt, von denen wir einige mittheilen wollen.

1. Wenn zwei Punkte M, M' von gleichen Massen von demselben Centrum O der ersten Potenz ihrer Entfernung von ihm proportional angezogen werden, so erreichen sie, obgleich von verschiedenen Anfangslagen ausgehend, dennoch zu gleicher Zeit das Centrum, vorausgesetzt, dass sie ohne Anfangsgeschwindigkeiten oder mit solchen abgehen, welche proportional ihren anfänglichen Entfernungen von O sind. Das Centrum O bildet nämlich mit den Punkten M, M' zwei Systeme, in welchen das Verhältniss der Kräfte $\gamma = OM : OM'$, das der Linien $\alpha = OM : OM'$ und das der Massen $\beta = 1$ ist. Daher ist für das der Zeiten $\varepsilon^2 = \frac{OM}{OM'} : \frac{OM}{OM'} = 1$. Es entsprechen also proportionalen Abständen derselben von O gleiche Zeiten, mithin erreichen sie zu derselben Zeit das Centrum.

Zieht O nach der $n$ten Potenz der Entfernung an, so ist $\alpha = OM : OM'$, $\beta = 1$, $\gamma = \left(\frac{OM}{OM'}\right)^n$, also $\varepsilon^2 = \left(\frac{OM}{OM'}\right)^{1-n}$. Die homologen Strecken werden dann in Zeiten durchlaufen, deren Verhältniss $\varepsilon = \alpha^{\frac{1}{2}(1-n)}$ ist. Für die Newton'sche Attraction $n = -2$ wird $\varepsilon = \alpha^{\frac{3}{2}}$ (Euler, *Mechanica* T. I, Cap. III, §. 308).

Für die Bewegung eines schweren Punktes auf der Cycloide ist die Tangentialkraft $m\frac{dv}{dt} = mg \cos \frac{1}{2}\omega$, wenn ω den Wälzungswinkel darstellt (s. B. I, S. 403). Denkt man sich daher um einen Punkt O einen Kreis mit g als Radius beschrieben und einen Punkt M' gleichförmig auf diesem Kreise sich bewegend, so würde, wenn der nach ihm gezogene Radius OM' mit einem festen Durchmesser des Kreises den Winkel $\frac{1}{2}\omega$ bildet, seine Projection M auf diesen Durchmesser eine Bewegung haben, für welche $m\frac{dv}{dt} = mg \cos \frac{1}{2}\omega$ wäre, also dieselbe, als ob M von O der ersten Potenz der Entfernung proportional angezogen würde. Man folgert hieraus leicht den Isochronismus des Cycloidenpendels.

2. Zwei Punkte bewegen sich auf zwei Kreisen von den Radien r, r' mit constanten Geschwindigkeiten; ihre Massen und Umlaufszeiten seien m, m'; T, T'. Welches ist das Verhältniss der Centripetalkräfte, welche diese Bewegungen ermöglichen? Man hat hier $\alpha = r : r'$, $\beta = m : m'$, $\varepsilon = T : T'$, mithin

$$\gamma = \frac{\alpha\beta}{\varepsilon^2} = \frac{mr}{T^2} : \frac{m'r'}{T'^2}.$$

3. Zwei Pendel von den Längen schwingen an zwei Orten, wo die Beschleunigung der Schwere g und g' ist, nachdem sie um dieselben Elongationswinkel aus der Gleichgewichtslage herausgebracht sind; welches ist das Verhältniss der Zeiten, in welchen sie homologe Bogen durchlaufen, also auch das Verhältniss ihrer Oscillationsdauern? Es ist für sie $\alpha = l : l'$, $\beta = m : m'$, $\gamma = mg : m'g'$, mithin ist

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma}} = \sqrt{\frac{l}{g}} = \sqrt{\frac{l'}{g'}}.$$

4. Zwei Fäden von den Längen l, l' und den Massen m, m' seien durch zwei Gewichte P, P' gespannt. Die Oscillationsdauern T, T' haben für sie das Verhältniss:

$$T : T' = \sqrt{\frac{ml}{P}} : \sqrt{\frac{m'l'}{P'}}.$$

Denn es sind (mit Vernachlässigung der Fadendurchmesser) die Fäden zwei ähnliche Systeme, für welche $\alpha = l : l'$, $\beta = m : m'$, $\gamma = P : P'$, mithin ist

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{l}{l'} \cdot \frac{m}{m'} \cdot \frac{P'}{P}} \quad \text{u. s. w.}$$

Wenn die Fäden beide durch gleiche Gewichte gespannt und durch eine beliebige Anzahl von Massen belastet werden, welche auf beide ähnlich vertheilt sind und sich verhalten, wie die Längen der Fäden, so führen beide Fäden ihre Oscillationen in Zeiten aus, welche den Längen l, l' proportional sind (Duhamel). Denn es ist $\alpha = l : l'$, $\beta = l : l'$, $\gamma = 1$, also $\varepsilon = l : l'$.

5. Das Modell einer Maschine ist gegeben, man soll beurtheilen, ob die Ausführung im Grossen empfehlenswerth ist oder nicht.

Ist α das Aehnlichkeitsverhältniss, so ist α^3 das der Massen, das der Schwerkräfte ist also gleichfalls α^3, es muss mithin das Verhältniss aller anderen Kräfte, welche auf die Maschine und das Modell wirken, gleichfalls α^3 sein. Das Verhältniss der Zeiten ist demzufolge $\varepsilon = \sqrt{\alpha}$; das der Arbeiten α^4, das der Geschwindigkeiten $\sqrt{\alpha}$. Da die Widerstände der Luft dem Quadrate der Geschwindigkeit und den Flächen proportional sind, so ist ihr Verhältniss α^3, wie gefordert wird; auch die gleitende Reibung, welche proportional dem Drucke ist, liefert das Verhältniss α^3, die wälzende Reibung aber, welche proportional dem Drucke und umgekehrt proportional dem Durchmesser der Räder angenommen wird, liefert das Verhältniss α^2. Sie ist demnach im Modell grösser, als in der Maschine.

VI. Capitel.

Die Principe der Bewegung des Massenmittelpunktes, der Flächen, der invariabelen Ebene und der lebendigen Kraft für das veränderliche System.

§. 1. Durch Combination der Bewegungsgleichungen

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + S_x^{(i)}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + S_y^{(i)}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + S_z^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots n$$

des §. 4 im vorigen Capitel oder auch durch passende Wahl der virtuellen Verschiebungen in der Gleichung

$$\Sigma \left\{ \left(m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - X_i \right) \delta x_i + \left(m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - Y_i \right) \delta y_i + \left(m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - Z_i \right) \delta z_i \right\}$$
$$= \Sigma \left\{ S_x^{(i)} \delta x_i + S_y^{(i)} \delta y_i + S_z^{(i)} \delta z_i \right\}$$

erhält man Sätze von umfassender Anwendbarkeit (Principe) für das beliebig veränderliche System, welche zum Theil Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung liefern und für das unveränderliche System bereits Cap. II, §. 13 aufgestellt wurden.

Summirt man die Bewegungsgleichungen nach dem Index i, so erhält man

$$\Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \Sigma X_i + \Sigma S_x^{(i)},$$

$$\Sigma m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \Sigma Y_i + \Sigma S_y^{(i)},$$

$$\Sigma m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \Sigma Z_i + \Sigma S_z^{(i)}.$$

Für den Massenmittelpunkt $(x_1 y_1 z_1)$ des Systems bestehen aber die Gleichungen

$$\Sigma m_i x_i = M x_1, \qquad \Sigma m_i y_i = M y_1, \qquad \Sigma m_i z_i = M z_1,$$

$$\Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = M \frac{d^2 x_1}{dt^2}, \quad \Sigma m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = M \frac{d^2 y_1}{dt^2}, \quad \Sigma m_i \frac{d^2 z^2}{dt^2} = M \frac{d^2 z_1}{dt^2}.$$

Mit ihrer Hülfe erhält man daher aus den vorstehenden:

$$M \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \Sigma X_i + \Sigma S_x^{(i)}, \quad M \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \Sigma Y_i + \Sigma S_y^{(i)}, \quad M \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \Sigma Z_i + \Sigma S_z^{(i)}.$$

Dies sind aber die Bewegungsgleichungen des Punktes x_1, y_1, z_1. Sie drücken den Satz aus:

Der Massenmittelpunkt des Systems bewegt sich so, als ob er die Gesammtmasse des Systems enthielte und an ihm sämmtliche Kräfte, innere, äussere und die Kräfte, welche die Bedingungen des Systems vertreten, parallel mit ihren Richtungen angriffen. (Princip der Bewegung des Massenmittelpunktes.)

Es sei das System frei, also $S_x^{(i)} = 0$, $S_y^{(i)} = 0$, $S_z^{(i)} = 0$. Halten sich in diesem Falle die Kräfte P_i, wenn sie parallel mit sich an einen Punkt verschoben gedacht werden, Gleichgewicht oder sind sie Null, so ist $\Sigma X_i = 0$, $\Sigma Y_i = 0$, $\Sigma Z_i = 0$ und die Bewegungsgleichungen des Massenmittelpunktes werden:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2 z_1}{dt^2} = 0.$$

Aus ihnen folgt

$$x_1 = \alpha_0 + \alpha_1 t, \quad y_1 = \beta_0 + \beta_1 t, \quad z_1 = \gamma_0 + \gamma_1 t.$$

Der Massenmittelpunkt beschreibt daher die Gerade

$$\frac{x_1 - \alpha_0}{\alpha_1} = \frac{y_1 - \beta_0}{\beta_1} = \frac{z_1 - \gamma_0}{\gamma}$$

mit constanter Geschwindigkeit $v = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}$. Dieser Fall tritt insbesondere ein, wenn eine Kräftefunction U existirt, welche blos von den Differenzen der Coordinaten der Systempunkte abhängt. Enthält nämlich U die Differenz $x_h - x_k = \xi$, so ist

$$\frac{\partial U}{\partial x_h} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial U}{\partial x_k} = -\frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \text{also} \quad \frac{\partial U}{\partial x_h} + \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0$$

und ähnlich für alle übrigen Differenzen, sodass

$$\Sigma X_i = \Sigma \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \qquad \Sigma Y_i = \Sigma \frac{\partial U}{\partial y_i} = 0, \qquad \Sigma Z_i = \Sigma \frac{\partial U}{\partial z_i} = 0$$

werden. So insbesondere bei gegenseitigen Attractionen der Systempunkte. Man sieht dies auch direct ein, indem diese inneren Kräfte paarweise gleich und entgegengesetzt sind und sich also am Reductionspunkte paarweise tilgen.

Ist das System nicht frei, sind aber die Bedingungen so beschaffen, dass sie blos von den Differenzen der x-Coordinaten, der y-Coordinaten und der z-Coordinaten abhängen, so werden $\Sigma S_x^{(i)}$, $\Sigma S_y^{(i)}$, $\Sigma S_z^{(i)}$ Null, weil sie die Differentialquotienten $\frac{\partial L}{\partial x_h}, \frac{\partial L}{\partial x_k}, \ldots$ enthalten, welche paarweise sich tilgen. Die Kräfte, welche solche Bedingungen zu vertreten vermögen, tilgen sich daher ebenfalls paarweise. Man kann daher den Satz aufstellen:

Ist ein System keinen continuirlichen Kräften oder inneren paarweise entgegengesetzt gleichen oder überhaupt solchen Kräften unterworfen, welche an einen Punkt verlegt sich Gleichgewicht halten und ist es frei, so bewegt sich der Massenmittelpunkt desselben gleichförmig in gerader Linie oder bleibt in Ruhe, wenn es anfänglich ruhte. Dasselbe findet statt, wenn das System nicht frei ist, aber ausser diesen Bedingungen auch die Kräfte, welche die Bedingungsgleichungen des Systems vertreten, an einen Punkt verlegt im Gleichgewichte sind. Insbesondere findet dieser Satz statt, wenn eine Kräftefunction existirt und sie nebst den Bedingungsgleichungen nur von den Coordinatendifferenzen abhängt. (Princip der Erhaltung der Bewegung des Massenmittelpunktes.)

Die Gleichungen für die Bewegung des Massenmittelpunktes erhält man auch aus der Gleichung, welche das D'Alembert'sche Princip mit Hülfe der Variationen der Coordinaten darstellt, indem man dem System einmal eine Verschiebung parallel der x-Axe, das anderemal eine solche parallel der y-Axe oder parallel der z-Axe ertheilt denkt. Die Variationen δx sind hierbei im ersten Falle alle gleich und zugleich alle δy und δz Null; in den beiden anderen sind alle δy, resp. δz gleich und δx und δz, resp. δx und δy Null. Jedesmal fällt aber die noch in der Gleichung verbleibende Variation als gemeinsamer Factor heraus.

Um den Inhalt und Umfang des Princips von der Bewegung des Massenmittelpunktes zu erläutern, wählen wir folgende Beispiele und Anwendungen.

1. Ein Körper, auf welchen die Schwere wirkt, wird im leeren Raume in irgend einer Weise geschleudert und ist sich hierauf selbst überlassen. Sein Massenmittelpunkt beschreibt dem Principe zufolge eine Parabel, deren Ebene vertikal ist und durch die Anfangsrichtung der Geschwindigkeit desselben hindurchgeht. Die vollständige Bewegung des Körpers ist eine Windungsbewegung mit jedem Augenblick wechselnder Axe; dieselbe kann man auflösen in die Translationsbewegung eines Systempunktes und die Rotation um eine bewegliche, durch diesen hindurchgehende Axe. Wählt man zu dem Systempunkt den Massenmittelpunkt, so zerfällt die Bewegung des Körpers also in die parabolische Translation dieses, verbunden mit einer Rotation um eine wechselnde Axe des Massenmittelpunktes.

2. Zerfällt ein System während der Bewegung oder finden Explosionen in demselben statt, so finden diese Ereignisse nur in Folge des Aufhörens oder der

Erregung innerer Kräfte statt und da diese stets paarweise sich gleich und entgegengesetzt sind, so vermögen sie nicht die Bewegung des Massenmittelpunktes zu ändern; dieser setzt vielmehr trotz des Auseinanderfliegens der Systemstücke seine Bahn fort, als ob gar keine Störung stattgefunden hätte. Wenn eine Bombe zerplatzt, so wird die Explosion durch die chemischen Molecularkräfte hervorgerufen, welche als gegenseitige Anziehungs- und Abstossungskräfte paarweise gleich und entgegengesetzt sind. So lange die Bombenstücke nicht auf ein Hinderniss stossen, dessen Widerstand als eine neue Kraft in das System eintritt, geht der Schwerpunkt der zerplatzten Bombe in der parabolischen Bahn der kugelförmigen Bombe fort. Eine kleine Modification erleidet die Bewegung des Schwerpunktes in der Luft nach dem Zerplatzen, indem der Luftwiderstand auf die Bombensplitter anders wirkt, als auf die unversehrte Bombe.

In ähnlicher Weise haben alle Eruptionen der Vulkane, Erdbeben u. s. w. keinen Einfluss auf die Bewegung des Massenmittelpunktes der Erde oder gar des Sonnensystems; die Erde könnte zertrümmert werden und das ganze Sonnensystem könnte zerfallen, ohne dass der Schwerpunkt des Ganzen in seiner Bahn oder seiner Geschwindigkeit gestört würde.

3. Auf unser Sonnensystem wirken als äussere Kräfte die Anziehungen der Fixsternwelt; wegen der ausserordentlich grossen Entfernung sind diese Kräfte sehr klein und halten sich also, für den Massenmittelpunkt des Sonnensystems reducirt, nahezu Gleichgewicht. Daher ist der Massenmittelpunkt des Sonnensystems entweder in Ruhe oder er bewegt sich nahezu in gerader Linie mit approximativ constanter Geschwindigkeit. Man hat die Richtung dieser Geraden durch Beobachtung zu bestimmen gesucht.

4. Ein lebendes Wesen befinde sich isolirt im Raume; es mögen auf dasselbe keine äusseren Kräfte, ausser etwa die Schwere wirken und in diesem Falle soll dasselbe durch eine vollkommen glatte horizontale Ebene unterstützt sein, deren Widerstand das Gewicht tilgt. Trotz aller Muskelanstrengung wird es dem Wesen nicht gelingen, seinen Schwerpunkt in Bewegung zu setzen, wenn es ursprünglich in Ruhe war oder ihn zur Ruhe zu bringen, wenn er sich in Bewegung befindet. Denn alle Muskelkräfte sind als innere Kräfte paarweise gleich und entgegengesetzt und vernichten sich, an den Schwerpunkt verlegt. So sehr auch immer ein Vogel in solcher Lage mit den Flügeln schlagen mag, es wird nicht helfen, ihn vom Fleck zu bringen; so viel auch immer der Mensch auf einer vollkommen glatten Horizontalebene sich drehen und wenden und seine Muskeln anstrengen mag, er wird seinen Schwerpunkt nicht heben und nicht aufstehen können, wenn er liegt oder sitzt.. Blos der Luftwiderstand und die Reibung, wenn sie als neue äussere Kräfte hinzutreten, machen eine Aenderung in der Lage des Schwerpunktes möglich.

5. Eine Locomotive werde an Ketten frei aufgehängt, sodass sie schwingen kann, wie ein Pendel; sie befinde sich in Ruhe. Wird nun der Kessel geheizt und lässt man den Dampf auf die Kolben wirken, so macht die Locomotive Schwingungen. Bei der Bewegung der Kolben wird nämlich der Schwerpunkt im Innern der Maschine verlegt, da aber auf das ganze System nur äussere Kräfte wirken, die im Gleichgewichte sind (denn der Dampfdruck bildet sich durch innere Kräfte), so muss der Schwerpunkt im Raume ruhen. Dies ist aber nur möglich, wenn gleichzeitig mit dem Vorwärtsgehen der Kolben das ganze System rückwärts geht und umgekehrt.

§. 2. Integrirt man die Gleichungen

$$\Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \Sigma m_i \frac{dx_i}{dt} = \Sigma X_i + \Sigma S_x^{(i)},$$

$$\Sigma m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \Sigma m_i \frac{dy_i}{dt} = \Sigma Y_i + \Sigma S_y^{(i)},$$

$$\Sigma m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \Sigma m_i \frac{dz_i}{dt} = \Sigma Z_i + \Sigma S_z^{(i)}$$

über ein beliebiges Zeitintervall $t - t_0$ hinweg, so kommt

$$\Sigma m_i \frac{dx_i}{dt} - \left(\Sigma m_i \frac{dx_i}{dt}\right)_{t_0} = \Sigma \int_{t_0}^{t} (X_i + S_x^{(i)})\, dt,$$

$$\Sigma m_i \frac{dy_i}{dt} - \left(\Sigma m_i \frac{dy_i}{dt}\right)_{t_0} = \Sigma \int_{t_0}^{t} (Y_i + S_y^{(i)})\, dt,$$

$$\Sigma m_i \frac{dz_i}{dt} - \left(\Sigma m_i \frac{dz_i}{dt}\right)_{t_0} = \Sigma \int_{t_0}^{t} (Z_i + S_z^{(i)})\, dt$$

und wenn man diese Gleichungen der Reihe nach mit den Richtungscosinussen einer beliebigen Axe $(\alpha \beta \gamma)$ multiplicirt und sie addirt, weiter

$$\Sigma \left(m_i \frac{dx_i}{dt} \cos\alpha + m_i \frac{dy_i}{dt} \cos\beta + m_i \frac{dz_i}{dt} \cos\gamma\right)$$

$$- \Sigma \left(m_i \frac{dx_i}{dt} \cos\alpha + m_i \frac{dy_i}{dt} \cos\beta + m_i \frac{dz_i}{dt} \cos\gamma\right)_{t_0}$$

$$= \Sigma \int_{t_0}^{t} [(X_i + S_x^{(i)}) \cos\alpha + (Y_i + S_y^{(i)}) \cos\beta + (Z_i + S_z^{(i)}) \cos\gamma]\, dt.$$

Bezeichnet nun ϑ_i den Winkel, welchen die Geschwindigkeit v_i des Punktes m_i, Θ_i den Winkel, welchen P_i und Θ_i' den, welchen $S^{(i)}$ mit jener Axe bildet, so kann man die Gleichung schreiben:

$$\Sigma m_i v_i \cos\vartheta_i - (\Sigma m_i v_i \cos\vartheta_i)_{t_0} = \Sigma \int_{t_0}^{t} (P_i \cos\Theta_i + S_i \cos\Theta_i')\, dt,$$

d. h.: Projicirt man ein in Bewegung begriffenes System auf irgend eine Axe, so ist die Aenderung der Summe der Momentankräfte für die Projectionsbewegung während irgend eines Zeitintervalls gleich der Projection des totalen Kraftantriebes auf die Axe während dieser Zeit.

Sind $\Sigma X_i = \Sigma Y_i = \Sigma Z_i = 0$, $\Sigma S_x^{(i)} = \Sigma S_y^{(i)} = \Sigma S_z^{(i)} = 0$, so bleibt blos

$$\Sigma m_i v_i \cos\vartheta_i = (\Sigma m_i v_i \cos\vartheta_i)_{t_0},$$

d. h.: Gilt das Princip der Erhaltung der Bewegung des Massenmittelpunktes, so bleibt die Summe der Momentankräfte für die Projectionsbewegung constant.

Man kann die obigen Gleichungen auch durch folgende ersetzen:

$$M\frac{dx_1}{dt} - \left(M\frac{dx_1}{dt}\right)_{t_0} = \Sigma\int_{t_0}^{t}(X_i + S_x^{(i)})\,dt,$$

$$M\frac{dy_1}{dt} - \left(M\frac{dy_1}{dt}\right)_{t_0} = \Sigma\int_{t_0}^{t}(Y_i + S_y^{(i)})\,dt,$$

$$M\frac{dz_1}{dt} - \left(M\frac{dz_1}{dt}\right)_{t_0} = \Sigma\int_{t_0}^{t}(Z_i + S_z^{(i)})\,dt,$$

und erhält, wenn A der Winkel ist, den die Momentankraft MV des Massenmittelpunktes mit der Axe bildet:

$$MV\cos A - (MV\cos A)_{t_0} = \Sigma\int_{t_0}^{t}(P_i\cos\Theta_i + S_i\cos\Theta_i')\,dt.$$

Der vorstehende Satz kann folgende Erscheinungen erklären: a) den Rückstoss der Geschütze. Vor der Explosion bilden Geschütz und Ladung ein System, welches unter Einfluss der Schwere und des Widerstandes des ebenen Bodens im Gleichgewicht und ausserdem in Ruhe sich befindet. Die Summe der Momentankräfte, projicirt auf eine beliebige Axe, z. B. auf die Axe des Rohrs, ist daher Null. Da nun bei der Explosion nur innere Kräfte entwickelt werden, so muss diese Summe constant gleich Null bleiben; damit dies möglich sei, muss die Summe der Momentankräfte für die Kugel der Summe der Momentankräfte für das Geschütz entgegengesetzt gleich sein. Daher erlangen die Schwerpunkte beider Theile entgegengesetzte Geschwindigkeiten, welche sich umgekehrt, wie die Massen dieser Theile verhalten und wird das Geschütz rückwärts ausweichen. Eine kleine Abweichung hiervon findet allerdings statt, weil das Pulver der Ladung verdampft; die Geschwindigkeit, mit welcher das Geschütz zurückweicht, ist deshalb etwas grösser, als sie ohne dies sein würde. b) Das Aufsteigen der Raketen. Bei der Entzündung tritt am unteren Ende der Rakete immer mehr Zündmasse aus, welche verbrennt und den Feuerstreifen liefert; daher muss die Rakete selbst eine entgegengesetzte Geschwindigkeit annehmen und aufsteigen. Die Beschleunigung der Schwere vernichtet diese Geschwindigkeit allmälig.

§. 3. Wir combiniren jetzt die Differentialgleichungen der Bewegung so, dass wir die dritte mit y_i und die zweite mit z_i multipliciren, letzteres Produkt von ersterem subtrahiren und hierauf nach i summiren. Dies liefert, in Bezug auf alle drei Coordinatenpaare y_i, z_i; z_i, x_i; x_i, y_i ausgeführt, die Gleichungen

$$\Sigma m_i \left(y_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) = \Sigma (y_i Z_i - z_i Y_i) + \Sigma (y_i S_z^{(i)} - z_i S_y^{(i)}),$$

$$\Sigma m_i \left(z_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - x_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) = \Sigma (z_i X_i - x_i Z_i) + \Sigma (z_i S_x^{(i)} - x_i S_z^{(i)}),$$

$$\Sigma m_i \left(x_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - y_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) = \Sigma (x_i Y_i - y_i X_i) + \Sigma (x_i S_y^{(i)} - y_i S_x^{(i)}).$$

Denkt man sich die Kräfte, welche am System zugreifen, für den Coordinatenursprung reducirt, wie beim unveränderlichen System, so drücken diese Gleichungen die Aequivalenz des resultirenden Paares der Effectivkräfte $m_i \varphi_i$ mit dem resultirenden Paare der gegebenen und der Bedingungskräfte aus. Ebenso drücken die Gleichungen $\Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \Sigma X_i + \Sigma S_x^{(i)}, \ldots,$ aus welchen das Princip der Bewegung des Massenmittelpunktes hervorging, die Aequivalenz der Reductionsresultanten der Kräfte $m_i \varphi_i$ mit den Reductionsresultanten der gegebenen und der Bedingungskräfte aus.

Nehmen wir nun an, es sei die rechte Seite einer der drei obigen Gleichungen, z. B. die der ersten fortwährend gleich Null, so wird

$$\Sigma m_i \left(y_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) = 0,$$

d. h. die Componente des Axenmomentes des Paares der Kräfte $m_i \varphi_i$, welche der x-Axe parallel ist, bleibt Null. Diese Gleichung gibt integrirt

$$\Sigma m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) = D_1$$

und drückt aus, dass die Componente des resultirenden Axenmomentes der Momentankräfte parallel der x-Axe constant bleibt. Projicirt man nun das System sammt allen vom Ursprung nach den Systempunkten gezogenen Radienvectoren auf eine zur x-Axe senkrechte Ebene und nennt $d\sigma_x^{(i)}$ den Elementarsector, welchen die Projection des nach m_i hinführenden Radiusvectors auf jene Ebene im Zeitelemente beschreibt, so nimmt die Gleichung die Gestalt an

$$\Sigma m_i \frac{d\sigma_x^{(i)}}{dt} = \tfrac{1}{2} D_1$$

und liefert nach der Integration

$$\Sigma m_i \sigma_x^{(i)} = \tfrac{1}{2} D_1 (t - t_0),$$

wenn man die Sectoren $\sigma_x^{(i)}$ von der Stellung der Radienvectoren zur Zeit $t = 0$ an rechnet. Man hat daher den Satz:

Wenn die Componente des resultirenden Axenmomentes aller am System angreifenden Kräfte, welches sich ergibt, wenn man dieselben wie beim unveränderlichen System für einen

Punkt (den Coordinatenursprung) reducirt, parallel irgend einer Axe während der Bewegung des Systems fortwährend verschwindet, also die Componente des entsprechenden Axenmomentes der Momentankräfte constant ist, so ist für die Projection des beweglichen Systems auf eine zu jener Axe senkrechte Ebene die Summe der Sectorengeschwindigkeiten, jede mit der Masse des betreffenden Systempunktes multiplicirt constant und ändert sich die Summe der Produkte aus den Sectoren und den Massen der Zeit proportional. (Princip der Flächen.) Sind auch die beiden Grössen

$$\Sigma(z_i X_i - x_i Z_i) + \Sigma(z_i S_x^{(i)} - x_i S_z^{(i)}) = 0, \quad \Sigma(x_i Y_i - y_i X_i) + \Sigma(x_i S_y^{(i)} - y_i S_x^{(i)}) = 0,$$

so gilt dieser Satz auch für die Axen des y in z, resp. für Ebenen senkrecht zu ihnen als Projectionsebenen und hat man ebenso

$$\Sigma m_i \frac{d\sigma_y^{(i)}}{dt} = \tfrac{1}{2} D_2, \qquad \Sigma m_i \frac{d\sigma_z^{(i)}}{dt} = \tfrac{1}{2} D_3,$$

sowie

$$\Sigma m_i \sigma_y^{(i)} = \tfrac{1}{2} D_2 (t - t_0), \qquad \Sigma m_i \sigma_z^{(i)} = \tfrac{1}{2} D_3 (t - t_0).$$

Gilt als Flächenprincip für drei zu einander senkrechte Ebenen, d. h. verschwinden sämmtliche drei Componenten des resultirenden Paares der continuirlichen Kräfte bei der Reduction für einen Punkt, so gilt dasselbe für alle Ebenen des Raumes. Denn es sei $(\alpha\beta\gamma)$ die Richtung der Normalen N einer beliebigen Ebene, so erhält man

$$\Sigma m_i (d\sigma_x^{(i)} \cdot \cos\alpha + d\sigma_y^{(i)} \cdot \cos\beta + d\sigma_z^{(i)} \cdot \cos\gamma) = \tfrac{1}{2}(D_1 \cos\alpha + D_2 \cos\beta + D_3 \cos\gamma)\, dt.$$

Es bedeutet aber $d\sigma_x^{(i)} \cos\alpha + d\sigma_y^{(i)} \cos\beta + d\sigma_z^{(i)} \cos\gamma$ die Projectionssumme der Elementarsectoren $d\sigma_x^{(i)}$, $d\sigma_y^{(i)}$, $d\sigma_z^{(i)}$ oder also die Projection des vom Radiusvector, der nach m_i führt, im Raume beschriebenen Elementarsectors auf die neue Ebene. Bezeichnen wir dieselbe mit $d\sigma_N^{(i)}$, so ist die linke Seite vorstehender Gleichung $\Sigma m_i d\sigma_N^{(i)}$. Die Grössen D_1, D_2, D_3 sind die Componenten des resultirenden Paares $G = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}$ der Momentankräfte und wenn (abc) dessen Richtung ist, so sind $D_1 = G \cos a$, $D_2 = G \cos b$, $D_3 = G \cos c$. Daher wird die rechte Seite obiger Gleichung gleich

$$\tfrac{1}{2} G (\cos a \cos\alpha + \cos b \cos\beta + \cos c \cos\gamma)\, dt = \tfrac{1}{2} G \cos\vartheta \cdot dt,$$

wenn ϑ den Winkel (N, G) bezeichnet. Demnach erhalten wir weiter

$$\Sigma m_i d\sigma_N^{(i)} = \tfrac{1}{2} G \cos\vartheta\, dt, \qquad \Sigma m_i \sigma_N^{(i)} = \tfrac{1}{2} G \cos\vartheta \cdot (t - t_0).$$

Diese Summe wird ein Maximum für $\vartheta = 0$, d. h. die Summe der Flächenräume, multiplicirt mit den Massen, wird ein Maximum

für die zur Axe des resultirenden Paares der Momentankräfte senkrechte Ebene.

Es fragt sich, in welchen Fällen eine oder die andere der drei Summen auf den rechten Seiten der Gleichungen verschwindet. Nehmen wir an, das System sei frei, also alle $S_x^{(i)} = S_y^{(i)} = S_z^{(i)} = 0$. Damit $\Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i)$ verschwinde, muss das Paar, welches die Kräfte Y_i, Z_i in der yz-Ebene bei der Reduction für den Coordinatenursprung liefern, Null sein, müssen sich also diese Kräfte auf eine blosse Resultante reduciren, deren Lage also die Lage der Centralaxe des ebenen Kräftesystems hat. Es existire nun eine Kräftefunction U. An die Stelle der Coordinaten y_i, z_i führen wir Polarcoordinaten r_i, ϑ_i in der yz-Ebene ein, während wir x_i beibehalten. Wird dadurch nun U zu einer Function von x_i, r_i und den Differenzen der Winkel ϑ, so verschwindet

$$\Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i) = \Sigma\left(y_i \frac{\partial U}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial U}{\partial y_i}\right),$$

weil sich darin die Glieder paarweise tilgen. Man erhält nämlich vermöge der Gleichungen

$$y_h = r_h \cos\vartheta_h, \quad z_h = r_h \sin\vartheta_h; \quad y_k = r_k \cos\vartheta_k, \quad z_k = r_k \sin\vartheta_k,$$

behufs Einführung der neuen Variabelen, weil die Differentiationen nach z_h und y_h resp. y_h und z_h als constant voraussetzen

$$\frac{\partial U}{\partial z_h} dz_h = \frac{\partial U}{\partial r_h} dr_h + \frac{\partial U}{\partial \vartheta_h} \partial\vartheta_h, \qquad \frac{\partial U}{\partial y_h} dy_h = \frac{\partial U}{\partial r_h} dr_h + \frac{\partial U}{\partial \vartheta_h} d\vartheta_h$$

$$dz_h = \sin\vartheta_h dr_h + y_h d\vartheta_h, \qquad 0 = \sin\vartheta_h dr_h + y_h d\vartheta_h,$$

$$0 = \cos\vartheta_h dr_h + z_h d\vartheta_h, \qquad dy_h = \cos\vartheta_h dr_h - z_h d\vartheta_h,$$

woraus

$$\frac{\partial U}{\partial z_h} = \frac{\partial U}{\partial r_h} \sin\vartheta_h + \frac{1}{r_h} \frac{\partial U}{\partial \vartheta_h} \cos\vartheta_h, \qquad \frac{\partial U}{\partial y_h} = \frac{\partial U}{\partial r_h} \cos\vartheta_h - \frac{1}{r_h} \frac{\partial U}{\partial \vartheta_h} \sin\vartheta_h$$

und mithin

$$y_h \frac{\partial U}{\partial z_h} - z_h \frac{\partial U}{\partial y_h} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta_h} \text{ und ebenso } y_k \frac{\partial U}{\partial z_k} - z_k \frac{\partial U}{\partial y_k} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta_k}$$

Enthält nun U blos die Differenzen $\vartheta_h - \vartheta_k = \xi$, so werden

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta_k} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial U}{\partial \vartheta_h} = -\frac{\partial U}{\partial \xi}$$

und folglich tilgen sich die den Indices h und k entsprechenden Glieder in $\Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i)$. Daher: wenn eine Kräftefunction U existirt und sie von den Differenzen der Winkel abhängt, welche die Projectionen der Radienvectoren auf die eine Coordinatenebene mit einer der in ihr liegenden Axen bilden, so gilt das Princip der Flächen für diese Coordinatenebene.

Der Sinn davon, dass U blos Function von den Winkeldifferenzen ist, ist der, dass U sich nicht ändert, wenn man dem System eine virtuelle Drehung um die zur Ebene, wofür das Princip gilt, senkrechte Axe dergestalt ertheilt, dass das System sich wie ein unveränderliches verhält. Dieser Fall tritt ein, wenn in U nur die Entfernungen je zweier Punkte vorkommen. Denn man hat für die Entfernung r_{hk} der Punkte m_h, m_k

$$r_{hk}^2 = (x_h - x_k)^2 + (r_h \cos\vartheta_h - r_k \sin\vartheta_k)^2 + (r_h \sin\vartheta_h - r_k \sin\vartheta_k)^2$$
$$= (x_h - x_k)^2 + r_h^2 + r_k^2 - 2 r_h r_k \cos(\vartheta_h - \vartheta_k)$$

und dieser Ausdruck enthält die Winkel ϑ_h, ϑ_k blos in der Verbindung $\vartheta_h - \vartheta_k$. Wenn daher ein unveränderliches System U blos von Coordinatendifferenzen abhängt, so gilt immer das Princip der Flächen. Für gegenseitige Attractionen gibt es immer eine Kräftefunction, welche von den Entfernungen abhängt, daher gilt bei Attractionen das Princip für alle Ebenen. Es erhellt dies auch daraus, dass alle diese inneren paarweise entgegengesetzt gleichen Kräfte sich bei der Bildung des resultirenden Paares tilgen und dieses selbst mithin verschwindet. Bestehen ausser den gegenseitigen Attractionen noch Attractionen nach festen Centren, so hört das Princip der Flächen auf zu gelten, es sei denn, dass diese Centra alle in gerader Linie liegen. Denn wählt man diese Gerade zur Axe der x und projicirt auf die Ebene senkrecht zu ihr, so liefern die Attractionen nach den Centren in der Projection eine Resultante, welche durch den Ursprung des Coordinatensystems geht und kein resultirendes Paar.

In allen Fällen, in welchen sich alle Kräfte auf eine Einzelresultante reduciren, die durch einen festen Punkt geht, gilt das Princip der Flächen für alle Ebenen.

Ist das System nicht frei, so gilt das Princip nur dann, wenn die Bedingungen und Bedingungskräfte an den genannten zur Existenz des Princips erforderlichen Eigenschaften Theil nehmen. So z. B. wenn die Bedingungsgleichungen blos von den Winkeldifferenzen abhängen, wenn die Verbindungskräfte paarweise gleich und entgegengesetzt sind u. s. w.

Das Princip der Flächen gilt auch für die relative Bewegung freier Systeme. Setzt man $x_i = x_1 + \xi_i$, $y_i = y_1 + \eta_i$, $z_i = z_1 + \zeta_i$ in die Bewegungsgleichung ein, so wird z. B. die dritte:

$$x_1 \Sigma m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - y_1 \Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \Sigma m_i \left(\xi_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - \eta_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\right)$$
$$= x_1 \Sigma Y_i - y_1 \Sigma X_i + \Sigma(\xi_i Y_i - \eta_i X_i)$$

oder da vermöge des Princips der Bewegung des Massenmittelpunktes

$$\Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \Sigma X_i, \quad \Sigma m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \Sigma Y_i$$

ist,

$$\Sigma m_i \left(\xi_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - \eta_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\right) = \Sigma(\xi_i Y_i - \eta_i X_i).$$

Setzt man hierin die Werthe

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{d^2 \xi_i}{dt^2}, \quad \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{d^2 \eta_i}{dt^2}, \quad \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2}$$

ein, so kommt

$$\Sigma m_i \xi_i \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2} - \Sigma m_i \eta_i \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \Sigma m_i \left(\xi_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} - \eta_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2}\right) = \Sigma(\xi_i Y_i - \eta_i X_i).$$

Diese Gleichung, sowie die analog gebildeten vereinfachen sich durch die besondere Wahl des Ursprungs $(x_1\, y_1\, z_1)$ der relativen Coordinaten. Ist derselbe der Massenmittelpunkt, oder ein Systempunkt, welcher eine gleichförmige Bewegung hat oder ein Punkt, dessen Beschleunigung fortwährend durch den Massen-

mittelpunkt hindurchgeht, so ist $\Sigma m_i \xi_i = \Sigma m_i \eta_i = 0$ oder

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{d^2 y_1}{dt^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} : \frac{d^2 y_1}{dt^2} : \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \Sigma m_i \xi_i : \Sigma m_i \eta_i : \Sigma m_i \zeta_i .$$

In allen drei Fällen wird $\Sigma m_i \xi_i \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2} - \Sigma m_i \eta_i \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0$ und die obige Gleichung nebst den beiden analogen:

$$\Sigma m_i \left(\eta_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} - \zeta_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2}\right) = \Sigma (\eta_i Z_i - \zeta_i Y_i),$$

$$\Sigma m_i \left(\zeta_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} - \xi_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2}\right) = \Sigma (\zeta_i X_i - \xi_i Z_i),$$

$$\Sigma m_i \left(\xi_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} - \eta_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2}\right) = \Sigma (\xi_i Y_i - \eta_i X_i).$$

Da diese Gleichungen dieselbe Form, wie die Gleichungen des Princips für die absolute Bewegung haben, so gelten auch die von dieser Form abhängigen Bedingungen der Existenz des Flächenprincips.

§. 4. Integrirt man die Gleichungen des §. 3 über das beliebige Zeitintervall $t - t_0$ hinweg, so erhält man

$$\Sigma m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt}\right) - \left[\Sigma m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt}\right)\right]_{t_0}$$
$$= \Sigma \int_{t_0}^{t} (y_i Z_i - z_i Y_i)\, dt + \Sigma \int_{t_0}^{t} (y_i S_z^{(i)} - z_i S_y^{(i)})\, dt,$$

$$\Sigma m_i \left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt}\right) - \left[\Sigma m_i \left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt}\right)\right]_{t_0}$$
$$= \Sigma \int_{t_0}^{t} (z_i X_i - x_i Z_i)\, dt + \Sigma \int_{t_0}^{t} (z_i X_i - x_i Z_i)\, dt,$$

$$\Sigma m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt}\right) - \left[\Sigma m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt}\right)\right]_{t_0}$$
$$= \Sigma \int_{t_0}^{t} (x_i Y_i - y_i X_i)\, dt + \Sigma \int_{t_0}^{t} (x_i Y_i - y_i X_i)\, dt,$$

d. h.:

Die Aenderungen, welche die Componenten des resultirenden Paares der Momentankräfte während irgend eines Zeitraumes erfahren, sind die Integrale der Componenten des resultirenden Paares der gegebenen und der Bedingungskräfte, über dieselbe Zeit ausgedehnt.

Ist $(\alpha \beta \gamma)$ die Richtung einer Axe, multiplicirt man diese drei Gleichungen mit $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ und addirt sie, so ergibt sich:

Die Aenderung der Projection des resultirenden Axenmomentes der Momentankräfte auf irgend eine Axe ist gleich dem Integrale der Projection des Axenmomentes der gegebenen und der Bedingungkräfte auf dieselbe Axe.

Sind daher die gegebenen und die Bedingungskräfte im Gleichgewicht oder reduciren sich dieselben fortwährend auf eine Einzelresultante, so bleibt das resultirende Axenmoment der Momentankräfte constant nach Grösse und Axenrichtung.

Die zu dieser Axe senkrechte Ebene behält während der Bewegung fortwährend dieselbe Stellung im Raume und wurde von Laplace die invariabele Ebene genannt; ihre Normale heisst die invariabele Axe. Die invariabele Ebene ist die §. 3 erwähnte Ebene des Maximums der Flächen. Die Richtung der invariabelen Axe und die Lage der invariabelen Ebene wechseln übrigens von Reductionspunkt zu Reductionspunkt. Laplace glaubte sie benutzen zu können, zu finden, ob im Laufe der Zeit im Sonnensystem Stösse vorgekommen sind. Ist das der Fall, so muss ihre Lage sich geändert haben und umgekehrt haben Beobachtungen eine solche Lagenänderung festgestellt, so kann man auf Stösse schliessen. Diese Betrachtungen basiren auf der Voraussetzung, dass das resultirende Paar der auf das Sonnensystem wirkenden Kräfte nahezu Null ist, was für die innern Kräfte genau, für die äussern wegen der grossen Entfernungen sehr nahe zutrifft.

Zur näheren Erläuterung des Flächenprincips lassen wir einige leichte Anwendungen folgen, welche sich den Betrachtungen anschliessen, die wir zur Erläuterung des Princips der Bewegung des Massenmittelpunktes gegeben haben.

Ein lebendes Wesen befinde sich irgendwo isolirt im Raume, die Einwirkungen der äusseren Kräfte auf dasselbe seien Null und es sei anfangs ruhig. Dass es seinen Schwerpunkt nicht in Bewegung zu setzen vermag, sahen wir bereits früher; allein es kann sich auch nicht einmal um denselben drehen. Denn betrachten wir den Schwerpunkt desselben als Pol, ziehen von diesem nach allen Punkten seines Körpers Radienvectoren und projiciren das ganze System auf irgend eine Ebene, z. B. auf die durch den Schwerpunkt gehende Symmetrieebene. Da das System anfänglich in Ruhe ist, so ist zu Anfang die Summe der Sectoren Null; da das Spiel der Muskeln aber, wie es immer beschaffen sein möge, nur innere Kräfte, welche paarweise gleich und entgegengesetzt sind, zur Ursache haben kann, so muss die Summe der Momente der Momentankräfte constant bleiben und da anfangs alle Geschwindigkeiten Null sind, so ist die Sectorensumme anfangs Null und muss fortwährend Null bleiben. Wenn daher das Wesen einige Theile seines Körpers derart in Bewegung setzt, dass für sie die Sectorensumme beginnt positiv zu werden, so müssen gleichzeitig andere Körpertheile so in Bewegung gerathen, dass die ihnen entsprechende Sectorensumme einen negativen Werth annimmt und hierdurch die ganze Summe auf dem ursprünglichen Werthe Null erhalten wird. Wenn z. B. ein Mensch in solcher Lage den Kopf nach rechts dreht, so wird sich der übrige Körper nach links drehen; wenn er das eine Bein

vorsetzen will, wird er in Gefahr sein, mit dem anderen rückwärts auszugleiten. Man sieht hieraus, dass wir nur deswegen auf dem Boden vorwärts schreiten können, weil das eine Bein, welches nach rückwärts ausgleiten will, durch die durch den Druck auf den Boden erregte Reibung am Ausgleiten gehindert wird. Auf einem glatten Boden, z. B. einer Eisfläche, findet das Ausgleiten in Wirklichkeit sehr leicht statt.

Ein Tänzer, welcher sich auf der Fussspitze umdrehen will, gibt seinem Oberkörper eine Drehung in bestimmtem Sinne, gleichzeitig wird aber sein Unterkörper das Bestreben erlangen, sich im entgegengesetzten Sinne zu drehen; denn nur so kann die Sectorensumme, z. B. auf die Horizontalebene projicirt, Null bleiben. Der Unterkörper würde in Wirklichkeit jene Bewegung annehmen, wenn nicht die Reibung der Fussspitze am Boden als eine neue äussere Kraft hinzuträte und dies hinderte.

§. 5. Die 6 Combinationen der Differentialgleichungen der Bewegung eines beliebigen veränderlichen Systems, welche der Entwicklung der Principe der Bewegung des Massenmittelpunktes und der Flächen zu Grunde lagen, nämlich:

$$\Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \Sigma X_i + \Sigma S_x^{(i)},$$

$$\Sigma m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \Sigma Y_i + \Sigma S_y^{(i)},$$

$$\Sigma m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \Sigma Z_i + \Sigma S_z^{(i)},$$

$$\Sigma m_i \left(y_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}\right) = \Sigma (y_i Z_i - z_i Y_i) + \Sigma (y_i S_z^{(i)} - z_i S_y^{(i)}),$$

$$\Sigma m_i \left(z_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - x_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}\right) = \Sigma (z_i X_i - x_i Z_i) + \Sigma (z_i S_x^{(i)} - x_i S_z^{(i)}),$$

$$\Sigma m_i \left(x_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - y_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\right) = \Sigma (x_i Y_i - y_i X_i) + \Sigma (x_i S_y^{(i)} - y_i S_x^{(i)}),$$

sind dieselben, wie für das unveränderliche System. Für die Erforschung der Bewegung des letzten sind sie hinreichend, für das veränderliche aber bestehen ausser ihnen noch $3n - \varkappa - 6$ andere, wenn $\varkappa$ die Anzahl der Bedingungen ist, denen das System genügen muss. Wir schliessen hieraus, dass auch die aus ihnen abgeleiteten Sätze für alle Systeme gültig sind. In der That leiteten wir aus ihnen auch die beiden eben genannten Principe ab, welche für das unveränderliche System bereits früher erwiesen wurden und sie liefern für das veränderliche System Integrale der Bewegungsgleichungen, wie für das unveränderliche. Beim unveränderlichen System liessen sich nun Kräfte und Paare verlegen und zusammensetzen und war die Wirkung der zusammengesetzten Kraftgebilde dieselbe, wie die der ursprünglichen. Beim veränderlichen System hört diese Aequivalenz auf; indessen behält die Zusammensetzung von Kräften und Paaren, überhaupt die Reduction von Kräften auch hier nichts destoweniger eine Bedeutung. So z. B. die Unveränderlichkeit der Resultanten und des resultirenden Paares der Momentankräfte, wenn die entsprechenden Gebilde der continuirlichen Kräfte verschwinden.

§. 6. Combiniren wir die Differentialgleichungen

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + S_x^{(i)}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + S_y^{(i)}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + S_z^{(i)}$$

so, dass wir sie der Reihe nach mit den ersten Differentialquotienten der Coordinaten multiplicirt addiren und hierauf durch das ganze System summiren, so kommt

$$\Sigma m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\frac{d^2x_i}{dt^2} + \frac{dy_i}{dt}\frac{d^2y_i}{dt^2} + \frac{dz_i}{dt}\frac{d^2z_i}{dt^2}\right) = \Sigma\left(X_i \frac{dx_i}{dt} + Y_i \frac{dy_i}{dt} + Z_i \frac{dz_i}{dt}\right)$$
$$+ \Sigma\left(S_x^{(i)} \frac{dx_i}{dt} + S_y^{(i)} \frac{dy_i}{dt} + S_z^{(i)} \frac{dz_i}{dt}\right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist der Differentialquotient der halben lebendigen Kraft des Systems, nämlich

$$\frac{d}{dt} \cdot \tfrac{1}{2} \Sigma \left\{ m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right\} = \frac{d}{dt} \cdot \tfrac{1}{2} \Sigma m_i v_i^2,$$

die zweite Summe rechts (vgl. S. 499) hat die Bedeutung

$$\Sigma\left(S_x^{(i)} \frac{dx_i}{dt} + S_y^{(i)} \frac{dy_i}{dt} + S_z^{(i)} \frac{dz_i}{dt}\right) = \lambda \Sigma \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}\right)$$
$$+ \mu \Sigma \left(\frac{\partial M}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial M}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial M}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}\right) + \cdots$$

wenn $L = 0$, $M = 0$, ... die Bedingungsgleichungen des Systems sind. Sind nun diese Bedingungen nicht mit der Zeit veränderlich, so enthalten L, M, ... die Zeit nicht explicit, erhält man

$$\Sigma\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}\right) = 0, \quad \Sigma\left(\frac{\partial M}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial M}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial M}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}\right) = 0, \ldots$$

und verschwindet die zweite Summe rechter Hand. Dagegen hat man

$$\Sigma\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$
$$\Sigma\left(\frac{\partial M}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial M}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial M}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}\right) + \frac{\partial M}{\partial t} = 0, \ldots$$

wenn dies nicht der Fall ist und z. B. einzelne Punkte sich auf veränderlichen Flächen oder Curven bewegen; vielmehr wird dann die zweite Summe rechts

$$-\lambda \frac{\partial L}{\partial t} - \mu \frac{\partial M}{\partial t} - \cdots$$

Mit Ausschluss dieses letzteren Falles erhält man daher die Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \cdot \tfrac{1}{2} \Sigma m_i v_i^2 = \Sigma\left(X_i \frac{dx_i}{dt} + Y_i \frac{dy_i}{dt} + Z_i \frac{dz_i}{dt}\right)$$

oder

$$d \cdot \tfrac{1}{2} \Sigma m_i v_i^2 = \Sigma (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i).$$

Dieselbe sagt aus, dass die Elementaränderung der halben lebendigen Kraft des Systems und die Elementararbeitssumme aller Kräfte P_i längs der von ihren Angriffspunkten durchlaufenen Bogenelemente gleich sind. In dieser Gleichung erscheinen die Kräfte, welche die Bedingungen des Systems vertreten, nicht, da ihre Elementararbeit Null ist, indem sie senkrecht zu den Wegen ihrer Angriffspunkte wirken. Bezeichnet T die Summe der Arbeiten, welche von einer beliebigen Anfangslage des Systems an gerechnet bis zur Lage, wo die Geschwindigkeiten v_i sind, geleistet werden, so ist dT die Elementararbeit für den Uebergang in die nächste Lage und also $dT = \Sigma(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$. Daher wird

$$d \cdot \tfrac{1}{2} \Sigma m_i v_i^2 = dT$$

und wenn man integrirt von einer Lage, wo die Geschwindigkeiten $v_0^{(i)}$ sind, bis zur Lage, wo sie die Werthe v_i haben:

$$\tfrac{1}{2} \Sigma m_i v_i^2 - \tfrac{1}{2} \Sigma m_i v_0^{(i)2} = T - T_0,$$

d. h. die Aenderung der halben lebendigen Kraft des Systems beim Uebergang aus einer Lage in die andere ist gleich der Aenderung, welche die totale Arbeit der Kräfte während dieses Ueberganges erleidet. (Princip der Aequivalenz zwischen Arbeit und lebendiger Kraft.)

Existirt eine Kräftefunction U der Coordinaten, sodass $X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$, $Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}$, $Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}$, so wird

$$d \cdot \tfrac{1}{2} \Sigma m_i v_i^2 = dU, \quad \tfrac{1}{2} \Sigma m_i v_i^2 = U + h,$$

d. h. wenn eine Kräftefunction existirt und die Bedingungen des Systems von der Zeit unabhängig sind, so ist die halbe lebendige Kraft des Systems gleich der Kräftefunction, vermehrt um eine Constante. (Princip der lebendigen Kraft.)

Bezieht man die vorstehende Gleichung auf zwei Lagen des Systems, welchen die Werthe U_0, $v_0^{(i)}$; U, v_i entsprechen, so erhält man durch Elimination der Constanten h

$$\tfrac{1}{2} \Sigma m_i v_i^2 - \tfrac{1}{2} \Sigma m_i v_0^{(i)2} = U - U_0,$$

d. h. beim Uebergange des Systems aus einer ersten Lage in eine zweite ist die Aenderung der halben lebendigen Kraft gleich der Differenz der Werthe, welche die Kräftefunction für diese Lagen annimmt.

Da die Kräftefunction eine Function der Coordinaten ist, so nimmt sie denselben Werth an, so oft das System in dieselbe Lage zurückkehrt. Daher ist auch die lebendige Kraft des Systems dieselbe bei der Rückkehr

zu derselben Lage. Von der Art der Bewegung des Systems zwischen beiden Lagen und der Zeit, welche zum Uebergang aus der einen in die andere verwandt wird, ist das Princip der lebendigen Kraft unabhängig, wie von den Bedingungen des Systems.

Es ist $dT = dU$, $T = U + h$.

Man erhält das Princip der lebendigen Kraft auch aus der Gleichung

$$\Sigma \left\{ \left(m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - X_i \right) \delta x_i + \left(m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - Y_i \right) \delta y_i + \left(m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - Z_i \right) \delta z_i \right\}$$
$$= \Sigma (S_x^{(i)} \delta x_i + S_y^{(i)} \delta y_i + S_z^{(i)} \delta z_i),$$

indem man für die willkürlichen virtuellen Verschiebungen die durch die wirkliche Bewegung des Systems erfolgenden nimmt; d. h. $\delta x_i = dx_i$, $\delta y_i = dy_i$, $\delta z_i = dz_i$ setzt. Dies liefert

$$\Sigma m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} dx_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} dy_i + \frac{\delta^2 z_i}{dt^2} dz_i \right) = \Sigma (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i),$$

da die Summe rechter Hand verschwindet. Die linke Seite dieser Gleichung ist aber $d \cdot \Sigma m_i v_i^2$ u. s. w.

§. 7. Zwischen der lebendigen Kraft der absoluten Bewegung des Systems und seiner relativen Bewegung bezüglich des Massenmittelpunktes besteht eine sehr einfache Beziehung. Sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten dieses Punktes, ξ_i, η_i, ζ_i die relativen Coordinaten von m_i in Bezug auf ihn, sodass $x_i = x_1 + \xi_i$, $y_i = y_1 + \eta_i$, $z_i = z_1 + \zeta_i$, so wird

$$\Sigma m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2} \Sigma m_i \left\{ \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right\}$$
$$= \Sigma m_i \left\{ \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt} \right)^2 \right\}$$
$$+ \Sigma m_i \left\{ \left(\frac{d\xi_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta_i}{dt} \right)^2 \right\}$$
$$+ 2 \Sigma m_i \left\{ \frac{dx_1}{dt} \frac{d\xi_i}{dt} + \frac{dy_1}{dt} \frac{d\eta_i}{dt} + \frac{dz_1}{dt} \frac{d\zeta_i}{dt} \right\},$$

Die erste Summe zur Rechten ist, wenn v_1 die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes ist, $\frac{1}{2} M v_1^2$, d. h. die halbe lebendige Kraft, welche dieser Punkt besitzen würde, wenn in ihm die ganze Masse des Systems vereinigt wäre, die zweite Summe aber ist, wenn u_i die relative Geschwindigkeit des Systempunktes m_i ist, $\frac{1}{2} \Sigma m u_i^2$; die dritte Summe aber verschwindet, da $\Sigma m \xi_i = 0$ und mithin $\Sigma m_i \frac{dx_1}{dt} \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \Sigma m_i \frac{d\xi_i}{dt} = 0$ ist u. s. w. Daher bleibt

$$\Sigma m_i v_i^2 = M v_1^2 + \Sigma m_i u_i^2$$

d. h.

Die lebendige Kraft der absoluten Bewegung ist gleich der lebendigen Kraft der relativen Bewegung in Bezug auf den Massenmittelpunkt, zusammen mit der absoluten lebendigen Kraft, welche dieser Punkt besitzen würde, wenn in ihm die ganze Masse des Systems vereinigt wäre.

Man hann hiermit das Princip der lebendigen Kraft auf die relative Bewegung bezüglich des Massenmittelpunktes ausdehnen. Führt man nämlich die Substitution $x_i = x_1 + \xi_i$, $y_i = y_1 + \eta_i$, $z_i = z_1 + \zeta_i$ in die Gleichung des Princips ein, so kommt

$$d \cdot \tfrac{1}{2} \Sigma m_i v_i^2 = (dx_1 + \Sigma X_i + dy_1 \Sigma Y_i + dz_1 \Sigma Z_i) + \Sigma(X_i d\xi_i + Y_i d\eta_i + Z_i d\zeta_i).$$

Aus den Gleichungen

$$M \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \Sigma X_i + \Sigma S_x^{(i)}, \quad M \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \Sigma Y_i + \Sigma S_y^{(i)}, \quad M \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \Sigma Z_i + \Sigma S_z^{(i)}$$

folgt

$$d \cdot \tfrac{1}{2} M v_1^2 = dx_1 \Sigma X_i + dy_1 \Sigma Y_i + dz_1 \Sigma Z_i + dx_1 \Sigma S_x^{(i)} + dy_1 \Sigma S_y^{(i)} + dz_1 \Sigma S_z^{(i)}$$

und da in Folge der oben entwickelten Relation

$$d \cdot \tfrac{1}{2} \Sigma m_i v_i^2 = d \cdot \tfrac{1}{2} M v_1^2 + d \cdot \tfrac{1}{2} \Sigma m_i u_i^2$$

ist, so ergibt sich, wenn $dx_1 \Sigma S_x^{(i)} + dy_1 \Sigma S_y^{(i)} + dz_1 \Sigma S_z^{(i)} = 0$ ist,

$$d \cdot \tfrac{1}{2} \Sigma m_i u_i^2 = \Sigma (X_i d\xi_i + Y_i d\eta_i + Z_i d\zeta_i),$$

d. h. wenn die Reductionsresultante der Bedingungskräfte Null oder senkrecht zur Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes ist, so ist die Aenderung der halben relativen lebendigen Kraft bezüglich des Massenmittelpunktes gleich der relativen Elementararbeit der gegebenen Kräfte.

§. 8. Wenn für ein System von n Punkten die höchstmögliche Anzahl von Bedingungen, nämlich $3n - 1$ besteht, so genügt das Princip der lebendigen Kraft, um die Bewegung aller Systempunkte zu bestimmen. Denn dasselbe liefert ein Integral der Bewegungsgleichungen, welches in Verbindung mit den Bedingungen $3n$ Gleichungen liefert, durch welche die Coordinaten aller Punkte als Functionen der Zeit erhalten werden. Dies findet z. B. bei dem unveränderlichen System mit einer festen Axe statt. Die Unveränderlichkeit desselben erfordert $3n - 6$, die Festigkeit der Axe aber fünf Bedingungen. Da nämlich zwischen den zwei festen Punkten der Axe bereits constanter Abstand besteht, so werden ausser dieser, bereits in den $3n - 6$ Bedingungen mit inbegriffenen Bedingung zur Unveränderlichkeit der sechs Coordinaten dieser Punkt blos noch fünf Bedingungen erfordert. Zusammen hat man also $3n - 6 + 5 = 3n - 1$ Bedingungen, zu welchen das Integral, welches die lebendige Kraft liefert, die noch fehlende Gleichung hinzufügt. So z. B. beim zusammengesetzten Pendel, wo die letzte der Bewegungsgleichungen die Gleichung der lebendigen Kraft ist.

§. 9. Als Anwendung der Principe der Bewegung des Massenmittelpunktes und der lebendigen Kraft behandeln wir den geraden Stoss sphärischer Körper.

1. Es seien gegeben zwei homogene oder concentrisch geschichtete Kugeln in Translation begriffen und zwar so, dass ihre Schwerpunkte dieselbe Gerade in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne durchlaufen. Die beiden Körper mögen zusammentreffen; dabei geht eine Formveränderung derselben vor sich, welche als eine Folge der gegenseitigen Einwirkungen der Molecüle auf einander angesehen werden können. Obgleich die Bestimmung der Bewegung des einzelnen Molecüls sehr complicirt sein wird, lässt sich doch leicht die Bewegung der Massenmittelpunkte ermitteln. Dabei sind zwei Fälle zu sondern. 1. Die Körper sind absolut unelastisch; dann drücken sie sich zusammen, bis die Geschwindigkeiten sich ausgeglichen haben und gehen sie von diesem Momente an mit gemeinschaftlicher Geschwindigkeit weiter, indem sie sich berühren und die durch den Stoss veränderte Gestalt beibehalten. 2. Die Körper sind vollkommen elastisch. In diesem Falle nehmen sie von dem Momente, wo die Zusammendrückung aufhört und die Geschwindigkeiten gleich geworden sind, allmählich ihre alte Gestalt wieder an, indem sie in entgegengesetztem Sinne auf einander einwirken und in Folge dieser abstossenden Einwirkung sich trennen. Zwischen diesen beiden Grenzfällen der absolut unelastischen Beschaffenheit und der vollkommenen Elasticität liegen alle Fälle des grösseren oder geringeren Grades der Elasticität, in welchen die Körper nicht genau in die frühere Form zurückkehren. Während bei vollkommen elastischen Körpern die Periode von dem Moment des Maximums der Zusammendrückung bis zu dem Momente der Trennung der Periode vom Moment der Berührung bis zur grössten Zusammendrückung vollkommen gleich ist und in ihr alle Erscheinungen genau ebenso, wie in jener, nur in umgekehrter Ordnung eintreten, ist dies bei weniger elastischen Körpern nicht mehr der Fall und für unelastische Körper ist diese zweite Periode vollständig auf Null herabgesunken.

2. Betrachten wir nun die Körper zu irgend einer Zeit t im Laufe des Stosses; x, x' seien die Abscissen der Mittelpunkte C, C' derselben von irgend einem Punkte O (Fig. 142) der Centralen gemessen und m, m' ihre Massen. Die Kugel C ist ein System, auf welches die Molecüle der Kugel C' einwirken mit Kräften, welche vermöge der symmetrischen Beschaffenheit eine Resultante liefern, deren Richtung in die Centrale fällt; die Kugel C' ist ebenso ein System, auf welches C einwirkt und da die Einwirkungen je zweier Molecüle gegenseitig gleich sind, so ist die Resultante, welche an C' angreift, jener an C angreifenden entgegengesetzt gleich. Ist also R ihr gemeinsamer Werth, so erhalten wir für die Bewegung der Massenmittelpunkte beider Körper nach dem Princip von der Bewegung des Massenmittelpunktes die Gleichungen:

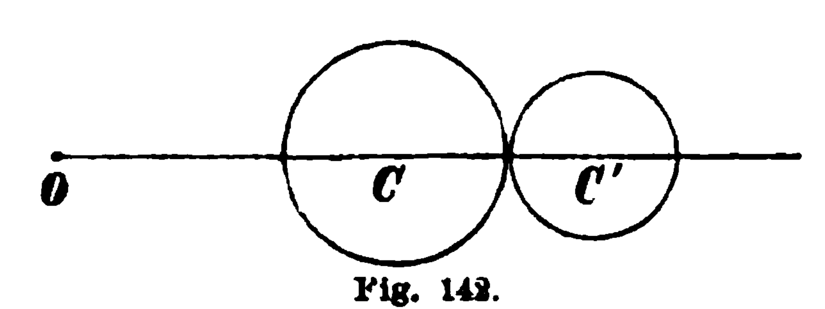


Fig. 142.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -R, \quad m'\frac{d^2x'}{dt^2} = R.$$

Aus ihnen folgt durch Addition und Integration:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m'\frac{d^2x'}{dt^2} = 0, \quad m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} = Const.$$

Es bleibt also die Summe der Momentankräfte fortwährend constant und besteht, wenn v, v' die Geschwindigkeiten zu Anfang des Stosses sind, während der ganzen Bewegung die Gleichung

$$m \frac{dx}{dt} + m' \frac{dx'}{dt} = mv + m'v'.$$

Sind nun 1. die Kugeln vollkommen unelastisch und ist u ihre gemeinsame Geschwindigkeit im Momente des Maximums der Zusammendrückung, so ist $(m + m')\,u$ die Summe der Momentankräfte für diesen Moment und erhält man aus der Gleichung $(m + m')\,u = mv + m'v'$ für die gemeinsame Geschwindigkeit, mit welcher beide Körper nach dem Stosse weitergehen:

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

Hierbei können v, v' gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben, auch kann die eine von diesen Grössen Null sein. Gehen die Körper mit entgegengesetzt gleichen Momentankräften gegen einander, so wird $u = 0$ und gelangen sie zur Ruhe.

3. Sind 2. die Kugeln vollkommen elastisch, so bedürfen wir zur Bestimmung der Geschwindigkeiten V, V', mit welchen sie sich trennen, neben dem vorigen Satze noch eines anderen. Zu dem Ende multipliciren wir die beiden Gleichungen für die Bewegung der Massenmittelpunkte mit $2\frac{dx}{dt}$, $2\frac{dx'}{dt}$ und addiren sie Dadurch kommt

$$\frac{d.\left[m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m'\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2\right]}{dt} = 2R\,\frac{d\,(x' - x)}{dt},$$

oder wenn wir die relative Entfernung $x' - x$ der Mittelpunkte mit r bezeichnen und vom Anfange des Stosses, wo dieselbe r_0 sei bis zu irgend einem Momente des Stosses, wo sie r beträgt, integriren, so folgt:

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m'\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 - [mv^2 + m'v'^2] = 2\int_{r_0}^{r} R\,dr.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die Aenderung der lebendigen Kraft vor Beginn des Stosses bis zu irgend einem Momente gleich der doppelten Arbeit ist, welche die Stosskräfte R während dieser Zeit geleistet haben. Beziehen wir nun diese Gleichung auf das Ende des Stosses, wo sich die Körper trennen, so wird für vollkommen elastische Körper das Integral rechter Hand Null. Denn während der ersten Periode des Stosses findet Zusammendrückung statt und ist dr, also auch Rdr und der Werth des Integrales, ausgedehnt über diese Periode, negativ; in der zweiten Periode ist dr positiv, hat Rdr die entgegengesetzt gleichen Werthe, wie vorher und ist das Integral ausgedehnt über diese Periode dem vorigen entgegengesetzt gleich. Daher ist das Integral ausgedehnt über die ganze Stosszeit Null und erhalten wir die Gleichung:

$$mV^2 + m'V'^2 = mv^2 + m'v'^2,$$

d. h. bei vollkommen elastischen Körpern ist die lebendige Kraft nach wie vor dem Stosse dieselbe. Bei unelastischen oder nicht vollkommen elastischen Körpern ist das Integral über die Stosszeit ausgedehnt negativ und findet folglich ein Verlust an lebendiger Kraft statt gleich der doppelten Arbeit der molecularen Kräfte.

Die folgenden beiden Gleichungen, von denen die erste die auf das Ende des Stosses angewandte obige Gleichung der Momentankräfte ist, nämlich

$$mV + m'V' = mv + m'v',$$
$$mV^2 + m'V'^2 = mv^2 + m'v'^2$$

dienen zur Bestimmung der Geschwindigkeiten V, V', mit welchen sich zwei vollkommen elastische Kugeln nach dem Stosse trennen. Indem man sie so schreibt:

$$m(V^2 - v^2) = m'(v'^2 - V'^2),$$
$$m(V - v) = m'(v' - V')$$

und in einander dividirt, sieht man, dass sie äquivalent sind mit

$$mV + m'V' = mv + m'v',$$
$$V - V' = -v + v',$$

und aus ihnen erhält man

$$(m + m')V = (m - m')v + 2m'v',$$
$$(m' + m)V' = (m' - m)v' + 2mv,$$

von welchen Gleichungen die eine aus der anderen durch Vertauschung von m, v, V und m', v', V' hervorgeht. Addirt und subtrahirt man rechts mv, resp. $m'v'$ und berücksichtigt $mv + m'v' = (m + m')u$, so erhält man weiter:

$$V = 2u - v, \quad V' = 2u - v'; \quad u = \tfrac{1}{2}(V + v) = \tfrac{1}{2}(V' + v');$$

es ist mithin die Geschwindigkeit im Momente des Maximums der Compression das arithmetische Mittel aus den Geschwindigkeiten eines jeden der Körper zu Anfang und Ende des Stosses.

4. Als specielle Fälle heben wir folgende hervor. 1. Es sei C' in Ruhe, also $v' = 0$; sind die Körper unelastisch, so ist die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nech dem Stosse $u = \frac{mv}{m + m'}$; u wird Null, wenn $m' = \infty$ wird, d. h. die ruhende Masse ein unendlich grosser eben begrenzter Körper ist (näherungsweise für das Auffallen eines Körpers auf den Erdboden giltig). Sind die Körper vollkommen elastisch, so wird $V = \frac{m - m'}{m + m'}v$, $V' = \frac{2m}{m + m'}v$; für $m' = \infty$ wird $V = -v$, $V' = 0$, der Körper C prallt von C' mit derselben Geschwindigkeit zurück. (Auffallen einer elastischen Kugel auf eine feste elastische Ebene.) — 2. Die Massen der beiden Kugeln seien gleich. Für unelastische Körper ist dann $u = \frac{1}{2}(v + v')$; für elastische wird $V = v'$, $V' = v$, d. h. die Körper gehen mit verwechselten Geschwindigkeiten nach dem Stosse weiter; ist also der eine in Ruhe, so geht er nach dem Stosse mit der Geschwindigkeit des anderen weiter, während dieser zur Ruhe gelangt. (Anwendung hiervon auf die geradlinige Reihe elastischer Kugeln gleicher Masse.)

5. Es seien gegeben zwei vollkommen elastische Kugeln von den Massen m, m' (Fig. 143), man sucht die Masse μ einer dritten gleichfalls vollkommen elastischen Kugel von der Eigenschaft, dass, wenn die Mittelpunkte der drei Kugeln in gerader Linie liegen, sodass μ zwischen m, m' sich befindet, die Kugel m mit der Geschwindigkeit V auf die ruhende Kugel μ treffend, dieser eine solche Geschwindigkeit ertheilt, dass sie beim Stosse auf die gleichfalls ruhende Kugel m' letztere mit der grösstmöglichen Geschwindigkeit forttreibt.

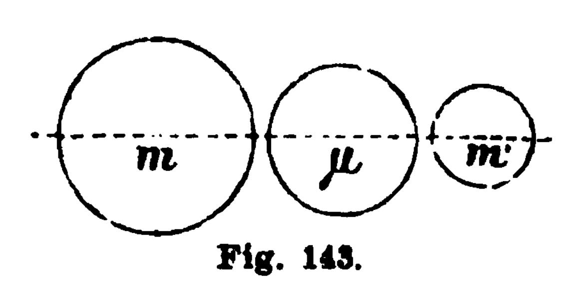


Fig. 143.

Die Geschwindigkeit ω, welche μ durch m erlangt, ist $\omega = \frac{2mV}{m + \mu}$, die

Geschwindigkeit, welche hierauf m' von μ erhält, $V' = \frac{2m\omega}{\mu + m'}$, folglich nach Elimination von ω:

$$V' = 4mV \cdot \frac{\mu}{(m+\mu)(\mu+m')} = 4mV \cdot \frac{1}{\mu\left(1+\frac{m}{\mu}\right)\left(1+\frac{m'}{\mu}\right)};$$

daher muss die Function $\mu\left(1+\frac{m}{\mu}\right)\left(1+\frac{m'}{\mu}\right)$ ein Minimum werden. Dies führt zu der Bedingung $1 - \frac{mm'}{\mu^2} = 0$, d. h. $\mu = \sqrt{mm'}$. Es muss demnach die Masse der eingeschalteten Kugel das geometrische Mittel zwischen den Massen der gegebenen Kugeln sein.

Soll zwischen m und m' eine ganze Reihe von Kugeln $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ eingeschalten werden, sodass jede folgende, also auch die letzte, mit dem Maximum der Geschwindigkeit fortgetrieben wird, so wird

$$\mu_1^2 = m\mu_2, \quad \mu_2^2 = \mu_1\mu_3, \quad \mu_3^2 = \mu_2\mu_4, \ldots \quad \mu_i^2 = \mu_{i-1}\mu_{i+1}, \ldots \quad \mu_n^2 = \mu_{n-1}m'$$

und hieraus folgt $\frac{\mu_1}{m} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\mu_3}{\mu_2} = \ldots = \frac{\mu_n}{\mu_{n-1}} = \frac{m'}{\mu_n} = \varepsilon$, wenn ε der gemeinschaftliche Werth des Verhältnisses zweier aufeinanderfolgender Kugeln ist. Multiplicirt man diese $n+1$ Gleichungen von der Form $\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}} = \varepsilon$ mit einander, so hat man $\varepsilon^{n+1} = \frac{m'}{m}$, also die geometrische Progression $\mu_1 = \varepsilon m$, $\mu_2 = \varepsilon^2 m$, $\mu_3 = \varepsilon^3\mu, \ldots \; m_n = \varepsilon^n m$, wo $\varepsilon = \left(\frac{m'}{m}\right)^{\frac{1}{n+1}}$.

6. Bei vollkommen elastischen Körpern findet kein Verlust an lebendiger Kraft statt, wohl aber bei unelastischen. Um diesen Verlust δ zu bestimmen, hat man

$$\delta = mv^2 + m'v'^2 - (m+m')\,u^2.$$

Addirt und subtrahirt man $2(m+m')\,u^2$, so wird

$$\begin{aligned}\delta &= mv^2 + m'v'^2 + (m+m')\,u^2 - 2(m+m')\,u \cdot u \\ &= mv^2 + m'v'^2 + (m+m')\,u^2 - 2(mv+m'v')\,u,\end{aligned}$$

da

$$(m+m')\,u = mv + mv'.$$

Indem man zusammenzieht, nimmt δ die Form an:

$$\delta = m(v-u)^2 + m'(u-v')^2.$$

$v-u$ und $u-v'$ sind Gewinn oder Verlust an Geschwindigkeit der Körper; demnach ist der Verlust an lebendiger Kraft gleich der Summe der lebendigen Kräfte, welche man mit den gewonnenen und verlorenen Geschwindigkeiten der Körper bilden kann. Setzt man in die Formel für δ den Werth von u, nämlich $u = \frac{mv + m'v'}{m+m'}$ ein, so kann man δ unter der Form

$$\delta = \frac{mm'}{m+m'}(v-v')^2$$

darstellen. Der vorliegende Satz ist ein specieller Fall eines allgemeineren Satzes

über den Verlust an lebendiger Kraft eines Systems durch Stösse, welchen Carnot zuerst aufgestellt hat.

7. Es sei X die Abscisse des Massenmittelpunktes der beiden Kugeln zusammen als ein System betrachtet; für ihn besteht die Gleichung:

$$(m + m')\, X = mx + mx'.$$

X ist eine Function der Zeit, wie x, x' und erhält man die Geschwindigkeit $\frac{dX}{dt}$ des Massenmittelpunktes aus der Gleichung $(m + m')\frac{dX}{dt} = m\frac{dx}{dt} + m\frac{dx'}{dt}$. Die rechte Seite ist die Summe der Momentankräfte und da diese durch den Stoss nicht geändert wird, so folgt, dass der Stoss auf die Geschwindigkeit des gemeinsamen Schwerpunktes beider Kugeln keinen Einfluss hat.

§. 10. Der schiefe Stoss sphärischer Körper. Die beiden Kugeln C, C' mögen zwei geradlinige Translationsbewegungen besitzen, aber so, dass die Schwerpunkte verschiedene gerade Linien beschreiben; ihre Geschwindigkeiten seien constant. Die Kugeln sollen im Laufe ihrer Bewegung zusammentreffen, es fragt sich, wie wird ihre Bewegung durch den Stoss geändert? In dem Moment des Zusammentreffens zerlegen wir ihre Geschwindigkeiten jede in zwei Componenten, von denen die eine in die Richtung der gemeinschaftlichen Normalen CC' der Berührungsstelle fällt und resp. ν, ν' heissen soll und eine andere parallel der Berührungsebene τ, τ'. Blos die ersteren Componenten werden durch den Stoss geändert, die geänderten setzen sich hierauf wieder mit τ, τ' zusammen und liefern die Geschwindigkeiten V, V', mit welchen die Körper nach dem Stosse weiter gehen. Bei unelastischen Körpern ist daher die gemeinsame Normalgeschwindigkeit

$$u = \frac{m\nu + m\nu'}{m + m'}$$

und diese ist mit τ, resp. τ' zu combiniren, um V, V' zu finden. Bei vollkommen elastischen Körpern dagegen sind die Normalcomponenten N, N' nach dem Stosse:

$$N = \frac{(m - m')\,\nu + 2m'\nu'}{m + m'}, \quad N' = \frac{(m' - m)\,\nu' + 2m\nu}{m' + m},$$

welche resp. mit τ, τ' zusammentreten.

Ist m' ursprünglich in Ruhe, also $\nu' = 0$, $\tau' = 0$, so wird

$$N = \frac{m - m'}{m + m'} \cdot \nu, \quad N' = \frac{2m}{m + m'} \cdot \nu$$

und für $m' = \infty$ wird $N = -\nu$, $N' = 0$. Combinirt man in diesem letzteren Falle $N = -\nu$ mit τ, so folgt das Reflexionsgesetz, nämlich: Wenn eine vollkommen elastische Kugel auf eine feste vollkommen elastische Platte trifft, so bleibt die Geschwindigkeit ihres Schwerpunktes constant; ihre Richtung bildet vor und nach dem Ausfallen gleiche Winkel mit der Platte.

Sind die Massen gleich, so ergibt sich $N = \nu'$, $N' = \nu$; die Kugeln gehen mit vertauschten Normalcomponenten der Geschwindigkeiten weiter.

§. 11. Wir wollen als weitere Anwendung des Princips der lebendigen Kraft mit dessen Hülfe die Wirkungsweise der Kräfte an einer Maschine und deren Gang untersuchen. Eine Maschine ist ein System, an welchem Kräfte wirken mit Bedingungen, welche als von der Zeit unabhängig angesehen werden. Daher gilt für sie die Gleichung $\frac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\Sigma m_i v_0^{(i)2} = T - T_0$, wenn auch

wegen Reibungen u. s. w. eine Kräftefunction nicht existirt. Die Maschinen gestatten aber nicht beliebige virtuelle Verschiebungen, sondern in der Regel nur eine, aber meistens in doppeltem Sinne (vorwärts und rückwärts); es ist daher die Bewegung aller Systempunkte bestimmt, sobald die eines derselben bekannt ist, daher wird auch nur eine einzige Gleichung zur Bestimmung der Bewegung der Maschine erfordert und hierzu kann die Gleichung der lebendigen Kraft benutzt werden.

Die Kräfte, welche an einer Maschine wirken, sind doppelter Art, 1. solche, welche eine positive Elementararbeit leisten, indem sie die Punkte, an welchen sie angreifen, beschleunigen und mit der Richtung der Wegelemente derselben spitze Winkel bilden; sie heissen Motoren und sind z. B. die Dampfkraft, Wasserdruck, Wärme, Elektricität, der Wind, die Schwere, die Elasticität, die Muskelkraft der Menschen und Thiere u. s. w. Die Motoren wirken auf einen besonderen Maschinenbestandtheil, welcher der Receptor genannt wird (bei einer Wassermühle sind es die Schaufeln, bei der Dampfmaschine die Kolben, bei vielen einfacheren ist es ein Handgriff oder ein Fusstritt u. s. w.). Die 2. Art der Kräfte sind solche, deren Arbeit negativ ist, indem ihre Angriffspunkte zurckweichen und sie mit den Wegelementen derselben stumpfe Winkel bilden. Diese Kräfte heissen Widerstände; sie werden geleistet von den Körpern, welche mit Hülfe der Wirkung der Motoren durch die Maschinen umgeformt werden sollen oder werden zum Theil durch die Berührung der Maschinentheile unter einander oder mit der umgehenden Luft u. s. w. erregt. Der Maschinentheil, welcher mit den zu deformirenden Körpern in Berührung kommt, an welchem also die erstgenannten Widerstände angreifen, heisst das Werkzeug oder bei grösserem Umfange der Maschine die Arbeitsmaschine, besteht oft selbst in einem ganzen System von Arbeitsmaschinen.

Die Arbeit der Motoren heisst die bewegende Arbeit, die Arbeit der Widerstände die widerstehende Arbeit. Die Bestimmung der Maschine selbst ist die, die Motoren und Widerstände überhaupt in Verbindung zu setzen oder wie man sich ausdrückt, die Arbeit der Motoren zu übertragen. Der Maschinentheil, welcher zu diesem Ende den Receptor mit der Arbeitsmaschine verbindet, heisst die Transmission der Maschine. Bezeichnen wir die bewegende Arbeit, die während des Laufes der Maschine geleistet wird, indem die Geschwindigkeiten $v_0^{(i)}$ in v_i übergehen, mit T_m und die gleichzeitig geleistete Arbeit der Widerstände mit $-T_r$, so ist $T - T_0 = T_m - T_r$ und kann die Gleichung der lebendigen Kraft geschrieben werden:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_0^{(i)2} = T_m - T_r.$$

Wir wollen jetzt verschiedene Annahmen über den Gang der Maschine machen und zusehen, wie sich hierbei die Arbeiten der Motoren und Widerstände verhalten. Es sei von einem gewissen Zeitpunkte an die Bewegung der Maschine gleichförmig und die Geschwindigkeiten v_i also constant gleich $v_0^{(i)}$; dann ist die linke Seite der Gleichung Null und folglich $T_m = T_r$, es nimmt also während dieses Intervalls die Arbeit der Motoren und Widerstände um dieselbe Grösse zu oder es wird die Arbeit der Motoren vollständig aufgebraucht, um eine gleichgrosse Arbeit der Widerstände zu tilgen. Umgekehrt ergibt sich, dass, so lange $T_m = T_r$ bleibt, die Bewegung der Maschine gleichförmig bleibt, weder beschleunigt, noch verzögert wird. Denn man kann vermöge des bekannten Zusammenhanges der Systempunkte alle Geschwindigkeiten auf der linken Seite der Glei-

chung durch eine von ihnen ausdrücken und diese muss folglich constant bleiben, wenn die linke Seite der Gleichung auf dem Werthe Null erhalten werden soll; was aber von ihr gilt, gilt von jeder, folglich u. s. w. Wird der Gang der Maschine innerhalb eines Zeitintervalles beschleunigt, so wächst die linke Seite der Gleichung, also muss während desselben $T_m > T_r$ sein und umgekehrt; einem Ueberschuss der Arbeit der Motoren über die der Widerstände entspricht nothwendig eine Zunahme der Geschwindigkeit. Ebenso entspricht einer Verlangsamung der Bewegung ein Ueberschuss von T_r über T_m und umgekehrt. Aus dieser Wechselbeziehung zwischen dem Gange der Maschine und der Arbeit der Motoren und Widerstände ergibt sich, dass wenn die Arbeit der Motoren sämmtlich auf die Tilgung der Arbeit der Widerstände verwandt werden soll, man die Maschine in gleichförmiger Bewegung erhalten muss, dass jeder Ueberschuss von Arbeit der Motoren, der nicht auf die Tilgung eines entsprechenden Aequivalentes von Arbeit der Widerstände verwandt wird, eine Beschleunigung der Bewegung der Maschine (Vermehrung der lebendigen Kraft) und jeder Defect von Arbeit der Motoren eine Verlangsamung (Abnahme der lebendigen Kraft) zur nothwendigen Folge hat. Man sieht hieraus, in welchem Sinne die Redensart gemeint ist, wenn man sagt, die Maschine verhalte sich wie ein Reservoir, in welches Arbeit der Motoren eintritt und unter der Form von lebendiger Kraft wieder ausgegeben wird.

Nicht immer aber ist es möglich, den Gang der Maschine so gleichförmig zu erhalten, dass in jedem Zeitelemente die Arbeit der Motoren die Arbeit der Widerstände tilgt; ist dieser ideale Zustand nicht herbeizuführen, so sucht man eine periodische Bewegung der Maschine zu erreichen. Es tilgen sich dann wenigstens in jeder Periode für sich die beiderlei Arbeiten; denn zu Anfang und zu Ende der Periode haben die Geschwindigkeiten dieselben Werthe, also ist die linke Seite der Gleichung, wenn man sie auf die ganze Periode bezieht, Null und folglich während derselben im Ganzen $T_m = T_r$. Dass ein gleichförmiger oder ein periodischer Gang der Maschine mit möglichst kurzer Periode wünschenswerth ist, liegt am Tage. Denn durch die Tilgung der Arbeit der Widerstände wird ein Fabrikat geliefert, dessen Erzeugung der Zweck der Anwendung der Maschine ist; die Beschleunigung der Bewegung hat daher keinen Nutzen, vielmehr muss die Arbeit der Motoren vollständig dem Zwecke entsprechend ausgebeutet werden. Andererseits hat der gleichförmige Gang der Maschine auf die egale Beschaffenheit und damit auf den Werth des Fabrikates Einfluss.

Beziehen wir jetzt die Gleichung der lebendigen Kraft auf den ganzen Zeitraum vom Anfang der Bewegung der Maschine bis zum Stillstand derselben. Anfangs sind alle Geschwindigkeiten Null, am Ende auch, mithin ist die linke Seite der Gleichung Null und daher $T_m = T_r$, d. h. während des ganzen Laufes der Maschine tilgen sich die Arbeiten beiderlei Kräfte vollständig; es wird nichts an Arbeit gewonnen, nichts verloren. Man kann den ganzen Lauf der Maschine in drei Epochen zerlegen: 1. den Anlauf, vom Beginn der Bewegung bis zu dem Momente, mit welchem eine gleichförmige oder eine periodische Bewegung eintritt, 2. den Mittellauf, die Zeit der gleichförmigen oder periodischen Bewegung und 3. den Endlauf, die Zeit vom Schluss der letzten Periode bis zum Stillstande. Während des Anlaufes wächst die lebendige Kraft von Null an und daher ist während dieses Zeitraumes in jedem Moment und im Ganzen die Arbeit der Motoren grösser als die der Widerstände, der Ueberschuss bringt die Maschine „in den Gang". Während des Mittellaufs ist in jedem Momente oder wenigstens für

jede Periode die Arbeit der Motoren gleich der Arbeit der Widerstände; während des Endlaufes ist die linke Seite der Gleichung negativ, die lebendige Kraft nimmt bis zu Null ab und es geschieht dies in Folge des Nachlassens oder Aufhörens der Wirkung der Motoren.

Die Widerstände zerfallen in zwei Klassen: 1. solche, welche durch die Bestimmung der Maschine gegeben sind und herrühren von den umzuformenden Körpern, durch Tilgung von deren Arbeit das Fabrikat erzeugt wird; sie heissen nützliche Widerstände; ihre Arbeit sei T_u; 2. solche, welche in Folge der Bewegung der Maschine rege werden, wie die Reibung, Luftwiderstand u. s. w. und welche nichts gemein haben mit dem Fabrikate: sie heissen passive (schädliche) Widerstände; ihre Arbeit sei T_s. Die Gesammtarbeit T_r aller Widerstände zerfällt daher in zwei Theile und hat man $T_r = T_u + T_s$. Da nun die Arbeit der Motoren T_m gleich T_r sein soll, so folgt, dass ein Theil der Arbeit der Motoren auf die Tilgung der Arbeit der passiven Widerstände verwandt werden muss und also für die Bestimmung der Maschine verloren geht. Daher muss man die passiven Widerstände soviel als möglich zu verkleinern suchen. Eine Maschine ist um so besser, je kleiner das Verhältniss $\frac{T_s}{T_m}$ und je grösser $\frac{T_u}{T_m}$ ist.

Jeder Verlust an lebendiger Kraft muss vermieden werden. Nun besteht die lebendige Kraft auch aus zwei Theilen: 1. der lebendigen Kraft, welche durch die Geschwindigkeiten der äusserlich sichtbaren Bewegung gebildet wird und welche also den Gang der Maschine bestimmt; 2. der lebendigen Kraft, welche die innere Bewegung der Maschinentheile, die kleinen Erschütterungen, die Schwingungen der elastischen Bänder, die molecularen Bewegungen u. s. w. darstellt und nichts mit dem Gange der Maschine im Ganzen gemein hat. Dieser zweite Bestandtheil darf womöglich gar nicht zu Stande kommen oder muss durch Einführnng grosser Massen, Polster u. s. w. herabgedrückt werden; denn die Arbeit des Motors, welche ihn veranlasst, ist verloren. Eine schlotterige Mühle ist ein Beispiel für diesen Nachtheil.

Die Gleichung der lebendigen Kraft zeigt deutlich die Unmöglichkeit eines Perpetuum Mobile; ein solches wäre nämlich eine Maschine, durch welche ohne continuirliche Wirkung eines Motors fortwährend die Arbeit eines Widerstandes getilgt wird; auch wenn der Widerstand noch so gering ist, so kann seine Arbeit nur durch eine äquivalente Arbeit entgegengesetzter Art getilgt werden; geschieht dies nicht, sondern wirkt ein Motor nur eine kurze Zeit, nach welcher die Maschine sich selbst überlassen bleibt, so nimmt die lebendige Kraft ab und sowie sie Null ist, steht die Maschine still. Will man aber eine Maschine ein Perpetuum Mobile nennen, an welcher überhaupt keine Arbeit geleistet wird, weder von einem Motor, noch von einem Widerstande, sondern die einmal durch Momentankräfte in Bewegung gesetzt, fortwährend in Bewegung bleibt, so ist dieselbe zwar denkbar, aber nicht realisirbar, da wir die materiellen Elemente einer Maschine nicht der Wirkung der Naturkräfte entziehen können.

§. 12. Von der Gleichung der lebendigen Kraft kann man ein Criterium für die Stabilität des Gleichgewichtes entlehnen. Besteht nämlich für das System eine Kräftefunction, sodass

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_0^{(i)2} = U - U_0$$

und

$$dU = \Sigma (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$$

ist, so fällt die Bedingung, dass für bestimmte Werthe von x_i, y_i, z_i, ..., d. h. für eine bestimmte Lage des Systems Gleichgewicht bestehe, mit der Bedingung zusammen, dass für diese Werthe das vollständige Differential dU verschwinde, sodass im Allgemeinen für jede Gleichgewichtslage die Kräftefunction ein Maximum oder ein Minimum sein wird. Wir setzen hierbei voraus, dass aus U bereits mit Hülfe der Bedingungen des Problems ebenso viel Variabeln eliminirt sind, als die Zahl der Bedingungen beträgt und demnach U als eine Function vollständig unabhängiger Variabeln, die wir λ, μ, ν, ... nennen wollen, dargestellt sei. Findet ein Maximum von U wirklich statt, so besitzt das Gleichgewicht den Charakter der Stabilität, d. h. das System wird sich, wenn die Punkte desselben aus der dem Maximum entsprechenden Lage nur wenig verrückt werden und kleine Anfangsgeschwindigkeiten erhalten, im Laufe der Zeit nie über gewisse enge Grenzen hinaus von derselben entfernen.

Um diesen Satz zu beweisen, können wir unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass das Maximum von U für die Werthe $\lambda = \mu = \nu = \cdots = 0$ eintrete und da ferner die Function U in der obigen Gleichung blos in der Verbindung $U - U_0$ vorkommt, so kann ihr auch eine beliebige Constante zugefügt werden. Durch eine zweckmässige Wahl dieser Constanten kann man aber immer erreichen, dass der Maximalwerth von U selbst die Null ist. Unter diesen Voraussetzungen schreiben wir nun die Gleichung so:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 = U(\lambda, \mu, \nu, \ldots) - U(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots) + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_0^{(i)2},$$

sodass also $U(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ für $\lambda = \mu = \nu = \cdots = 0$ ein Maximum wird, dessen Werth Null ist und $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots v_0^{(i)}$ zusammengehörige Werthe von $\lambda, \mu, \nu, \ldots v_i$ sind. Da jeder Nachbarwerth des Maximums negativ ist, so lassen sich immer so kleine positive Grössen l, m, n, ... angeben, dass für jedes System von Werthen λ, μ, ν, ..., dessen Zahlenwerthe resp. nicht grösser, als l, m, n, ... sind, $U(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ stets negativ ist, ausgenommen für das Werthsystem $\lambda = \mu = \nu = \cdots = 0$. Nehmen wir nur solche Werthsysteme an, bei welchen wenigstens eine der Grössen λ, μ, ν, ... dem Absolutwerthe ihrer Grenze l, m, n, ... gleich ist, so fällt dieser Ausnahmsfall weg. Ist nun $-p$ von allen diesen negativen Werthen der Function, absolut genommen der kleinste, so kann gezeigt werden, dass wenn λ_0, μ_0, ν_0, ... numerisch nicht grösser als l, m, n, ... und zugleich so angenommen werden, dass

$$-U(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots) + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_0^{(i)2} < p$$

ist, jede der Variabelen λ, μ, ν, ... im Laufe der Bewegung unter ihrer Grenze l, m, n, ... bleiben wird. Fände nämlich ein Ueberschreiten dieser Grenze statt, so müsste wegen der Stetigkeit der Grössen λ, μ, ν, ... zu einer gewissen Zeit zuerst Gleichheit zwischen einer oder mehreren dieser Grössen und ihrer Grenzen l, m, n, ... eintreten, ohne dass eine der übrigen die Grenze überschritten hätte. Für diesen Zeitpunkt wäre der negative Werth von $U(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ numerisch nicht kleiner als p, mithin die rechte Seite unserer Gleichung negativ, was mit der Natur der positiven linken Seite im Widerspruch steht; folglich überschreiten λ, μ, ν, ... nicht ihre Grenzen und das Gleichgewicht ist stabil. Man sieht zugleich auch, dass die Geschwindigkeiten v_i gewisse Grenzen nicht überschreiten, denn da das Maximum von U Null ist, so ist

$$\Sigma m v_i^2 \leqq -U(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots) + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_0^{(i)2}.$$

Endlich, da l, m, n, ... beliebig klein angenommen werden können, so können

die Grenzen für die, die Lage des Systems bestimmenden Grössen $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ und die Geschwindigkeiten v beliebig eng gezogen werden.

Der vorstehende Beweis ist von Dirichlet; vgl. Crelle's Journ. B. XXXII, S. 85—88, woselbst auch eine Kritik der ungenügenden früheren Beweise gegeben ist.

§. 13. Wir wollen jetzt ein System betrachten, auf welches nur innere Kräfte P wirken, welche blos Functionen der Entfernungen sind. Für seine Bewegung existirt eine Kräftefunction U und gilt die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m v_0^2 = U - U_0,$$

die wir aber so schreiben wollen

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 - U = \tfrac{1}{2}\Sigma m v_0^2 - U_0.$$

Die Function U ist nach S. 495 $U = \Sigma R_{i\varkappa}$ wo $R_{i\varkappa} = \int - m_i m_\varkappa F(r_{i\varkappa})\, dr_{i\varkappa}$, wenn $F(r)$ das Gesetz darstellt, nach welchem zwei Masseneinheiten auf einander einwirken und wenn U ein Maximum wird, so findet stabiles Gleichgewicht der Kräfte statt. Da U eine willkürliche Constante enthält, so können wir diese so bestimmen, dass der Werth des Maximums gleich Null wird und für den Fall, dass U mehrere Maxima besitzt, soll dies für das grösste von ihnen gelten. Dann sind also alle andern Werthe von U negativ. Lässt man nun das System aus der stabilen Gleichgewichtslage in eine andere übergehen und bezieht die Gleichung der lebendigen Kraft auf beide, so stellt die negative Grösse $U - 0$ die Arbeit der inneren Kräfte dar, welche dazu nöthig ist. Ebenso wenn das System aus einer beliebigen Lage, welcher der Werth U entspricht, zur stabilen Gleichgewichtslage gelangen soll, so ist die positive Arbeit $0 - U$ erforderlich. Es bedeutet demnach $-U = W$ die positive Arbeit, welche die Kräfte leisten müssen, um das System aus der Lage, welcher U entspricht, in die Lage des stabilen Gleichgewichts überzuführen. Hiemit kann die obige Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 + W = \tfrac{1}{2}\Sigma m v_0^2$$

auch so ausgesprochen werden:

Für ein freies System, welches blos inneren von den Entfernungen abhängigen Kräften unterworfen ist, bleibt während der Bewegung für jede Lage derselben die Summe der halben lebendigen Kraft und der Arbeit, welche die inneren Kräfte zu leisten haben würden, um das System aus dieser Lage in die Lage des stabilen Gleichgewichtes zu bringen, eine constante Grösse. Der Werth der Kräftefunction für die fragliche Lage gibt jene zu leistende Arbeit an.

Die halbe lebendige Kraft $\tfrac{1}{2}\Sigma m v^2$ heisst die kinetische Energie, die Arbeit W, welche erfordert wird, um das System in die stabile Gleichgewichtslage überzuführen, die potentielle Energie, die Constante

$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 + W$ aber die totale Energie des Systems. Den eben ausgesprochenen Satz nennt man den Satz von der Erhaltung der Energie. Nimmt die kinetische Energie zu, so nimmt die potentielle Energie ab und umgekehrt.

Als Beispiel wollen wir das System zweier Massenpunkte m, m' behandeln, welche sich mit der Kraft

$$\frac{mm'a}{r^n}\left\{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^p\right\}$$

anziehen. In der Entfernung $r = r_0$ befinden sich dieselben im stabilen Gleichgewicht; für $r > r_0$ findet Attraction, für $r < r_0$ Repulsion statt. Bringt man sie auf ihrer Verbindungslinie aus der Gleichgewichtslage in eine Entfernung $> r_0$, so ist eine positive Arbeit nöthig, um sie in diese Lage zurückzubringen; nähert man dieselben einander auf eine Entfernung $< r_0$, so ist gleichfalls eine positive Arbeit nöthig, um sie zurückzuführen. Die Arbeit ist im ersten Falle positiv, weil Anziehung stattfindet und dr negativ ist, im anderen Falle, weil Abstossung stattfindet und dr positiv ist. Die Kräftefunction ist

$$U = -mm'a\int\left\{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^p\right\}\frac{dr}{r^n} = \frac{mm'a}{r^{n-1}}\left\{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+p-1}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^p\right\} + Const.$$

und erreicht für $r = r_0$ ihr Maximum. Um dasselbe auf Null zu bringen, hat man $Const. = -\frac{mm'a}{r_0^{n-1}}$ zu setzen.

Die Gleichung $\frac{1}{2}\Sigma mv^2 + W = Const.$ zeigt auch einen gewissen Uebergang von Arbeit und lebendiger Kraft von einem Systemtheil auf den anderen. Das System bestehe aus zwei Partialsystemen A und B, welche durch einen nicht dehnbaren Faden ohne Masse mit einander verbunden sein mögen. Da der Faden keine Masse hat, so ist seine lebendige Kraft Null und wenn er gespannt ist, so ist die Arbeit der beiden ihn spannenden gleichen Kräfte Null. Es besteht daher die Summe $\frac{1}{2}\Sigma mv^2 + W$ aus einem von A und einem von B herrührenden Theile. Da beide zusammen constant bleiben, so muss der erstere wachsen, wenn der zweite abnimmt und ist letzterer Null geworden, so kommt die ganze Summe dem Theile A zu, wenn in demselben Momente der Faden durchschnitten wird. B gelangt in den Zustand des stabilen Gleichgewichtes.

§. 14. Wir fanden früher die Gleichung $\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}\Sigma mu^2$. Da keine äusseren Kräfte auf das System wirken, so ist Mv_1^2 constant. Substituiren wir also den Ausdruck rechts in die Gleichung $\frac{1}{2}\Sigma mv^2 + W = C$, so kommt

$$\frac{1}{2}\Sigma mu^2 + W = C',$$

wo C' nur eine andere Constante ist. Da W blos von den Abständen der Systempunkte abhängt, so hat es für die relative Bewegung denselben Werth, wie für die absolute. Es ist also auch die halbe Summe der relativen lebendigen Kraft zusammen mit der Arbeit W eine Constante.

Die lebendige Kraft $\frac{1}{2}\Sigma mu^2$ zerfällt in vielen Fällen in zwei Theile, von denen nur der eine sich an der äusserlich sichtbaren Bewegung des

Systems bemerken lässt. Wenn nämlich die Systempunkte um gewisse Gleichgewichtslagen oscilliren, welche sich in relativer Ruhe oder Bewegung befinden, so hat man, wenn x, y, z die relativen Coordinaten in Bezug auf den Massenmittelpunkt für einen Systempunkt, x_1, y_1, z_1 die der Gleichgewichtslage und ξ, η, ζ die relativen Coordinaten bezüglich dieser Gleichgewichtslagen sind: $x = x_1 + \xi$, $y = y_1 + \eta$, $z = z_1 + \zeta$. Hiernach werden $\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{d\xi}{dt}, \cdots$ und ergibt sich ein Bestandtheil von u^2, welcher aus $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$ und ein anderer, der aus $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ gebildet ist. Ist das Oscillationscentrum $(x_1 y_1 z_1)$ in relativer Ruhe, so ist der erstere Bestandtheil Null; dann ist u blos von der inneren Bewegung des Systems abhängig.

§. 15. Das Princip der Erhaltung der Energie hat die Physiker der Neuzeit zu einer wesentlich veränderten und allgemeineren Auffassung der Naturprozesse und ihres gegenseitigen Zusammenhanges geführt. Man hat die Ansicht gewonnen, dass die Summe aller Energie im gesammten Weltsystem als eine constante Grösse anzusehen sei und dass alle Erscheinungen der Natur, so mannigfach sie auch sein mögen, im Grunde nichts anderes seien, als die Wechselbeziehung zwischen Arbeit und lebendiger Kraft, wie sie die Gleichung ausspricht. Wo nach dieser Ansicht ein Bewegungsphänomen auftritt, wird ein entsprechendes Quantum Arbeit auf sein Zustandekommen verwandt und wo es aufhört, wird ein ihm äquivalentes Quantum Arbeit disponibel. Vorzugsweise ist es die mechanische Theorie der Wärme, welche von diesem Grundsatze ausgehend zu Folgerungen der grössten Wichtigkeit geführt hat und noch ferner führen wird. Die heutige Naturforschung ist Daniel Bernoulli grossen Dank dafür schuldig, dass er die Gleichung der lebendigen Kraft zuerst in der heutigen allgemeinen Fassung festgestellt hat. Nicht geringere Anerkennung zollt sie den Ideen und Forschungen eines Meyer, Helmholtz, Joule, Thomson u. a. auf diesem Gebiete.

VI. Capitel.

Die Differentialgleichungen der Bewegung von Lagrange; das Hamilton'sche Princip; das Princip der kleinsten Wirkung. Die Hamilton'sche canonische Form der Bewegungsgleichungen und die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung.

§. 1. In die Differentialgleichungen der Bewegung (S. 499)

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial x_i} + \cdots,$$

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial y_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial y_i} + \cdots, \qquad i = 1, 2, \ldots n,$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial z_i} + \cdots$$

wofür $L = 0$, $M = 0$, ... die $\varkappa$ Bedingungen des Systems darstellen, welche von **Lagrange** zuerst aufgestellt wurden, führen wir an die Stelle der Variabelen x_i, y_i, z_i neue Variabele $q_1, q_2, \ldots q_\mu$ ein, deren Zahl $\mu = 3n - \varkappa$ und welche so gewählt sind, dass die $\varkappa$ Bedingungen $L = 0$, $M = 0$ ... durch sie identisch erfüllt werden, sodass ohne Zuhülfenahme irgend welcher Relationen zwischen den Grössen q die Gleichungen

$$L(q_1, q_2, \ldots q_\mu) = 0, \quad M(q_1, q_2, \ldots q_\mu) = 0, \ldots$$

bestehen. So können z. B. die Coordinaten x_i, y_i, z_i, welche der Bedingung

$$\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} + \frac{z_i^2}{c^2} = 1$$

genügen sollen, durch die zwei Variabeln q_1, q_2 ersetzt werden, welche mit ihnen durch die Gleichungen $x_i = a \cos q_1$, $y_i = b \sin q_1 \cos q_2$, $z_i = c \sin q_1 \sin q_2$ verbunden sind. Setzt man diese Ausdrücke für x_i, y_i, z_i in die genannte Bedingung ein, so wird sie von selbst erfüllt. Durch Einführung der Grössen q nehmen die Differentialgleichungen der Bewegung eine sehr bemerkenswerthe Form an, welche gleichfalls von **Lagrange** zuerst gegeben wurde.

Es werden x_i, y_i, z_i Functionen von $q_1, q_2, \ldots q_\mu$. Multipliciren wir die obigen Gleichungen der Reihe nach mit den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial x_i}{\partial q_s}, \frac{\partial y_i}{\partial q_s}, \frac{\partial z_i}{\partial q_s}$ von x_i, y_i, z_i nach einer, q_s, der Grössen q, addiren sie und summiren nach i durch das ganze System hindurch, so kommt, da

$$\Sigma\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial L}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial L}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) = \frac{\partial L(q_1, q_2, \ldots q_\mu)}{\partial q_s},$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial M}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial M}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial M}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) = \frac{\partial M(q_1, q_2, \ldots q_\mu)}{\partial q_s},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

und diese Ausdrücke verschwinden, weil $L(q_1, q_2, \ldots q_\mu)$, $M(q_1, q_2, \ldots q_\mu)$, ... identisch Null sind:

$$\Sigma m_i \left\{\frac{d^2 x_i}{dt^2}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 y_i}{dt^2}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 z_i}{dt^2}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right\} = Q_s,$$

wenn Q_s den Ausdruck

$$Q_s = \Sigma\left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)$$

darstellt. Wir wollen die Differentiationen nach der Zeit durch angefügte Accente bezeichnen, nämlich $\frac{dx_i}{dt} = x_i'$, $\frac{dy_i}{dt} = y_i'$, $\frac{dz_i}{dt} = z_i'$ setzen und die vorstehende Gleichung also schreiben:

$$\Sigma m_i \left\{\frac{dx_i'}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{dy_i'}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{dz_i'}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right\} = Q_s.$$

Nun ist:

$$\frac{d}{dt}\cdot\Sigma m_i\left\{x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s'} + y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s'} + z_i'\frac{\partial z_i'}{\partial q_s'}\right\} = \Sigma m_i\left\{\frac{dx_i'}{dt}\frac{\partial x_i'}{\partial q_s'} + \frac{dy_i'}{dt}\frac{\partial y_i'}{\partial q_s'} + \frac{dz_i'}{dt}\frac{\partial z_i'}{\partial q_s'}\right\}$$

$$+ \Sigma m_i\left\{x_i'\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i'}{\partial q_s'} + y_i'\frac{d}{dt}\frac{\partial y_i'}{\partial q_s'} + z_i'\frac{d}{dt}\frac{\partial z_i'}{\partial q_s'}\right\}.$$

Der Ausdruck links hat die Bedeutung

$$\frac{d}{dt}\cdot\sum_i m_i\left\{x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s'}+y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s'}+z_i'\frac{\partial z_i'}{\partial q_s'}\right\}=\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial q_s'}\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)=\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial q_s'},$$

wenn die halbe lebendige Kraft mit T bezeichnet wird, nämlich

$$T=\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2).$$

Die zweite Summe rechter Hand gestaltet sich folgendermassen um. Es bestehen, da x_i, y_i, z_i Functionen der neuen Variabelen werden, die Gleichungen:

$$x_i'=\frac{\partial x_i}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial x_i}{\partial q_2}q_2'+\cdots+\frac{\partial x_i}{\partial q_\mu}q_\mu',$$

$$y_i'=\frac{\partial y_i}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial y_i}{\partial q_2}q_2'+\cdots+\frac{\partial y_i}{\partial q_\mu}q_\mu',$$

$$z_i'=\frac{\partial z_i}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial z_i}{\partial q_2}q_2'+\cdots+\frac{\partial z_i}{\partial q_\mu}q_\mu',$$

worin $q_1'=\frac{dq_1}{dt}$, $q_2'=\frac{dq_2}{dt}$, $\ldots q_s'=\frac{dq_s}{dt}$, $\ldots q_\mu'=\frac{dq_\mu}{dt}$ ist. Differentiirt man diese in q_1', q_2', $\ldots q_s'$, $\ldots q_\mu'$ linearen Ausdrücke nach q_s', so ergibt sich

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_s'}=\frac{\partial x_i}{\partial q_s},\quad \frac{\partial y_i'}{\partial q_s'}=\frac{\partial y_i}{\partial q_s},\quad \frac{\partial z_i'}{\partial q_s'}=\frac{\partial z_i}{\partial q_s}.$$

Wir können daher die Differentialquotienten von x_i', y_i', z_i' nach q_s' und die entsprechenden Differentialquotienten ihrer Derivirten x_i, y_i, z_i nach q_s vertauschen und erhalten für die zweite Summe rechts:

$$\sum_i m_i\left\{x_i'\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i'}{\partial q_s'}+y_i'\frac{d}{dt}\frac{\partial y_i'}{\partial q_s'}+z_i'\frac{d}{dt}\frac{\partial z_i'}{\partial q_s'}\right\}$$

$$=\sum_i m_i\left\{x_i'\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+y_i'\frac{d}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+z_i'\frac{d}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right\}.$$

Differentiiren wir aber die Ausdrücke für x_i', y_i', z_i' nach q_s, so erhalten wir:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}=\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s\partial q_1}q_1'+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s\partial q_2}q_2'+\cdots+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s\partial q_\mu}q_\mu'=\frac{\partial\frac{\partial x_i}{\partial q_s}}{\partial q_1}q_1'+\cdots=\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}$$

$$\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}=\frac{d}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q_s},\quad \frac{\partial z_i'}{\partial q_s}=\frac{d}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}.$$

Indem wir daher die Werthe für die Differentialquotienten $\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_s}$, ... einführen, folgt weiter für die zweite Summe rechts die Form:

$$\sum_i m_i\left\{x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}+y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}+z_i'\frac{\partial z_i'}{\partial q_s}\right\}=\frac{\partial}{\partial q_s}\tfrac{1}{2}\Sigma m_i\{x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2\}=\frac{\partial T}{\partial q_s}$$

und da die erste Summe rechts vermöge der Relationen $\frac{\partial x_i'}{\partial q_s'}=\frac{\partial x_i}{\partial q_s}$, $\frac{\partial y_i'}{\partial q_s'}=\frac{\partial y_i}{\partial q_s}$, ... gleich Q_s ist, so erhalten wir als eine der Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial q'_s} - Q_s = \frac{\partial T}{\partial q_s}$$

oder

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial q'_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s,$$

welches die zweite Lagrange'sche Form ist. Indem wir s von 1 bis μ variiren lassen, gewinnen wir die μ Bewegungsgleichungen, welche $q_1, q_2, \ldots q_\mu$ als Functionen von t liefern.

Setzt man in den Ausdruck der Elementararbeit $\Sigma(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$ für dx_i, dy_i, dz_i ihre Ausdrücke $dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} dq_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} dq_\mu$ u. s. w. ein, so nimmt er die Gestalt an

$$Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \cdots + Q_s dq_s + \cdots + Q_\mu dq_\mu = \Sigma Q_s dq_s,$$

wo Q_s die oben bezeichneten Ausdrücke sind. Man findet daher die Grössen Q_s, indem man die Elementararbeit der gegebenen Kräfte nach der Differentiation dq_s der Coordinaten ordnet; sie sind deren Coefficienten; oder auch, indem man die partiellen Arbeiten bestimmt, welche den blossen Aenderungen dq_s der Coordinaten einzeln mit Constantsetzung aller übrigen entsprechen.

§. 2. Im Falle, dass das Princip der Erhaltung der Energie gilt (S. 542), kann man zu den Lagrange'schen Gleichungen auf folgendem etwas einfacherem Wege gelangen, den Ball angegeben hat (*On an elementary proof of Lagrange's equations of motion in generalized coordinates. Proceedings of the R. Irish Academy*, 2[d]. Ser., Vol. II [1875—77], pp. 463—464).

Das System erleide eine Verschiebung, sodass die Coordinaten q_s sich um δq_s ändern; der Punkt m_i (x_i, y_i, z_i) erleidet dadurch parallel den Axen die partiellen Verschiebungen $\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s$, $\frac{\partial y_i}{\partial q_s}\delta q_s$, $\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\delta q_s$ und die Arbeit der an ihm angreifenden Kräfte $m\frac{d^2x_i}{dt^2}$, $m\frac{d^2y_i}{dt^2}$, $m\frac{d^2z_i}{dt^2}$, durch das ganze System summirt, gibt die totale, längs den Verschiebungen δq_s geleistete Arbeit

$$\Sigma m_i \delta q_s \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\frac{d^2x_i}{dt^2} + \frac{\partial y_i}{\partial q_s}\frac{d^2y_i}{dt^2} + \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\frac{d^2z_i}{dt^2}\right).$$

Die potentielle Energie hat hierdurch eine Abnahme erlitten gleich

$$-\frac{\partial U}{\partial q_s}\delta q_s = \delta q_s \Sigma m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\frac{d^2x_i}{dt^2} + \frac{\partial y_i}{\partial q_s}\frac{d^2y_i}{dt^2} + \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\frac{d^2z_i}{dt^2}\right).$$

Nun ist

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i \left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right\},$$

mithin

$$\frac{\partial T}{\partial q_s} = \Sigma m_i \left\{\frac{dx_i}{dt}\frac{d^2x_i}{dt\partial q_s} + \frac{dy_i}{dt}\frac{d^2y_i}{dt\partial q_s} + \frac{dz_i}{dt}\frac{d^2z_i}{dt\partial q_s}\right\}.$$

Ferner ist

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_s}\cdot\frac{dq_s}{dt} + \cdots$$

$$= \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\cdot q'_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_s}\cdot q'_s + \cdots,$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial q'_s}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial q_s}.$$

Daher erhalten wir

$$\frac{\partial T}{\partial q'_s} = \Sigma m_i \left\{\frac{dx_i}{dt}\frac{\partial}{\partial q'_s}\frac{dx_i}{dt} + \frac{dy_i}{dt}\frac{\partial}{\partial q'_s}\frac{dy_i}{dt} + \frac{dz_i}{dt}\frac{\partial}{\partial q'_s}\frac{dz_i}{dt}\right\}$$

$$= \Sigma m_i \left\{\frac{dx_i}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{dy_i}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{dz_i}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right\}.$$

Differentiiren wir jetzt, so folgt leicht

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = -\frac{\partial U}{\partial q_s}.$$

§. 3. Wir wollen einige Aufgaben mit Hülfe der Lagrange'schen Gleichungen der Bewegung behandeln.

Wählt man zu den Coordinaten q die Polarcoordinaten r, ϑ, φ, welche mit den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z durch die Gleichungen

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad z = r\sin\vartheta\sin\varphi$$

verbunden sind, so nehmen die Bewegungsgleichungen die Form an

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r'}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = Q_\vartheta, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

und sind

$$Q_r = \Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial r} + Y\frac{\partial y}{\partial r} + Z\frac{\partial z}{\partial r}\right), \quad Q_\vartheta = \Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial \vartheta} + Y\frac{\partial y}{\partial \vartheta} + Z\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right),$$

$$Q_\varphi = \Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial \varphi} + Y\frac{\partial y}{\partial \varphi} + Z\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right).$$

Es ist weiter

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\Sigma m\,(r'^2 + r^2\cdot\vartheta'^2 + r^2\sin^2\vartheta\cdot\varphi'^2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\vartheta'^2 + mr\sin^2\vartheta\cdot\varphi'^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = mr^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\varphi'^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial r'} = mr', \quad \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = mr^2\vartheta', \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = mr^2\sin^2\vartheta\cdot\varphi'$$

und hiermit werden die Bewegungsgleichungen

$$m\frac{d^2r}{dt^2} - mr\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - mr\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = Q_r,$$

$$m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right) - mr^2\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = Q_\vartheta, \quad m\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{dt}\right) = Q_\varphi,$$

$3n$ an der Zahl, wenn n die Anzahl der Punkte des Systems ist.

Für $\varphi = Const.$ erhält man die Bewegung eines ebenen Systems in seiner Ebene und werden die Bewegungsgleichungen

$$m\frac{d^2r}{dt^2} - mr\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = Q_r, \quad mr^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2mr\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} = Q_\vartheta.$$

§. 4. **Zwei starre schwere Körper A, B von den Massen m, m' sind gelenkartig mit einander so verbunden, dass sie um eine gemeinsame Axe β drehbar sind; A ist ferner drehbar um eine feste horizontale, zu β parallele Axe α und enthält die Ebene beider Axen den Massenmittelpunkt von A. Man soll die Bewegungsgleichungen für das Gesammtsystem beider Körper aufstellen.**

Es seien φ, ψ die Winkel, welche zur Zeit t die Ebene $(\alpha\beta)$ und die Ebene (βS_b), welche die Axe β mit dem Massenmittelpunkte S_b von B verbindet, mit einer festen Ebene, wozu wir die Verticalebene, welche α parallel ist, wählen wollen, bilden. Diese beiden Coordinaten bestimmen die Lage des Systems vollständig. Ist a der Abstand der beiden Axen, so haben die Punkte der Axe β die Geschwindigkeit $a\varphi'$ und wenn b der Abstand des Punktes S_b von β ist, so ist $b\psi'$ die relative Geschwindigkeit von S_b in Bezug auf β. Die Resultante von $a\varphi'$ und $b\psi'$ ist die Geschwindigkeit dieses Punktes und da beide Componenten mit einander den Winkel $\psi - \varphi$ bilden, so ist das Quadrat seiner Geschwindigkeit $a^2\varphi'^2 + b^2\psi'^2 + 2ab\varphi'\psi' \cos(\psi - \varphi)$. Ist daher $\varkappa_\alpha$ der Trägheitsradius von A in Bezug auf α, $\varkappa$ aber der Trägheitsradius von B in Bezug auf die durch S_b zu den Axen α, β parallele Axe, so erhält man nach Cap. I, §. 8, S. 367 für die lebendige Kraft des Systems

$$T = \tfrac{1}{2} m\varkappa_\alpha^2\varphi'^2 + \tfrac{1}{2} m' \left[a^2\varphi'^2 + b^2\psi'^2 + 2ab\varphi'\psi' \cos(\psi - \varphi)\right] + \tfrac{1}{2} m'\varkappa^2\psi'^2.$$

Hieraus ergeben sich

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = m\varkappa_\alpha^2\varphi' + m'a^2\varphi' + m'ab\cos(\psi-\varphi)\psi', \quad \frac{\partial T}{\partial \psi'} = m'(b^2+\varkappa^2)\psi' + m'ab\cos(\psi-\varphi),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = m'ab \sin(\psi - \varphi)\,\varphi'\psi', \qquad \frac{\partial T}{\partial \psi} = -m'ab \sin(\psi - \varphi)\,\varphi'\psi'$$

und gehen die Gleichungen der Bewegung, nämlich

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_\psi$$

zunächst über in

$$(m\varkappa_\alpha^2 + m'a^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + m'ab\frac{d}{dt}\left[\frac{d\psi}{dt}\cos(\psi - \varphi)\right] - m'ab\sin(\psi-\varphi)\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt} = Q_\varphi,$$

$$m'(b^2 + \varkappa^2)\frac{d^2\psi}{dt^2} + m'ab\frac{d}{dt}\left[\frac{d\varphi}{dt}\cos(\psi - \varphi)\right] + m'ab\sin(\psi-\varphi)\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt} = Q_\psi.$$

Um Q_φ und Q_ψ zu finden, erinnern wir daran, dass diese Grössen die Coefficienten von $d\varphi$ und $d\psi$ in dem Ausdrucke $\Sigma(X\delta x + \cdots)$ der Elementararbeit der gegebenen Kräfte sind, wenn derselbe in den Coordinaten φ, ψ dargestellt wird. Dies kommt darauf hinaus, dass $Q_\varphi d\varphi$, $Q_\psi d\psi$ die partiellen Arbeiten sind, welche geleistet werden, wenn ψ, resp. φ als constant betrachtet werden. Die Kräfte sind aber das Gewicht mg von A, angreifend am Massenmittelpunkte S_a von A und das Gewicht $m'g$ von B, angreifend an S_b. Ist c der Abstand des Punktes S_a von der Axe α, so sind die Abstände y_a, y_b, S_a und S_b von der Horizontalebene der Axe α

$$y_a = c\cos\varphi, \qquad y_b = a\cos\varphi + b\cos\psi.$$

Wächst nun blos φ um $d\varphi$, so ist die Elementararbeit

$$Q_\varphi d\varphi = mg \frac{dy_a}{d\varphi} d\varphi + m'g \frac{dy_b}{d\varphi} d\varphi = - g (mc + m'a) \sin \varphi \, d\varphi$$

und ebenso, wenn ψ allein um $d\psi$ zunimmt, die Elementararbeit

$$Q_\psi d\psi = m'g \frac{dy_b}{d\psi} d\psi = - m'gb \sin \psi \, d\psi.$$

In die Bewegungsgleichungen sind daher noch die Grössen

$$Q_\varphi = - g (mc + m'a) \sin \varphi, \qquad Q_\psi = - m'gb \sin \psi$$

einzuführen.

Das Gesammtsystem der Körper A und B kann solche Bewegungen machen, dass es ein einziges unveränderliches System bildet. Dazu ist erforderlich, dass während der Bewegung der Winkel $\psi - \varphi$ constant bleibe. Setzen wir $\varphi - \psi = \sigma$, so nehmen die Gleichungen die Form an

$$(m\varkappa_\alpha^2 + m'a^2) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + m'ab \cos\sigma \frac{d^2\psi}{dt^2} - m'ab \sin\sigma \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\psi}{dt} = - g (mc + m'a) \sin \varphi,$$

$$m' (b^2 + \varkappa^2) \frac{d^2\psi}{dt^2} + m'ab \cos\sigma \frac{d^2\varphi}{dt^2} + m'ab \sin\sigma \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\psi}{dt} = - m'gb \sin \psi$$

und wenn insbesondere $\sigma = 0$, d. h. $\varphi = \psi$ werden soll, d. h. wenn die Massenmittelpunkte S_a, S_b beide in die Ebene $(\alpha \beta)$ fallen sollen, so werden dieselben

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g (mc + m'a)}{m\varkappa_\alpha^2 + m'(a^2 + ab)} \sin \varphi = 0,$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{gb}{b^2 + \varkappa^2 + ab} \sin \varphi = = 0.$$

Beide Gleichungen stellen identisch die Pendelbewegung dar, welche das Gesammtsystem nunmehr um die Axe α ausführt. Die Gleichsetzung der Coefficienten liefert daher mit Rücksicht auf $c = a + b$ die Bedingung für das Eintreten der speciellen vorausgesetzten Bewegungsart; nämlich

$$\frac{m\varkappa_\alpha^2 + m' (a^2 + ab)}{mc + m'a} = \frac{b^2 + \varkappa^2 + ab}{b}.$$

Indem wir bedenken, dass $b^2 + \varkappa^2$ das Quadrat des Trägheitsradius $\varkappa_\beta$ des Körpers B in Bezug auf die Axe β und $a + b = c$ ist, sowie, dass $\frac{\varkappa_\alpha^2}{c}$ und $\frac{\varkappa_\beta^2}{b}$ die einfachen Pendellängen l_α, l_β sind, welche den Schwingungen der Körper A und B einzeln um die Axen α und β entsprechen, können wir diese Bedingung auf die Form bringen:

$$l_\alpha - l_\beta = a \left(1 + \frac{m'}{m} \frac{l_\beta - b}{c}\right),$$

in welcher sie blos die beiden Pendellängen und die Abstände der beiden Massenmittelpunkte der Körper A, B von den Axen α, β enthält. Sind $\frac{m'}{m}$ und $\frac{l_\beta - b}{c}$ sehr klein, so hat man näherungsweise $a = l_\alpha - l_\beta$ als die fragliche Bedingung.

Eine Glocke und ihr Klöppel bilden zwei Körper A, B von der hier vorausgesetzten Verbindungsart. Die vorstehende Betrachtung zeigt, dass es auf viele Arten sich ereignen kann, dass der Klöppel nicht anschlägt und die Glocke also nicht geläutet werden kann. Vgl. Veltmann, die Kölner Kaiserglocke. Ent-

hüllungen über die Art und Weise, wie der Kölner Dom zu einer missrathenen Glocke gekommen ist. Bonn 1880. In dieser Schrift wird der einfachste aller möglichen Fälle, in welchen Glocken und Klöppel, wie ein unveränderliches System schwingen und der Klöppel folglich nicht anschlägt ($\varphi = \psi$) in der hier entwickelten Weise erläutert.

§. 5. Zwei schwere Punkte von den Massen m, m' sind durch einen vollkommen biegsamen unelastischen Faden von der Länge l verbunden; m bewegt sich auf einer horizontalen Ebene, während ein Theil des Fadens mit m' an dessen Ende durch eine unendlichkleine Oeffnung O in der Ebene vertical herabhängt. Man soll die Gleichungen der Bewegung dieses Systems aufstellen.

Ist O der Ursprung eines Polarcoordinatensystems der r, ϑ in der horizontalen Ebene, der Radiusvector r also das auf der Ebene aufliegende Fadenstück, ϑ der Winkel den dasselbe mit irgend einer festen Geraden der Ebene bildet, so ist die lebendige Kraft von m gleich $m\,(r'^2 + r^2\vartheta'^2)$, die von m' gleich $m'r'^2$, da die Fadenlänge constant und also die Geschwindigkeitscomponenten beider Punkte in der Richtung des Fadens gleich sind. Daher ist

$$T = \tfrac{1}{2} m\,(r'^2 + r^2\vartheta'^2) + \tfrac{1}{2} m' r'^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial r'} = (m + m')\,r', \quad \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = m r^2 \vartheta', \quad \frac{\partial T}{\partial r} = m r \vartheta'^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = 0.$$

Da da Gewicht mg von dem Widerstande der Ebene getilgt wird, so ist $m'g$ die einzige in Betracht kommende Kraft und die Elementararbeit, welche einer Aenderung von r entspricht, $Q_r dr = -\,m'g dr$, die einer Aenderung von ϑ entsprechende aber $Q_\vartheta d\vartheta = 0$, mithin $Q_r = -\,m'g$, $Q_\vartheta = 0$. Daher werden die Bewegungsgleichungen

$$(m + m')\frac{d^2 r}{dt^2} - m r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = -\,m'g, \qquad m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right) = 0.$$

Subtrahirt man auf beiden Seiten der ersten dieser Gleichungen $m'r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$ und integrirt die zweite, so kommt

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = -\,\frac{m'}{m + m'}\left(g + r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{h}{m r^2},$$

wo h eine Constante bedeutet. Die linke Seite der ersten dieser letzten Gleichungen ist die Beschleunigung des Punktes m in der Richtung des Radiusvectors r (s. B. I, S. 352), während die zu ihr senkrechte Beschleunigung $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right)$ gleich Null ist. Daher ist die Kraft P, welche m beschleunigt, nach O gerichtet und

$$P = \frac{m m'}{m + m}\left(g + \frac{h^2}{m^2 r^3}\right).$$

§. 6. Bewegung des Pendels mit Rücksicht auf die Bewegung der Erde. Die relative Beschleunigung eines Punktes in einem in Bewegung begriffenen System hat nach B. I, S. 523 zu Componenten: 1. Die absolute Beschleunigung des Punktes, 2. die entgegengesetzt genommene Beschleunigung des mit ihm zusammenfallenden Systempunktes und 3. die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung. Indem man dieselben mit der Masse m des Punktes multiplicirt, erhält man die drei Componenten der Kraft, welche demselben seine Be-

schleunigung zu ertheilen vermag. Indem hiernach zu der resoluten beschleunigenden Kraft die beiden andern Kräfte, nämlich die entgegengesetzte Kraft des Systempunktes und die zusammengesetzte Centrifugalkraft hinzugefügt werden, kann ein Problem der relativen Bewegung, wie ein Problem der absoluten Bewegung behandelt werden.

Wir wählen den Aufhängepunkt des Pendels von der Länge l zum Ursprung, die Verticale zur z-Axe, positiv aufwärts gerechnet, die Tangente des Parallelkreises und des Meridians zur x- und y-Axe des Coordinatensystems, sodass die positiven Axen der x und y nach Osten und Süden gerichtet sind. Es sei ferner φ der Winkel, den die Verticalebene, welche den Pendelfaden enthält, mit der xz-Ebene bilden, und ϑ der Neigungswinkel desselben gegen die Verticale. Die Coordinaten des Pendelpunktes sind dann

$$x = l \sin\vartheta \cos\varphi, \qquad y = l \sin\vartheta \sin\varphi, \qquad z = -l\cos\vartheta.$$

Auf diesen Punkt wirken 1. das absolute Gewicht mG desselben, dessen Elementararbeit $-mG\delta(l\cos\vartheta) = mG\sin\vartheta\,\delta\vartheta$ ist; 2. die Kraft des Systempunktes, im entgegengesetzten Sinne genommen. Ist a der Endradius, also $a\cos\lambda$ der Radius des Parallelkreises, wo λ die geographische Breite ist, so wird $\omega^2 a\cos\lambda$ die Beschleunigung und $m\omega^2 a\cos\lambda$ die in Frage kommende Kraft, welche in die Verlängerung des Radius des Parallelkreises fällt und mit den Axen die Winkel $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi - \lambda$, λ bildet. Ihre Componenten sind mithin 0, $m\omega^2 a\sin\lambda\cos\lambda$, $m\omega^2 a\cos^2\lambda$. Die Arbeit dieser Kraft ist daher $m\omega^2 a\cos\lambda(\sin\lambda\,\delta y + \cos\lambda\,\delta z)$ und nimmt mit Hülfe der Werthe von δy, δz die Form an

$$m\omega^2 a l\cos\lambda\,[(\cos\lambda\sin\vartheta + \sin\lambda\cos\vartheta\sin\varphi)\,\delta\vartheta + \sin\lambda\sin\vartheta\cos\varphi\,\delta\varphi].$$

3. Die zusammengesetzte Centrifugalkraft hat zu Componenten

$$-2m\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right), \quad -2m\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right), \quad -2m\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right),$$

wenn p, q, r die Componenten der Winkelgeschwindigkeit ω sind, nämlich $p = 0$, $q = \omega\cos\lambda$, $r = \omega\sin\lambda$. Ihre Arbeit ist daher

$$2m\omega\left[\left(\frac{dy}{dt}\sin\lambda - \frac{dz}{dt}\cos\lambda\right)\delta x - \frac{dx}{dt}\sin\lambda\,\delta y + \frac{dx}{dt}\cos\lambda\,\delta z\right]$$

oder, nach Einführung der Werthe für x, y, z:

$$2m\omega l^2\sin\vartheta\,(\sin\lambda\cos\vartheta + \cos\lambda\sin\vartheta\sin\psi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\,\delta\vartheta - \frac{d\vartheta}{dt}\,d\varphi\right).$$

Mit Hülfe der Arbeit der drei Kräfte bildet man leicht den Ausdruck für die Gesammtarbeit, welche die Form

$$Q_\vartheta\,\delta\vartheta + Q_\varphi\,\delta\varphi$$

hat. Die Lagrange'schen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial\vartheta'} - \frac{\partial T}{\partial\vartheta} = Q_\vartheta, \qquad T = \tfrac{1}{2}ml^2(\vartheta'^2 + \sin^2\vartheta\cdot\varphi'^2)$$

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial\varphi'} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q_\varphi,$$

gehen über in

$$l\left[\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - \sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = G\sin\vartheta + \omega^2 a\cos\lambda\,(\cos\lambda\sin\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi)$$
$$+ 2l\omega\sin\vartheta\frac{d\varphi}{dt}(\sin\lambda\cos\vartheta + \cos\lambda\sin\vartheta\sin\varphi),$$

$$l\frac{d}{dt}\left(\sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{dt}\right) = \omega^2 a\sin\lambda\cos\lambda\sin\vartheta\cos\varphi - 2\omega l\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}(\sin\lambda\cos\vartheta + \cos\lambda\sin\vartheta\sin\varphi).$$

Diese Gleichungen gestatten nur eine approximative Integration für ein beliebiges λ. Für den Pol ist $\lambda = \frac{1}{2}\pi$; hierfür werden sie

$$l\left[\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - \sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = G\sin\vartheta + \omega^2 a(\sin\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi) + 2l\omega\sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi,$$

$$l\frac{d}{dt}\left(\sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{dt}\right) = -2\omega l\sin^2\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\sin\varphi.$$

Multiplicirt man die erste mit $\frac{d\vartheta}{dt}$, die zweite mit $\frac{d\varphi}{dt}$ und addirt sie, so gibt die darauffolgende Integration

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - \sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{G}{l}(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta),$$

wo ϑ_0 der Anfangswerth von ϑ ist. Hierzu gibt die zweite, für sich integrirt

$$\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt} + \omega\right) = Const.$$

Diese beiden Integrale sind das der lebendigen Kraft und das der Flächen. Setzt man den Anfangswerth von $\frac{d\varphi}{dt}$ gleich $-\omega$, so wird

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega,$$

d. h. die Verticalebene des Pendels rotirt gleichförmig um die Erdaxe.

§. 7. Im Falle, dass eine Kräftefunction U existirt, haben wir:

$$Q_s = \sum_i\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) = \sum_i\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) = \frac{\partial U}{\partial q_s}$$

und werden mithin die Bewegungsgleichungen in diesem Falle:

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial q_s'} = \frac{\partial(T+U)}{\partial q_s},$$

oder wenn man noch $\frac{\partial T}{\partial q_s'} = p_s$, setzt:

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial(T+U)}{\partial q_s}, \quad p_s = \frac{\partial T}{\partial q_s'}, \quad s = 1, 2, 3, \ldots \mu.$$

Substituirt man die linearen Ausdrücke

$$x_i' = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}q_1' + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu}q_\mu',$$

$$y_i' = \frac{\partial y_i}{\partial q_1}q_1' + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial q_\mu}q_\mu',$$

$$z_i' = \frac{\partial z_i}{\partial q_1}q_1' + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial q_\mu}q_\mu'$$

in den Ausdruck

$$T = \frac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

so wird T eine homogene Function 2. Grades der Grössen $q_1', q_2', \ldots q_\mu'$ und folglich nach dem Euler'schen Satze über die homogenen Functionen:

$$2T = \frac{\partial T}{\partial q'_1} q'_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q'_\mu} q'_\mu,$$

oder mit Rücksicht auf $\frac{\partial T}{\partial q'_s} = p_s$:

$$2T = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 = p_\mu q'_\mu.$$

Wenn die Variabelen q so gewählt werden können, dass eine von ihnen, q_s, in der Kräftefunction U und in dem Ausdrucke T der halben lebendigen Kraft nicht vorkommt, während letztere Grösse den Differentialquotienten q'_s enthalten kann, so wird $\frac{\partial (T+U)}{\partial q_s} = 0$, also $\frac{dp_s}{dt} = 0$ und ergibt sich mithin ein Integral $p_s = Const.$ der Differentialgleichungen der Bewegung unmittelbar.

Dies tritt z. B. bei der Newton'schen Attraction eines Punktes nach einem festen Centrum ein. Denn für dies Centrum als Ursprung der Polarcoordinaten $q_1 = r$, $q_2 = \vartheta$, $q_3 = \varphi$ hat man:

$$U = -\frac{x}{r}, \quad T = \tfrac{1}{2} m (r'^2 + r^2 \vartheta'^2 + r^2 \sin^2\vartheta \cdot \varphi'^2)$$

(s. S. 548) und kommt φ nicht in U und T und in T blos φ' vor. Daher ist

$$p_3 = \frac{\partial T}{\partial q'_3} = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = m r^2 \sin^2\vartheta \cdot \varphi' = Const.,$$

oder $r^2 \sin^2\vartheta \cdot \varphi' = Const.$ ein Integral der Bewegungsgleichungen. Vermöge der Transformationsformeln $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $z = r\sin\vartheta\sin\varphi$ ergibt sich $\operatorname{tg}\varphi = \frac{z}{y}$, $\frac{\varphi'}{\cos^2\varphi} = \frac{yz' - y'z}{y^2}$, d. h. $r^2 \sin^2\vartheta \cdot \varphi' = yz' - y'z = Const.$, nämlich das Princip der Flächen.

§. 8. Man kann die Gleichungen der Bewegung in der Lagrange'schen Form aus folgendem, von Hamilton zuerst aufgestellten Principe ableiten:

Wenn die Lage des Systems zu einer Anfangszeit $t = t_0$ und einer Endzeit $t = t_1$ fest gegeben ist, T die halbe lebendige Kraft und δU die Elementararbeit der Kräfte für irgend eine mit den Bedingungen des Systems verträgliche Verschiebung bedeutet, so ist

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta U)\, dt = 0$$

für alle mit den Bedingungen verträglichen Verschiebungen, wobei die den Zeiten t_0 und t_1 entsprechenden Verschiebungen Null sind.

Denn es ist

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma m (x'^2 + y'^2 + z'^2), \quad \delta U = \Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z),$$

$$\delta T = \Sigma m (x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z') = \Sigma m \left(\frac{dx}{dt}\delta\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\delta\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}\delta\frac{dz}{dt}\right)$$

$$= \Sigma m \left(\frac{dx}{dt}\frac{d\cdot\delta x}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\cdot\delta y}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\cdot\delta z}{dt}\right)$$

und daher

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta U)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\Sigma m \left(\frac{dx}{dt}\frac{d\cdot\delta x}{dt} + \cdots\right) + \Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\right]dt.$$

Nun liefert aber die partielle Integration

$$\int \Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\,\frac{d\cdot\delta x}{dt}+\cdots\right)dt$$
$$=\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x+\frac{dy}{dt}\,\delta y+\frac{dz}{dt}\,\delta z\right)-\int \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right)\cdot dt$$

und da für $t=t_0$, wie für $t=t_1$ alle δx, δy, δz Null sind, so wird

$$\int_{t_0}^{t_1} \Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\,\frac{d\cdot\delta x}{dt}+\cdots\right)=-\int_{t_0}^{t_1} \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right)\cdot dt.$$

Indem man diesen Ausdruck in das Hamilton'sche Integral einführt, erhält man

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta U)\,dt$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\Sigma\left[\left(X-m\,\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\,\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\,\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]\cdot dt=0,$$

weil nach dem D'Alembert'schen Princip die Summe unter dem Integralzeichen für alle verträglichen Verschiebungen verschwindet.

Die Grösse $\delta U = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$ stellt die Elementararbeit der Kräfte dar und ist es nicht gefordert, dass sie das Differential einer Function U sei. Ist dies der Fall, dann kann das Princip in der Form geschrieben werden:

$$\delta\int_{t_0}^{t}(T+U)\,dt=0.$$

Um nun aus dem Hamilton'schen Princip die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen zu erhalten, führen wir in δT und δU die Coordinaten $q_1, q_2, \ldots q_s, \ldots q_\mu$ ein. Es wird dadurch mit Hülfe der Ausdrücke für x_i', y_i', z_i', ... des §. 1 die Grösse T eine Function der Grössen q_s und ihrer Differentialquotienten $q_s'=\frac{dq_s}{dt}$ und mithin

$$\delta T=\Sigma\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\,\delta q_s+\frac{\partial T}{\partial q_s'}\,\delta q_s'\right).$$

δU geht aber über in

$$\delta U=\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)=\Sigma Q_s\delta q_s.$$

Hierdurch geht die Gleichung des Princips über in

$$\int_{t_0}^{t_1}\Sigma\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\,\delta q_s+\frac{\partial T}{\partial q_s'}\,\delta q_s'+Q_s\delta q_s\right)dt=0.$$

Nun ist aber

$$\int\frac{\partial T}{\partial q_s'}\,\delta q_s' dt=\int\frac{\partial T}{\partial q_s'}\,\delta\,\frac{dq_s}{dt}\,dt=\int\frac{\partial T}{\partial q_s'}\,\frac{d\,.\,\delta q_s}{dt}\,dt=\frac{\partial T}{\delta q_s'}\,\delta q_s-\int\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right)\delta q_s\,dt$$

und also wegen der festen Grenzen

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial q_s'} \delta q_s' dt = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right) \delta q_s dt$$

und wenn man dies einfügt

$$\int_{t_0}^{t} \Sigma \left[\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right) + Q_s\right] \delta q_s \cdot dt = 0,$$

woraus folgt

$$\Sigma \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s\right] \delta q_s = 0.$$

Sind nun die Coordinaten q_s so gewählt, dass sie die Bedingungen, denen das System unterworfen ist, identisch erfüllen, so sind alle δq_s von einander unabhängig und müssen daher die Coefficienten derselben verschwinden, was zu den Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s, \qquad s = 1, 2, 3, \ldots \mu$$

führt.

Ueber die Ausdehnung dieser Methode auf den Fall, dass U auch die Componenten der Geschwindigkeit und mithin auch q_s enthält, s. Holzmüller, Ueber die Anwendung der Jacobi-Hamilton'schen Methode auf den Fall der Anziehung eines Punktes nach dem electrodynamischen Gesetz von Weber [Schlömilch's Zeitschrift f. Mathem. u. Physik B. XV, S. 69 (1870)]. *)

§. 9. Mit dem Hamilton'schen Princip sehr nahe verwandt ist ein anderes Princip, mit Hülfe dessen man gleichfalls die Bewegungsgleichungen erhalten kann, das Princip der kleinsten Wirkung. (Vgl. S. 165 und B. I, S. 351.) Gilt nämlich das Princip der lebendigen Kraft, so ist $\delta U = \delta T$ und nimmt das Hamilton'sche Princip die Form an

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = 0,$$

oder, wenn man $T = \frac{1}{2} \Sigma m v_i^2$ und $v_i dt = ds_i$ einsetzt

$$\delta \int \Sigma m_i v_i ds_i = 0,$$

eine Form, auf welche wir nachher zurückkommen werden. Indem man $2T dt = \Sigma m_i v_i^2 dt = \Sigma m_i \frac{ds_i^2}{dt}$ schreibt und aus $\Sigma m_i v_i^2 = \Sigma m_i \frac{ds_i^2}{dt^2} = 2(U + h)$ den Werth

$$\frac{1}{dt} = \sqrt{\frac{2(U+h)}{\Sigma m_i ds_i^2}}$$

*) Im Anschlusse hieran glauben wir hinzufügen zu dürfen, dass in neuerer Zeit der erfolgreiche Versuch gemacht worden ist, die Bewegungsgleichungen eines Punktes, insbesondere auch die, welche das Weber'sche Gesetz betreffen, durch reines Raisonnement zu entwickeln. Vgl. hierüber die gehaltvolle Schrift von A. Fick, Ueber die der Mechanik zu Grunde liegenden Anschauungen (Verhandl. d. phys.-medic. Gesellsch. zu Würzburg. N. F. XIV. Bd.).

entnimmt, wird die Gleichung

$$\delta \int \sqrt{2(U+h)}\,\sqrt{\Sigma m_i ds_i^2} = 0,$$

in welcher die Zeit t nicht mehr applicit vorkommt. Indem man statt t eine der Coordinaten, z. B. x_1 als unabhängige Variabele wählt, kann man schreiben

$$\delta \int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\Sigma m_i \left(\frac{ds_i}{dx_1}\right)^2} \cdot dx_1 = \delta \int \sqrt{2(U+h)}\,\sqrt{\Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)} \cdot dx_1$$

$$= \delta \int P dx_1 = \int \delta P \cdot dx_1,$$

indem man

$$ds_i^2 = dx_i^2 + dy_i^2 + dz_i^2, \quad \frac{dx_i}{dx_1} = x_i', \quad \frac{dy_i}{dx_1} = y', \quad \frac{dz_i}{dx_1} = z',$$

$$\sqrt{2(U+h)}\,\sqrt{\Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)} = P$$

setzt. Da P von den $x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i'$ abhängt, so ist

$$\delta P = \Sigma \left\{\frac{\partial P}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial P}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial P}{\partial z_i}\delta z_i + \frac{\partial P}{\partial x_i'}\delta x_i' + \frac{\partial P}{\partial y_i'}\delta y_i' + \frac{\partial P}{\partial z_i'}\delta z_i'\right\}$$

und wenn man die partiellen Integrationen, wie

$$\int \frac{\partial P}{\partial x_i'}\delta x_i' dx_1 = \int \frac{\partial P}{\partial x_i'}\frac{d\delta x_i}{dx_1}\cdot dx_1$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x_i'}\delta x_i - \int \frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial P}{\partial x_i'}\right)\delta x_i dx_1 = -\int \frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial P}{\partial x_i'}\right)\delta x_i dx_1$$

(da δx_i an den Grenzen der Integration verschwindet, weil die Anfangs- und Endpunkte fest bleiben) benutzt, so wird

$$\delta \int P dx_1 = \int \Sigma \left\{\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right) - \frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial P}{\partial x_i'}\right)\right]\delta x_i + \left[\frac{\partial P}{\partial y_i} - \frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial P}{\partial y_i'}\right)\right]\delta y_i \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial P}{\partial z_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial P}{\partial z_i'}\right)\right]\delta z_i\right\} dx_1.$$

Setzt man zur Abkürzung $A = 2(U+h)$, $B = \Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$, so wird $P = \sqrt{A}\cdot\sqrt{B}$ und

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial P}{\partial x_i'}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{B}{A}}\frac{\partial A}{\partial x_i} - \frac{d}{dx_1}\left(m_i \sqrt{\frac{A}{B}}\frac{dx_i}{dx_1}\right)$$

oder da

$$\sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{\frac{\Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)}{2(U+h)}} = \sqrt{\frac{\Sigma m_i v_i^2 \cdot \left(\frac{dt}{dx_1}\right)^2}{\Sigma m_i v_i^2}} = \frac{dt}{dx_1}$$

ist,

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial P}{\partial x_i'}\right) = \sqrt{\frac{B}{A}}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\right).$$

Durch Einführung dieses und der beiden ähnlichen Ausdrücke ergibt sich endlich

$$\delta \int P dx = \int \sqrt{\frac{B}{A}}\cdot \Sigma \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\right)\delta x_i\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial U}{\partial y_i} - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}\right)\delta y_i + \left(\frac{\partial U}{\partial z_i} - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}\right)\delta z_i\right] dx_1,$$

welche Gleichung wegen der Willkürlichkeit der Grössen δx_i, δy_i, δz_i in die Bewegungsgleichungen

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial y_i} = 0, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial z_i} = 0$$

zerfällt.

Die Gleichung $\delta \int \Sigma m_i v_i ds_i = 0$ ist nur die Grundbedingung dafür, dass die Function $V = \int \Sigma m_i v_i ds_i$ ein Maximum oder ein Minimum sei. Das Princip der kleinsten Wirkung, welches eine solche Eigenschaft des Maximums oder Minimums behauptet, lautet nun:

Wenn das Princip der lebendigen Kraft gilt, so wird das Integral

$$V = \int \Sigma m_i v_i d s_i,$$

auf den ganzen Verlauf der Bewegung des Systems aus einer bestimmten ersten Lage in eine bestimmte zweite Lage erstreckt, für die wirkliche Bewegung im Allgemeinen ein Minimum, d. h. kleiner, als wenn das System durch irgend einen anderen Uebergang, welcher mit den Bedingungen desselben vereinbar ist, aus der ersten Lage in die zweite gelangt.

Für einen einzelnen Punkt kann der Beweis, wie S. 164, mit Hülfe der Niveauflächen geführt werden, indem man für die Spannung T dortselbst die Geschwindigkeit v setzt. Es kann, wie sich hieraus ergibt, V für andere benachbarte Curven, als die wirkliche Bahn grösser werden, als für die wirkliche Bewegung; mithin ist ein Maximum nicht möglich. Dass ein Minimum nun wirklich eintritt, kann hieraus noch nicht gefolgert werden, denn dieses setzt voraus, dass für alle Nachbarcurven V grösser wird, und es ist wohl denkbar, dass der Fall eintreten könnte, dass es für gewisse Curven grösser, für andere kleiner ausfallen könnte, als wie für die wirkliche Bahn und dann würde weder ein Maximum noch ein Minimum eintreten können. In der That hat Jacobi gezeigt, dass in gewissen Fällen V nur innerhalb eines gewissen Bereichs die Eigenschaft des Minimums zukommt, über denselben hinaus sie aber verliert. So z. B., wenn der Punkt bei constanter Geschwindigkeit eine kürzeste Linie auf einer Fläche beschreibt. Wenn nämlich alle von dem Anfangspunkte auf der Fläche nach den verschiedenen Richtungen auslaufenden kürzesten Linien eine Enveloppe bilden, so besteht die Eigenschaft des Minimums von V nur von jenem Anfangspunkte bis zu dem Berührungspunkte seiner Bahn mit der Enveloppe. (Vgl. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, S. 46.)

Für ein System sind ähnliche Betrachtungen versucht worden, indess scheint es noch nicht gelungen zu sein, sie zu dem wünschenswerthen Grade von Evidenz zu erheben; die analytischen Untersuchungen, welche die zweite Variation $\delta^2 V$ entwickeln, um die Frage zu entscheiden, in welchen Fällen V ein wirkliches Maximum oder Minimum werde, sind zu complicirt, als dass wir sie hier zum Vortheil des Unterrichtes entwickeln könnten. Wir begnügen uns hinsichtlich der Entwickelungsgeschichte des Princips auf A. Mayer, Geschichte des Princips der kleinsten Action, Leipzig 1877, zu verweisen.

§. 10. Hamilton hat die Differentialgleichungen der Bewegung in einer eigenthümlichen Form gegeben und für den Fall, dass eine Kräftefunction existirt,

dieselbe von einer Function abhängig gemacht, welche er die **charakteristische Function** nennt. Wir fanden §. 6 die Gleichung

$$2T = \frac{\partial T}{\partial q'_1} q'_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q'_\mu} q'_\mu = \Sigma p_s q'_s.$$

Behufs der Entwicklung der **Hamilton**'schen Gleichungen schreiben wir sie so:

$$T = \Sigma \frac{\partial T}{\partial q'_s} q'_s - T$$

und differentiiren sie vollständig nach allen darin vorkommenden Grössen q_s und q'_s. Dies gibt

$$dT = \Sigma q'_s d\frac{\partial T}{\partial q'_s} + \Sigma \frac{\partial T}{\partial q'_s} dq'_s - \left(\Sigma \frac{\partial T}{\partial q'_s} dq'_s + \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s\right),$$

oder, weil sich die beiden Mittelglieder tilgen:

$$dT = \Sigma q'_s d\frac{\partial T}{\partial q'_s} - \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s = \Sigma q'_s dp_s - \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s.$$

Indem wir uns die Grössen $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ als neue Variabeln an die Stelle der Grössen $q'_1, q'_2, \ldots q'_\mu$ eingeführt denken, wird T eine Function der Grössen p_s und q_s und wenn wir die Differentialquotienten von T, partiell nach p_s und q_s genommen, unter dieser Voraussetzung in Klammern einschliessen, so erhalten wir für das vollständige Differential von T die Gleichung:

$$dT = \Sigma \left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right) dq_s + \Sigma \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) dq_s.$$

Die Vergleichung dieser mit der vorigen Formel liefert aber die Beziehungen:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right) = q'_s, \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) = -\frac{\partial T}{\partial q_s}$$

und wenn wir den Werth $\frac{\partial T}{\partial q_s} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)$ in die Gleichung $\frac{dp_s}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s$ des §. 1 einsetzen, so folgt

$$q'_s = \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right), \quad \frac{dp_s}{dt} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) + Q_s, \qquad s = 1, 2, 3, \ldots \mu$$

als die **Hamilton**'sche oder die **canonische** Form der Bewegungsgleichungen. Für den Fall, dass eine Kräftefunction U existirt, welche von q_s, nicht aber von q'_s, also auch nicht von den für q'_s eingeführten p_s abhängt, ist $Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s} = \left(\frac{\partial U}{\partial q_s}\right)$ und folglich

$$\frac{dp_s}{dt} = -\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial q_s}\right).$$

Aus demselben Grunde, dass U kein p_s enthält, kann man aber die Gleichung $q'_s = \left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right)$ auch so schreiben:

$$q'_s = \left(\frac{\partial (T-U)}{\partial p_s}\right).$$

Setzt man daher $T - U = H$ und tilgt die Klammern als selbstverständlich, so kann man die Differentialgleichungen der Bewegung unter der über U gemachten Voraussetzung schreiben:

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad H = T - U$$

und wenn keine Kräftefunction existirt:

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_s} + Q_s, \qquad s = 1, 2, 3 \ldots \mu.$$

Die Grössen $p_s = \frac{\partial T}{\partial q'_s}$ sind, da T eine homogene Function des zweiten Grades der Grössen q'_s ist, lineare Functionen von q'_s; löst man daher das Gleichungssystem $p_s = \frac{\partial T}{\partial q'_s}$ auf, so ergeben sich für die q'_s lineare Functionen von den p_s, deren Coefficienten die q_s enthalten. Mit ihrer Hülfe treten die p_s an die Stelle der q'_s.

Vermöge der Relationen $\frac{\partial T}{\partial q'_s} = p_s$ und $\left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right) = q'_s$ besteht zwischen den Grössen p_s und q'_s eine gewisse Reciprocität.

Die Function $H = T - U$ nennt **Hamilton** die **charakteristische Function**. Vgl. **Hamilton** *On a general method in Dynamics; by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation or characteristic function* (*Philosoph. Transactions of the Royal Society of London for the year* 1834, P. II, p. 247) und: *Second essay on a general method in Dynamics* (Ibid. 1835, P. I, p. 95).

Wir lernten die charakteristische Function bereits Cap. V, §. 12 ihrer mechanischen Bedeutung nach, nämlich als die totale Energie des Systems, kennen.

§. 11. **Hamilton** hat die Integration der Bewegungsgleichungen von einer nicht linearen partiellen Differentialgleichung abhängig gemacht, die wir jetzt aufstellen wollen.

Die halbe lebendige Kraft T und die Kräftefunction U, welche t auch explicit enthalten darf, seien durch die $3n - \varkappa = \mu$ Variabeln q_s dargestellt, welche den Bedingungen des Systems identisch genügen. Wir bilden die Variation des Integrales

$$V = \int_\tau^t (T + U)\, dt,$$

aber so, dass die Werthe an den Grenzen nicht als gegeben angesehen werden, sondern an den Grenzen andere Bedingungen stattfinden. Indem wir abkürzend $T + U = \varphi$ setzen, erhalten wir, da φ eine Function von q_s und q'_s ist:

$$\delta V = \delta \int^t \varphi\, dt = \int \delta \varphi \cdot dt = \int \left(\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \delta q_s\right) dt + \int \left(\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial q'_s} \delta q'_s\right) dt$$

und vermöge der Relation

$$\int \left(\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial q'_s} \delta q'_s\right) dt = \Sigma \int \frac{\partial \varphi}{\partial q'_s} \delta q'_s\, dt = \Sigma \int \frac{\partial \varphi}{\partial q'_s} \delta \cdot \frac{dq_s}{dt}\, dt$$

$$= \Sigma \int \frac{\partial \varphi}{\partial q'_s} \frac{d \cdot \delta q_s}{dt}\, dt = \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q'_s} \delta q_s - \int \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial q'_s} \cdot \delta q_s\, dt\right),$$

also, wenn man zwischen den Grenzen τ und t integrirt und die dem Werthe τ entsprechenden Anfangswerthe mit dem angefügten Index 0 bezeichnet:

$$\Sigma \int_\tau^t \frac{\partial \varphi}{\partial q'_s} \delta q'_s \, dt = \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q'_s} \delta q_s - \frac{\partial \varphi^0}{\partial q'_s} \delta q_s^0 - \int_\tau^t \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial q'_s} \delta q_s \, dt \right).$$

Setzt man dies in δV ein, so ergibt sich:

$$\delta V = \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial q'_s} \delta q_s - \Sigma \frac{\partial \varphi^0}{\partial q'_s} \delta q_s^0 + \int_\tau^t \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial q'_s} \right) \delta q_s \, dt.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich sehr, indem die eingeklammerten Grössen unter dem Integralzeichen in Folge der Differentialgleichungen der Bewegung verschwinden. Da nämlich U keine q'_s enthält, so ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q'_s} = \frac{\partial (T + U)}{\partial q'_s} = \frac{\partial T}{\partial q'_s} = p_s.$$

Daher ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial q'_s} = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_s} = 0.$$

Demnach bleibt blos

$$\delta V = \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial q'_s} \delta q_s - \Sigma \frac{\partial \varphi^0}{\partial q'_s} \delta q_s^0 = \Sigma p_s \delta q_s - \Sigma p_s^0 \delta q_s^0$$

$$= p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \cdots + p_\mu \delta q_\mu$$

$$- p_1^0 \delta q_1^0 - p_2^0 \delta q_2^0 - \cdots - p_\mu^0 \delta q_\mu^0.$$

Da die Differentialgleichungen der Bewegung als erfüllt angesehen werden, so sind q_s und q'_s, sowie p_s als gegebene Functionen von t und den 2μ Constanten zu betrachten, welche die Integration dieser Gleichungen einführt. Die Variationen δq_s sind daher solche, welche aus der Aenderung der 2μ Constanten entspringen, da t nicht variirt wird und δq_s^0 sind die der unteren Grenze τ des Integrales V entsprechenden Werthe derselben. Nun können nach der Integration der Bewegungsgleichungen alle Variabeln, also auch φ als Functionen von t und den 2μ Constanten dargestellt werden. Diese Constanten sind willkürlich und kann man hierzu die Anfangswerthe q_s^0, p_s^0 wählen. Es bilden die $2\mu + 1$ Variabeln t, q_s, p_s und die 2μ Constanten q_s^0, p_s^0 ein System von $4\mu + 1$ Grössen, zwischen welchen aber die 2μ Integralgleichungen bestehen. Durch dieselben kann man also die 2μ Grössen p_s, p_s^0 durch t und q_s, q_s^0 darstellen und es wird hiernach $V = \int \varphi \, dt$ eine Function von t, q_s, q_s^0. Hiernach erhält man die Aenderung von V, indem t unvariirt bleibt, auch unter der Form

$$\delta V = \Sigma \frac{\partial V}{\partial q_s} \delta q_s + \Sigma \frac{\partial V}{\partial q_s^0} \delta q_s^0.$$

Die Vergleichung beider Formeln für δV ergibt:

$$\frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s, \quad \frac{\partial V}{\partial q_s^0} = - p_s^0.$$

Nun ist $\varphi = \frac{\partial V}{dt}$; da aber V die Zeit sowohl explicit, als in den Grössen q_s implicit enthält, so wird

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial V}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma p_s q'_s$$

und mithin:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma p_s q'_s - \varphi.$$

Es ist aber $\varphi = T + U$, $p_s = \frac{\partial T}{\partial q'_s}$ und $\Sigma p_s q'_s = \Sigma \frac{\partial T}{\partial q'_s} q'_s = 2T$, also $\Sigma p_s q'_s - \varphi = T - U = H$, sodass sich die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$$

ergibt, welcher die Function V genügen muss. Dies ist jedoch so zu verstehen, dass in H die Grösse q'_s durch p_s ausgedrückt und $p_s = \frac{\partial V}{\partial q_s}$ gesetzt wird. Man kann daher den Satz aufstellen:

Wenn die Bewegung, deren Gleichungen sind:

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad \text{wo } H = T - U, \quad p_s = \frac{\partial T}{\partial q'_s},$$

wo H durch p_s und q_s dargestellt ist, zwischen zwei Zeitmomenten τ, t betrachtet wird, als willkürliche Constanten der Integralgleichungen die 2μ Anfangswerthe q_s^0 und p_s^0 gelten und ferner $p_s = \frac{\partial V}{\partial q_s}$ in H gesetzt wird, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, durch welche V als eine Function von t und den μ Grössen q_s definirt wird. Das Integral

$$V = \int_\tau^t (T + U)\, dt,$$

in welchem $T + U$ vermöge der Integralgleichungen eine Function blos von t und den 2μ Constanten q_s^0, p_s^0 ist, nachdem das Resultat der Quadratur durch t und die Grössen q_s, q_s^0 dargestellt ist, ist eine Lösung dieser Differentialgleichung.

Diese Lösung enthält μ Constanten q_s^0 und $\mu + 1$ Variabeln t und q_s. Da nun in H kein V vorkommt, so kann man der Lösung noch eine willkürliche Constante hinzufügen und sie dadurch zu einer vollständigen Lösung der partiellen Differentialgleichung machen, d. h. zu einer solchen, welche ebenso viele Constanten, als unabhängige Variabeln enthält.

Umgekehrt kann man behaupten:

Kennt man eine vollständige Lösung V der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0,$$

wo $H = T - U$ eine Function der $\mu + 1$ Grössen t, p_s und $p_s = \frac{\partial V}{\partial q_s}$ ist, d. h. eine solche, welche ausser der mit V durch Addition verbundenen noch μ andere willkürliche Constanten α_s enthält, so sind die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \ldots, \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha_\mu} = \beta_\mu,$$

worin die β_s neue willkürliche Constanten bezeichnen, nebst

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial q_\mu} = p_\mu$$

die Integralgleichungen des Systems von Differentialgleichungen

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad s = 1, 2, 3, \ldots \mu.$$

Differentiirt man nämlich die Gleichungen $\frac{\partial V}{\partial \alpha_s} = \beta_s$ vollständig nach t, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_\mu} \frac{dq_\mu}{dt} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial q_\mu} \frac{dq_\mu}{dt} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_\mu \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \mu_\mu \partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_\mu \partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_\mu \partial q_\mu} \frac{dq_\mu}{dt} = 0,$$

Differentiirt man aber die Gleichung $\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$ nach den Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ und berücksichtigt, dass H die Grössen t, q_s und $p_s = \frac{\partial V}{\partial q_s}$ enthält, die Constanten α_s aber nur in den p_s enthalten sind, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \alpha_1} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_1} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \alpha_2} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial H}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_2} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \alpha_\mu} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_\mu} + \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_\mu} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_\mu} = 0.$$

Dies System linearer Gleichungen unterscheidet sich aber vermöge der Gleichungen $\frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s$ von dem vorigen nur dadurch, dass die Grössen $\frac{\partial H}{\partial p_s}$ an die Stelle der Grössen $\frac{dq_s}{dt}$ getreten sind. Hieraus folgt $\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}$, $s = 1, 2, \ldots \mu$, welches die einen der Hamilton'schen Differentialgleichungen der Bewegung sind.

Differentiirt man aber die Gleichungen $p_s = \frac{\partial V}{\partial q_s}$, so kommt

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_\mu}\frac{dq_\mu}{dt},$$

oder weil

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_2} = \frac{\partial p_2}{\partial q_s}, \ldots$$

und

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \ldots \quad \frac{dq_\mu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}$$

bereits als richtig erwiesen sind:

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial p_2}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial p_\mu}{\partial q_\mu}\frac{\partial H}{\partial p_\mu}.$$

Andererseits gibt aber die Differentiation der Gleichung $\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$ partiell nach q_s:

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_s} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_s} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_\mu}{\partial q_s} + \frac{\partial H}{\partial q_s}.$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der vorigen, so folgt $\frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s}$, welches die andern Hamilton'schen Differentialgleichungen sind.

Für den Fall der freien Bewegung ist $\mu = 3n$ und kann man für die Grössen q die Coordinaten x_i, y_i, z_i wählen. Man hat dann $T = \frac{1}{2}\Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$ und da die Grössen $p = \frac{\partial T}{\partial q}$ sind, so folgt, dass die Grössen p hier $m_i x_i'$, $m_i y_i'$, $m_i z_i'$ werden und da $p = \frac{\partial V}{\partial q}$ ist, so hat man $m_i x_i' = \frac{\partial V}{\partial x_i}$, $m_i y_i' = \frac{\partial V}{\partial y_i}$, $m_i z_i' = \frac{\partial V}{\partial z_i}$. Entnimmt man hieraus x_i', y_i', z_i', um sie in T einzusetzen, so wird

$$T = \frac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right\}.$$

Demnach wird die Hamilton'sche Differentialgleichung $\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$, $H = T - U$, hier

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right\} = U,$$

wo U blos von den q, d. h. von den Coordinaten x_i, y_i, z_i abhängt. Eine vollständige Lösung V dieser Gleichung mit $3n$ willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{3n}$ ausser der additiven Constanten liefert die Integrale der Bewegungsgleichungen:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z_i}, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

nämlich

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{3n}} = \beta_{3n},$$

wozu als erste Integrale

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = m_i \frac{dx_i}{dt}, \quad \frac{\partial V}{\partial y_i} = m_i \frac{dy_i}{dt}, \quad \frac{\partial V}{\partial z_i} = m_i \frac{dz_i}{dt}, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

gehören.

§. 12. In dem Falle, dass H die Zeit t nicht explicit enthält, reducirt sich die **Hamilton**'sche Gleichung $\frac{\partial V}{dt} + H = 0$ auf eine andere, welche eine Variabele weniger enthält. Setzt man nämlich $\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha$, $V - t\frac{\partial V}{\partial t} = W$ und führt durch diese Gleichungen an die Stelle von t und V zwei neue Variabelen α und W ein, so wird t eine Function von α und den in V ausser t vorkommenden Grössen und W eine Function von $\alpha, q_1, q_2, \ldots q_\mu$ und den Constanten $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ Man hat daher

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \alpha} - \alpha\frac{\partial t}{\partial \alpha} - t = -t, \quad \frac{\partial W}{\partial q_s} = \frac{\partial V}{\partial q_s} + \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial q_s} - \alpha\frac{\partial t}{\partial q_s} = \frac{\partial V}{\partial q_s},$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial V}{dt}\frac{\partial t}{\partial \alpha_s} - \alpha\frac{\partial t}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_s}$$

und die Gleichung $\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \ldots q_\mu, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{dq_\mu}\right) = 0$ wird jetzt

$$\alpha + H\left(q_1, q_2, \ldots q_\mu, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_\mu}\right) = 0 \text{ oder } \alpha + T - U = 0.$$

Nachdem sie integrirt ist, erhält man V vermittelst $V - t\frac{\partial V}{\partial t} = W$, d. h. da $\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \alpha$, $t = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}$ ist, vermittelst $V = W - \alpha\frac{\partial W}{\partial \alpha}$ und in dies V ist überall statt α wieder t einzuführen durch die Gleichung $\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = -t$, welche nach α aufzulösen ist.

Die Lösung W enthält nur μ Constanten und die aus ihr abgeleitete Grösse V ebenfalls; es muss aber V, um vollständig zu sein, $\mu + 1$ Constanten haben. Allein da t in $\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$ selbst nicht auftritt, sondern nur $\frac{\partial V}{\partial t}$, so bleibt V eine Lösung, wenn man auch t um eine Constante vermehrt oder vermindert. Man kann daher $t - \tau$ für t setzen, wodurch $W = V - (t - \tau)\frac{\partial V}{\partial t} = V - \alpha(t - \tau)$ und $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t$ wird. Dann erhält V die nöthige Anzahl $\mu + 1$ Constanten, nämlich die $\mu - 1$ Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\mu-1}$, die additive Constante von W und τ. Die Integralgleichungen des Problems sind demnach

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \ldots \frac{\partial V}{\partial \alpha_{\mu-1}} = \beta_{\mu-1}, \quad \frac{\partial V}{\partial \tau} = Const.$$

Die letzte derselben kann, da τ nur in der Verbindung $t - \tau$ vorkommt, also $\frac{\partial V}{\partial \tau} = -\frac{\partial V}{\partial t}$ ist, durch $\frac{\partial V}{\partial t} = Const.$ ersetzt werden. Da nun $\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha$ gesetzt wurde, so erkennt man, dass die neu eingeführte Variabele α die Rolle einer Constanten spielt.

Die Integralgleichungen kann man durch W darstellen, denn es ist $\frac{\partial V}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_s}$ und $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t$ eine Folge von $\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha$ und $W = V - (t - \tau)\frac{\partial V}{\partial t}$. Daher

werden dieselben

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \ldots \frac{\partial W}{\partial \alpha_{\mu-1}} = \beta_{\mu-1}, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t.$$

Auch das System der Integralgleichungen: $\frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s$ kann vermöge $\frac{\partial V}{\partial q_s} = \frac{\partial W}{\partial q_s}$ in

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_\mu} = p_\mu$$

umgesetzt werden. Man hat daher den Satz:

Wenn die Kräftefunction U und in Folge dessen die charakteristische Function $H = T - U$ die Zeit nicht explicit enthält, so stelle man T durch q_s und p_s dar und ersetze in der Gleichung

$$\alpha + T - U = 0$$

die Grössen p_s durch $\frac{\partial W}{\partial q_s}$, wodurch diese Gleichung eine partielle Differentialgleichung wird. Ist W eine vollständige Lösung derselben, welche ausser der zu W additiv hinzuzufügenden Constanten noch $\mu - 1$ Constante $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\mu-1}$ enthält, so sind

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \ldots \frac{\partial W}{\partial \alpha_{\mu-1}} = \beta_{\mu-1}, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t$$

die zweiten und

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_\mu} = p_\mu$$

die ersten Integralgleichungen der Differentialgleichungen der Bewegung. Die 2μ Constanten derselben sind $\alpha_1 \ldots \alpha_{\mu-1}, \alpha, \beta_1 \ldots \beta_{\mu-1}, \tau$.

Für $\mu = 3n$, d. h. für das freie System sind p_s die $m_i x_i', m_i y_i', m_i z_i'$, $T = \Sigma \frac{1}{m_i} \{(m_i x_i')^2 + (m_i y_i')^2 + (m_i z_i')^2\}$ und folglich ist die **Hamilton**'sche Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z_i}\right)^2 \right\} = U - \alpha.$$

§. 13. Um Probleme der Bewegung nach der **Hamilton**'schen Methode zu behandeln, bedarf man der Integration einer nicht linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Es ist daher von Wichtigkeit, wenn auch nur für einfachere Fälle aus den bekannten Methoden der Integration dieser Gleichungen einige Folgerungen für die Behandlung der mechanischen Probleme zu ziehen. Unter Beschränkung auf die Variabeln x, y, z, wofür $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$, ist die **Lagrange**'sche Integrationsmethode folgende.

Wenn zwischen x, y, z, p, q die partielle Differentialgleichung erster Ordnung besteht:

$$\Psi(x, y, z, p, q) = 0$$

und mithin das totale Differential der Function z die Form hat

$$dz = p\,dx + q\,dy, \text{ wo } p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

so kann man sich jene Gleichung nach q aufgelöst denken und das Resultat $q = \chi(x, y, z, p)$ in den Ausdruck für dz substituiren, sodass

$$dz = p\,dx + \chi\,(x, y, z, p)\,dy$$

wird. Um nun eine vollständige Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung mit zwei willkürlichen Constanten zu finden, genügt es, für p einen Ausdruck $p = \varpi\,(x, y, z, a)$ zu finden, durch welchen $p\,dx + \chi\,dy$ ein vollständiges Differential wird. Durch die Integration desselben erhält man z mit der Constanten a und der durch die Integration eintretenden weiteren Constanten. Damit $p\,dx + \chi\,dy$ ein totales Differential werde, muss die Bedingung

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

oder

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial z}\,p = -\frac{\partial \chi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \left(\chi - \frac{\partial \chi}{\partial p}\,p\right)\frac{\partial p}{\partial z}$$

erfüllt werden. Diese partielle Differentialgleichung für p braucht nicht allgemein gelöst zu werden, vielmehr bedarf man nur irgend einer Lösung mit einer willkürlichen Constanten a, nämlich $\varpi\,(x, y, z, a)$. In besonderen Fällen vereinfacht sich diese Gleichung sehr wesentlich.

Kommt insbesondere in $\Psi\,(x, y, z, p, q) = 0$ die Function z nicht vor, ist also die vorgelegte Differentialgleichung

$$\Psi\,(x, y, p, q) = 0,$$

so wird $\frac{\partial \chi}{\partial z} = 0$ und kann man p als Function von x, y, a ohne z bestimmen, dass $p\,dx + \chi\,dy$ ein totales Differential wird. Dann ist auch $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ und wird p durch die Gleichung

$$\frac{\partial \chi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0$$

zu finden sein. Es ist jedoch zweckmässiger, hierin χ durch die Function Ψ selbst auszudrücken und die Lösung $p = \varpi\,(x, y, a)$ unter der Form $f\,(x, y, p) = a$ darzustellen. Die Differentiation von $\Psi = 0$ und $f = a$ liefert zu diesem Behufe

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial \Psi}{\partial p} + \frac{\partial \Psi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial p} = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

woraus

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} : \frac{\partial \Psi}{\partial q},\quad \frac{\partial \chi}{\partial p} = \frac{\partial q}{\partial p} = -\frac{\partial \Psi}{\partial p} : \frac{\partial \Psi}{\partial q},$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial p},\quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial p}.$$

Mit Hülfe dieser Werthe wird die partielle Differentialgleichung für p oder jetzt vielmehr für f

$$\frac{\partial \Psi}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

Sobald man also von ihr eine Lösung f ohne Constante kennt, so liefert $f\,(x, y, p) = a$ mit $\Psi\,(x, y, p, q) = 0$ die Grössen p und q als Functionen von x, y so, dass $dz = p\,dx + q\,dy$ ein totales Differential und $z = \int (p\,dx + q\,dy)$ die gesuchte Lösung von $\Psi\,(x, y, p, q) = 0$ darstellt, wobei zu z eine additive Constante hinzutritt. Diese partielle Differentialgleichung lösen oder ein Integral $f\,(x, y, p) = a$ des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$dx : dy : dp = \frac{\partial \Psi}{\partial p} : \frac{\partial \Psi}{\partial q} : -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

finden, ist dasselbe. Denn die Differentiation von $f = a$ gibt

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0$$

und wenn man hierin für dx, dy, dp die ihnen proportionalen Grössen einsetzt, so erscheint die obige partielle Differentialgleichung, welcher mithin f genügt. Man kann die eben aufgestellte Proportion noch durch dq und die ihm proportionale Grösse ergänzen. Die Differentiation von $\Psi = 0$ ergibt nämlich

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial p} dp + \frac{\partial \Psi}{\partial q} dq = 0$$

und da $dx : dp = \frac{\partial \Psi}{\partial p} : - \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ liefert: $\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial p} dp = 0$, so bleibt

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial q} dq = 0$$

woraus

$$dy : dq = \frac{\partial \Psi}{\partial q} : - \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

folgt, sodass jetzt vollständig:

$$dx : dy : dp : dq = \frac{\partial \Psi}{\partial p} : \frac{\partial \Psi}{\partial q} : - \frac{\partial \Psi}{\partial x} : - \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

wird, welche Proportion in Bezug auf x und p, sowie in Bezug auf y und q symmetrisch ist.

Man kann die Betrachtungen, denen $f(x, y, p) = a$ zu Grunde lag, dahin erweitern, dass die Function f auch q enthält und $F(x, y, p, q) = a$ an die Stelle von $f(x, y, p) = a$ tritt. Dies heisst so viel, als man sucht $F(x, y, p, q) = a$ so, dass hieraus in Verbindung mit $\Psi(x, y, p, q) = 0$ für p und q Ausdrücke in x, y, a folgen, welche $p dx + q dy$ zu einem vollständigen Differentiale machen. Es ergibt sich leicht, dass die Function F der Gleichung

$$\frac{\partial \Psi}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial q} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial q} = 0$$

genügen, also $F = a$ ein Integral von

$$dx : dy : dp : dq = \frac{\partial \Psi}{\partial p} : \frac{\partial \Psi}{\partial y} : - \frac{\partial \Psi}{\partial x} : - \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

sein muss.

Differentiirt man nämlich $\Psi(x, y, p, q) = 0$ und $F(x, y, p, q) = a$, indem man p und q als unbekannte Functionen von x und y ansieht, welche der Bedingung

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

genügen müssen, partiell nach x und y und eliminirt aus dieser und den so zu gewinnenden Gleichungen

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} = 0,$$

$\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial y}$, so ergibt sich die Gleichung

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{\partial\Psi}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial p}\right)=0$$

deren erster Factor links, der Null gleichgesetzt, die obige partielle Differentialgleichung liefert. Man erhält daher den Satz:

Bildet man behufs der Integration der partiellen Differentialgleichung $\Psi(x, y, p, q)=0$ das System gewöhnlicher Differentialgleichungen $dx:dy:dp:dq=\frac{\partial\Psi}{\partial p}:\frac{\partial\Psi}{\partial q}:-\frac{\partial\Psi}{\partial x}:-\frac{\partial\Psi}{\partial y}$ und findet ausser $\Psi=0$ noch ein Integral $F(x, y, p, q)=a$ desselben, so erhält man mit Hülfe von $\Psi=0$ und $F=a$ solche Functionen p und q von x und y, dass

$$z=\int(p\,dx+q\,dy)$$

als eine volständige Lösung der Gleichung $\Psi=0$ durch blosse Quadratur gefunden wird.

§. 14. Für die Bewegungsgleichungen eines Problems, für welches die Kräftefunction die Zeit nicht explicit enthält, kann man, wenn blos zwei Variabele q_1, q_2 vorkommen, schreiben:

$$dq_1:dq_2:dp_1:dp_2=\frac{\partial H}{\partial p_1}:\frac{\partial H}{\partial p_2}:-\frac{\partial H}{\partial q_1}:-\frac{\partial H}{\partial q_2}$$

und für sie besteht die partielle Differentialgleichung

$$\alpha+H=0,\quad H=T-U,$$

wenn darin $p_1=\frac{\partial W}{\partial q_1}$, $p_2=\frac{\partial W}{\partial q_2}$ gesetzt wird. Von dieser Gleichung wird nun eine vollständige Lösung W gefordert mit zwei Constanten a und α und dann sind

$$\frac{\partial W}{\partial a}=b,\quad \frac{\partial W}{\partial\alpha}=\tau-t$$

Integrale der Bewegungsgleichungen. Hat man daher als zweites Integral des Systems derselben ausser $\alpha+H=0$ noch die Gleichung $F(q_1, q_2, p_1, p_2)=a$ gefunden, so ist

$$W=\int(p_1\,dq_1+p_2\,dq_2),$$

indem an die Stelle der Grössen x, y, p, q, ψ, z hier $q_1, q_2, p_1, p_2, \alpha+H, W$ treten. Es sind dabei also

$$\frac{\partial W}{\partial a}=\int\left(\frac{\partial p_1}{\partial a}dq_1+\frac{\partial p_2}{\partial a}dq_2\right)=b,\quad \frac{\partial W}{\partial\alpha}=\int\left(\frac{\partial p_1}{\partial\alpha}dq_1+\frac{\partial p_2}{\partial\alpha}dq_2\right)=\tau-t.$$

Auch kann man der obigen Proportion, welche die Bewegungsgleichungen ausdrückt, links dt und rechts 1 zufügen. Man hat daher den folgenden, zuerst von Jacobi 1836 aufgestellten Satz:

Wenn ein Problem der Mechanik blos von zwei Variabelen q_1, q_2 abhängt, wenn für dasselbe eine Kräftefunction U existirt, welche die Zeit nicht explicit enthält und man von dem System der Bewegungsgleichungen, nämlich

$$dt:dq_1:dq_2:dp_1:dp_2=1:\frac{\partial H}{\partial p_1}:\frac{\partial H}{\partial p_2}:-\frac{\partial H}{\partial q_1}:-\frac{\partial H}{\partial q_2},\quad H=T-U$$

noch ein Integral $F(q_1, q_2, p_1, p_2)=a$ kennt, wo $p_1=\frac{\partial T}{\partial q_1'}$, $p_2=\frac{\partial T}{\partial q_2'}$,

so bestimmen die Gleichungen $\alpha + H = 0$ und $F(q_1, q_2, p_1, p_2) = a$ die Grössen p_1, p_2 als Functionen von q_1, q_2, a und α so, dass die beiden übrigen Integrale der Bewegungsgleichungen sind:

$$\int\left(\frac{\partial p_1}{\partial a}\,dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a}\,dq_2\right) = b, \qquad \int\left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\,dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha}\,dq_2\right) = \tau - t,$$

welche mit $\alpha + H = 0$, $F = a$ zusammen die vollständige Integration des Gleichungssystems darstellen. (Vergl. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, S. 175.)

§. 15. Für die freie Bewegung eines Punktes in der Ebene sind $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}$ die Bewegungsgleichungen und ist $T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)$. Kennt man also ausser $\alpha + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - U = 0$ noch ein Integral $F(x, y, x', y') = a$, so sind

$$\int\left(\frac{\partial x'}{\partial a}\,dx + \frac{\partial y'}{\partial a}\,dy\right) = b, \qquad \int\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}\,dx + \frac{\partial y'}{\partial \alpha}\,dy\right) = \tau - t$$

die Integralgleichungen des Problems, erstere die Gleichung der Bahn, während durch letztere die Zeit eingeführt wird.

Ein anderes hierher gehöriges Problem ist die Bewegung eines Punktes auf einer krummen Fläche. Vgl. Jacobi, Dynamik, S. 176; Padova, *Applicazione del metodo di Hamilton al moto di un punto sopra una superficie* (Battaglini, *Giornale di matematiche*, T. VIII, p. 90 [1870]). Ott, ein Problem der analytischen Mechanik (Bewegung eines Punktes auf der Oberfläche eines ihn nach dem Newton'sche Gesetze anziehenden homogenen Rotationsellipsoids). Vierteljahrsschrift der naturf. Gesellsch. in Zürich. 18. Jahrg. (1873), Heft 1, S. 1—51. Desgl. Schleiermacher, über die Bewegung eines schweren Punktes auf dem verlängerten Rotationsellipsoid und ultraelliptische Integrale dritter Gattung (Dissert. Erlangen).

Das Ziel unseres Buches gestattet uns nicht, die Theorien dieses Capitels ausführlicher zu geben und verweisen wir daher auf Jacobi's Vorlesungen. Doch wollen wir von der übrigen massgebenden Literatur den bereits citirten Schriften noch folgende zufügen:

Poisson, *Remarques sur l'intégration des équations differentielles de la Dynamique. Comptes r.* IV (1837), p. 631—632 und Liouville, *Journ. de Mathém.* II (1837), pp. 317—336.

Bertrand, *Mémoire sur les théorèmes généraux en Mécanique. Compt. r.* XXXII (1851), p. 709—710. — *Mém. sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique* (1851). Liouville, *Journ.* XVII (1852), pp. 121—174. — *Note sur l'intégration des équations différent.* Liouville, *Journ.* XVII (1852), p. 175—176. — *Mém. sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique.* Liouville, *Journ.* XVII (1852), pp. 393—436 und *Comptes r.* XXXIV (1852), pp. 636—639. — *Sur un nouveau théorème de Mécanique analytique. Comptes r.* XXXV (1852), pp. 698—99.

Bour, *Mém. sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique analytique. Comptes r.* XL (1855), pp. 524—526. — *Sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique analytique avec Note de* M. Liouville. Liouville, *Journ.* XX (1855), pp. 185—202 und *Mém des Sav. étr.* XIV (1856), pp. 792—812. — *Sur l'intégration des équations différentielles partielles du* 1. *et du* 2. *ordre.*

Comptes r. LIV (1862), pp. 439—444; 549—554; 588—593; 645—55 und *Journ. de l'école polyt.* XXII (1862), *Cah.* 39, p. 149—191.

Minding, *Disquisitio de formae, in quam geometra britannicus Hamilton integralia mechanices analyticae redegit, origine genuina. Dorpati Liviorum*, 1864. 4° (18 pp.).

Watson a. Burbury, *A Treatise on the application of generalized coordinates to the kinetics of a material system. Oxford* 1879. (104 pp.).

Graindorge, *Mémoire sur l'intégration des équations de la Mécanique. Bruxelles* 1871. (116 pp.)

Koppe, Der Jacobi'sche Multiplicator für die Differentialgleichungen der Mechanik bei Existenz einer auch von den ersten Dirivirten nach der Zeit abhängenden Kräftefunction. (Dissert. Jena 1879.) 43 S. 8°.

Serret, *Mém. sur le principe de la moindre action. Bullet. des Sc. math. et astron. p. Darboux*, T. II (1871).

VIII. Capitel.

Ball's Kinetik der Dynamen am unveränderlichen System.

§. 1. Wir wollen in diesem Capitel eine kurze Darstellung der kinetischen Theorie von Ball geben, welche sich an die im III. Th., Cap. X, S. 211 ffg. entwickelten statischen Lehren desselben anschliesst. Das Mittelglied zwischen beiden bildet die Darstellung von Axenparametern, Windungen und Dynamen durch ein eigenthümliches System von Coordinaten, wovon wir zunächst reden wollen.

Es seien α, β, γ, δ, ε, ζ, η sieben gegebene Axen mit gegebenen Parametern p_α, p_β, ... p_η und suche man die Axe ψ mit dem Parameter p_ψ, welche reciprocal ist zu den 5 Axen γ, δ, ε, ζ, η. Sind nun die 7 Axen die Axen von 7 Dynamen, welche auf ein unveränderliches System wirken, welches blos um ψ eine Windung erleiden kann, so tilgen die Widerstände jede Dyname um eine zu ψ reciprocale Axe. Daher werden die 5 Dynamen um γ, δ, ε, ζ, η getilgt und bleiben blos noch die Dynamen um α, β wirksam. Construirt man nun das Cylindroid (α, β) und sucht auf ihm die Axe ϱ mit dem Parameter p_ϱ, welche reciprocal ist zu ψ, so kann man das Verhältniss der Intensitäten R_α, R_β der Dynamen um α, β so bestimmen, dass sie einer Dyname um ϱ mit dem Parameter p_ϱ äquivalent werden. Sie halten daher Gleichgewicht mit den Dynamen um γ, δ, ... η. In derselben Weise bestimmt man das Verhältniss der Intensitäten jedes anderen Dynamenpaares von α, β, ... ζ, η, sodass Gleichgewicht eintritt. Man erkennt hieraus, dass man um 7 gegebene Axen mit gegebenen Parametern immer 7 Dynamen finden kann, welche im Gleichgewicht sind. Ebenso ergibt sich, dass für 7 solche Axen immer 7 Windungsgeschwindigkeiten möglich sind, welche äquivalent Null sind. Hieraus folgt weiter, dass jede gegebene Dyname oder Windung um irgend eine Axe in sechs andere Dynamen oder Windungen um sechs gegebene Axen mit gegebenen Parametern zerlegt werden kann, welche der gegebenen Dyname oder Windung zusammen äquivalent sind. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung von III. Th., Cap. III, §. 10 (S. 45).

§. 2. Um eine gegebene Dyname um die Axe ϱ vom Parameter p_ϱ und der Intensität P in sechs Dynamen um die Axen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_6$ mit den Parametern $p_1, p_2, \ldots p_6$ aufzulösen, seien $P_1, P_2, \ldots P_6$ die Intensitäten der Componenten. Man wähle irgend eine Windung um eine Axe η. Dann muss die Arbeit der Dyname um ϱ gleich sein der Summe der Arbeiten ihrer sechs Componenten und mithin, wenn $\varpi_{\mu\eta_1}, \varpi_{\eta\mu_2}, \ldots \varpi_{\eta\mu_6}\varpi_{\eta\varrho}$ die virtuellen Coefficienten bezeichnen

$$P\varpi_{\eta\varrho} = P_1\varpi_{\eta\mu_1} + P_2\varpi_{\eta\mu_2} + \cdots + P_6\varpi_{\eta\mu_6}$$

sein. Indem man fünf andere Axen der Reihe nach an die Stelle von η treten lässt, erhält man im Ganzen 6 Gleichungen, welche die Intensitäten $P_1, P_2, \ldots P_6$ und damit die 6 Componenten der gegebenen Dyname bestimmen. Eine Vereinfachung tritt ein, wenn man η reciprocal zu $\mu_2, \mu_3, \ldots \mu_6$ wählt. Dann werden $\varpi_{\eta\mu_2} = \varpi_{\eta\mu_3} = \cdots \varpi_{\eta\mu_6} = 0$ und erhält man $P\varpi_{\eta\varrho} = P_1\varpi_{\eta\mu_1}$ nebst fünf ähnlichen Gleichungen, indem man fünf andere Axen für η wählt.

Ebenso ergeben sich die 6 Componenten einer Windungsgeschwindigkeit $(\omega, p_\varrho\omega)$ um eine Axe ϱ vom Paremeter ϱ in Bezug auf 6 gegebene Axen mit gegebenen Parametern.

Die Intensität P der resultirenden Dyname (oder Windungsgeschwindigkeit) kann durch die Intensitäten der Componenten dargestellt werden. Wählt man nämlich der Reihe nach für η die Axen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_6$ selbst und bedenkt, dass für zwei zusammenfallende Axen der virtuelle Coefficient in den doppelten gemeinschaftlichen Parameter übergeht, so erhält man

$$P\varpi_{\mu_1\varrho} = P_1p_1 + P_2\varpi_{\mu_1\mu_2} + \cdots + P_6\varpi_{\mu_1 6},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P\varpi_{\mu_6\varrho} = P_1\varpi_{\mu_6\mu_1} + P_2\varpi_{\mu_6\mu_2} + \cdots + P_6p_6$$

und wenn man ϱ selbst an die Stelle von η treten lässt

$$Pp_\varrho = P_1\varpi_{\mu_1\varrho} + P_2\varpi_{\mu_2\varrho} + \cdots + P_6\varpi_{\mu_6\varrho}.$$

Indem man $\varpi_{\mu_1\varrho}, \varpi_{\mu_2\varrho}, \ldots \varpi_{\mu_6\varrho}$ eliminirt, ergibt sich

$$p_\varrho P^2 = \Sigma(p_iP_i^2) + 2\Sigma(P_iP_\varkappa\varpi_{\mu_i\mu_\varkappa}).$$

§. 3. Man kann die 6 Axen $\mu_1, \ldots \mu_6$ insbesondere so wählen, dass μ_1 beliebig, μ_2 reciprocal zu μ_1, μ_3 reciprocal zu μ_1, μ_2; μ_4 reciprocal zu μ_1, μ_2, μ_3; μ_5 reciprocal zu $\mu_1, \ldots \mu_4$ und μ_6 reciprocal zu $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_5$ wird. Dann sind je zwei dieser Axen reciprocal. Sechs solche Axen sollen ein System coreciprocaler Axen heissen. Da jeder Axenparameter 5 Grössen zu seiner Bestimmung verlangt, so sind 30 Grössen für die Bestimmung der 6 Axen erforderlich. Sollen je zwei Axen reciprocal sein, so sind $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15$ Bedingungen zu erfüllen. In einem System coreciprocaler Axen sind also nur 15 Grössen disponibel. Da für coreciprocale Axen $\varpi_{\mu_i\mu_\varkappa} = 0$ ist, so nimmt die letzte Formel des vorigen Paragraphen die Form an:

$$p_\varrho P^2 = p_1P_1^2 + p_2P_2^2 + \cdots + p_6P_6^2.$$

Die Intensitäten von den 6 Componenten einer Dyname oder die Winkelgeschwindigkeiten der 6 Componenten einer Windungsgeschwindigkeit in Bezug auf ein System von 6 reciprocalen Axen sollen die Coordinaten der Dyname oder Windungsgeschwindigkeit und die 6 Axen mit den bestimmten Axenparametern die Coordinatenaxen heissen.

Die Elementararbeit einer Dyname von der Intensität P in Bezug auf eine Elementarwindung von der Amplitude $d\vartheta$ kann mit Hülfe der Coordinaten P_1, P_2, ... P_6 der Dyname und $d\vartheta_1$, $d\vartheta_2$, ... $d\vartheta_6$ der Elementarwindung dargestellt werden. Diese Arbeit besteht aus 36 Gliedern, welche man erhält, indem man jedes P mit jedem $d\vartheta$ combinirt. Da aber die Coordinatenaxen coreciprocal sind, so verschwinden 30 Glieder und bleiben nur die 6 Glieder übrig, für welche P und $d\vartheta$ derselben Coordinatenaxe angehören. Für sie wird der virtuelle Coefficient gleich dem doppelten Parameter der Coordinatenaxe und daher die ganze Arbeit gleich

$$2p_1P_1d\vartheta_1 + 2p_2P_2d\vartheta_2 + \ldots + 2p_6P_6d\vartheta_6.$$

§. 4. Die 6 Coordinaten α_1, α_2, ... α_6 einer Dyname um die Axe α von der Intensität gleich der Einheit heissen die Coordinaten des Axenparameters p_α (oder der Schraube α). Da die Intensität 1 die Schlusslinie eines Polygrons ist, gebildet aus α_1, ... α_6, so besteht zwischen diesen Grössen eine Bedingung.

Um die Coordinaten des Axenparameters p_α zu bestimmen, bestimmen wir die Arbeit der Einheitsdyname um α in Bezug auf eine Amplitude $d\vartheta_i$ um μ_i; sie ist $2\,d\vartheta_i\varpi_{\alpha\mu_i}$. Da die Coordinatenaxen coreciprocal sind, so ist sie gleich der Arbeit der Componente um μ_i in Bezug auf dieselbe Amplitude $d\vartheta_i$ um μ_i nämlich gleich $2p_i\alpha_i d\vartheta_i$. Aus der Gleichung $2\,d\vartheta_i\varpi_{\alpha\mu_i} = 2p_i\alpha_i d\vartheta_i$ folgt daher, unter Anwendung derselbe Betrachtung für alle Coordinaten

$$\alpha_1 = \frac{\varpi_{\alpha\mu_1}}{p_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\varpi_{\alpha\mu_2}}{p_2}, \quad \ldots \quad \alpha_6 = \frac{\varpi_{\alpha\mu_6}}{p_6}.$$

Bestimmt man also die virtuellen Coefficienten des Axenparameters p_α in Bezug auf die Coordinatenaxenparameter (welche von der Neigung der Axe α gegen die Coordinatenaxen ihren kürzesten Abständen von diesen und der Summe der Parameter abhängen), so ergeben sich die Coordinaten α_1, α_2, ... α_6 durch Division der virtuellen Coefficienten durch die Parameter der Coordinatenaxen.

Die Componenten einer Windung um die Axe α von der Amplitude $d\vartheta$ haben die Amplituden $\alpha_1 d\vartheta$, $\alpha_2 d\vartheta$, ... $\alpha_6 d\vartheta$; die Componenten einer Dyname von der Intensität P um die Axe β haben die Intensitäten $P\beta_1$, $P\beta_2$, ... $P\beta_6$. Daher ist nach §. 3 die Arbeit der Dyname während der Windung

$$Pd\vartheta\,[2p_1\alpha_1\beta_1 + 2p_2\alpha_2\beta_2 + \cdots 2p_6\alpha_6\beta_6].$$

Der Inhalt der Klammer ist daher der virtuelle Coefficient zwischen Dyname und Windung, nämlich $\varpi_{\alpha\beta} = \Sigma p_i\alpha_i\beta_i$.

Da der doppelte Axenparameter der virtuelle Coefficient zweier coincidirender Axen ist, so erhält man $p_\alpha = \varpi_{\alpha\alpha} = \Sigma p_i\alpha_i^2$.

§. 5. Für die folgenden Betrachtungen wählen wir die drei Hauptaxen SA, SB, SC des Massenmittelpunktes S, deren Trägheitsradien a, b, c seien, zu Coordinatenaxen, indem wir SA als zwei zusammenfallende Axen μ_1, μ_2 mit den Parametern $p_1 = a$, $p_2 = -a$; ebenso SB als μ_3, μ_4 mit den Parametern $p_3 = b$, $p_4 = -b$ und SC als μ_5, μ_6 mit den Parametern $p_5 = c$, $p_6 = -c$ ansehen. Nach S. 364 ertheilt eine Momentandyname $(P_1,\ P_1p_1)$ um μ_1 dem System, dessen Masse M sei, wenn es frei ist, eine Translationsgeschwindigkeit $P_1 : M$ parallel μ_1 und eine Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = P_1p_1 : Mp_1^2 = P_1 : Mp_1$ um

μ_1, sodass der Effect einer Momentandyname um eine Hauptaxe des Massenmittelpunktes eine Windungsgeschwindigkeit um dieselbe Hauptaxe ist.

Ein freies unveränderliches System besitze eine Windungsgeschwindigkeit um die Momentanaxe α von der Winkelgeschwindigkeit ω und dem Parameter p_α. Dieselbe kann durch eine gewisse Momentandyname um eine gewisse Axe η hervorgerufen werden. Sind die Coordinaten der ersteren gegeben, so können die Coordinaten der letzteren gefunden werden. Ist nämlich P die Intensität der Dyname, so zerlege man die Dyname in die Componenten $P\eta_1$, $P\eta_2$, ... $P\eta_6$ um μ_1, μ_2, ... μ_6. Diese geben die Winkelgeschwindigkeiten $P\eta_1 : Mp_1$, $P\eta_2 : Mp_2$, ... $P\eta_6 : Mp_6$ um die Coordinatenaxen, welche den Componenten $\omega\alpha_1$, $\omega\alpha_2$, ... $\omega\alpha_6$ von ω gleich sein müssen, woraus folgt:

$$M\omega p_1 \alpha_1 = P\eta_1, \; M\omega p_2 \alpha_2 = P\eta_2, \; \ldots \; M\omega p_6 \alpha_6 = P\eta_6,$$

d. h. sind die Coordinaten der Windungsgeschwindigkeit proportional α_1, α_2, ... α_6, so sind die Coordinaten der entsprechenden Momentandyname proportional $p_1\alpha_1$, $p_2\alpha_2$, ... $p_6\alpha_6$.

§. 6. Sind α, β zwei Momentanaxen und η, ξ die ihnen entsprechenden Momentandynamen und ist α reciprocal zu ξ, so ist β reciprocal zu η. Dieser Satz folgt für das freie System unmittelbar. Denn die Coordinaten von ξ sind proportional $p_1\beta_1$, $p_2\beta_2$, ... $p_6\beta_6$ und die Bedingung, dass α und ξ reciprocal sind, ist nach §. 4 $\varpi_{\alpha\xi} = p_1^2\alpha_1\beta_1 + p_2^2\alpha_2\beta_2 + \cdots + p_6^2\alpha_6\beta_6 = 0$. Sie drückt aber auch aus, dass β und η reciprocal sind. Zwei Axen α, β, für welche diese Bedingung erfüllt ist, heissen conjugirte Momentanaxen.

Dieser Satz gilt nicht blos für das freie System, sondern auch für das System, wenn es Freiheit irgend einer Stufe besitzt. Denn wenn auf das System eine Momentandyname P um die Axe ξ wirkt, so ist die Wirkung der Widerstände äquivalent einer Dyname Q um eine gewisse Axe ν. Durch Einführung dieser kann das System als ein freies betrachtet werden, auf welches eine Dyname wirkt, deren Componenten um die Coordinatenaxen die Intensitäten $P\xi_1 + Q\nu_1$, $P\xi_2 + Q\nu_2$, ... $P\xi_6 + Q\nu_6$ haben. Diese Grössen sind daher proportional $p_1\beta_1, p_2\beta_2, \ldots$ d. h. es ist $P\xi_1 + Q\nu_1 = \lambda p_1\beta_1$, $P\xi_2 + Q\nu_2 = \lambda p_2\beta_2$, ... $P\xi_6 + Q\nu_6 = \lambda p_6\beta_6$. Multiplicirt man diese Gleichungen mit $p_1\alpha_1$, $p_2\alpha_2$, ... $p_6\alpha_6$ und addirt sie, so folgt $P(p_1\alpha_1\xi_1 + p_2\alpha_2\xi_2 + \cdots) + Q(p_1\alpha_1\nu_1 + p_2\alpha_2\nu_2 + \cdots) = p_1^2\alpha_1\beta_1 + p_2^2\alpha_2\beta_2 + \cdots$ Nun ist α und ξ nach der Voraussetzung reciprocal, α und ν sind es aber, weil die Widerstände bei einer Windung um α keine Arbeit leisten. Daher wird $p_1^2\alpha_1\beta_1 + p_2^2\alpha_2\beta_2 + \cdots = 0$, wie für das freie System.

§. 7. Wenn das System frei ist, so gibt es zu jeder Momentanwindung um eine Axe nur eine Momentandyname, welche sie hervorruft. Ist das System aber in seiner Freiheit beschränkt, so gibt es eine Schaar von Momentandynamen, deren jede die Momentanwindung hervorzubringen vermag. Es habe das System Freiheit n. Stufe, erleide um eine Axe S eine Windung und sei X irgend eine Axe, um welche eine Momentandyname wirkend, diese Windung um S hervorzubringen vermag. Zu dem Axensystem n. Stufe, welchem S angehört, gibt es ein reciprocales von der Stufe $6 - n$ und es seien B_1, B_2, ... B_{6-n}, $6 - n$ Axen desselben. Dann bestimmen die Axen X, B_1, B_2, ... B_{6-n} ein Axensystem nächst höherer, $(7 - n)^{\text{ter}}$ Stufe. Jede diesem Axensystem angehörende Axe Y ist die Axe einer Momentandyname, welche die Windung um S hervorrufen kann. Denn man kann die Dyname um Y in $7 - n$ Dynamen um X; B_1, B_2, ... B_{6-n} zerlegen. Von den $7 - n$ Componenten

werden aber alle, bis auf die um X durch die Widerstände vernichtet. Daher ist die Dyname um Y äquivalent der Dyname um X und bringt daher auch dieselbe Wirkung, nämlich die Windung um S hervor.

Hat das System Freiheit 5. Stufe, so bringen Momentandynamen um die Axen eines Cylindroids Windungen um eine gegebene Axe hervor; hat es Freiheit 3. Stufe, so bilden alle Axen, um welche Dynamen wirkend das bewegliche Punktsystem um dieselbe Axe winden, das System aller zu einem bestimmten Cylindroid reciprocaler Axen.

In dem Axensystem Σ der n. Stufe, welches alle Axen enthält, um welche ein System von der n. Stufe der Freiheit Windungen erleiden kann, kann man auf verschiedene Arten n Axen wählen, sodass je zwei derselben conjugirte Axen sind. Es seien $B_1, B_2, \ldots B_{6-n}$ Axen des zu Σ reciprocalen Axensystems Σ'. Ist A_1 eine Axe von Σ, so hat man zur Bestimmung einer anderen Axe A desselben Systems, welche beliebig gewählt werden kann, $n-1$ willkürliche Constanten. Es sei J_1 die Axe einer Momentandyname, zu welcher A_1 die Momentanwindungsaxe ist. Wählt man nun weiter A_2 reciprocal zu $J_1, B_1, B_2, \ldots B_{6-n}$, so sind A_1 und A_2 conjugirt und für die Wahl von A_2 bleiben noch $n-2$ Constanten willkürlich. Es sei J_2 die Axe einer Momentandyname zu A_2 als Momentanwindungsaxe. Wählt man dann weiter A_3 reciprocal zu $J_1, J_2, B_1, B_2, \ldots B_{n-6}$ und setzt diesen Prozess fort bis zur n. Axe A_n, so erhält man n Axen $A_1, A_2, \ldots A_n$, von denen je zwei conjugirt sind. Die Anzahl aller für die Wahl dieser n Axen noch disponibelen Constanten ist $n-1+n-2+\cdots+1=\frac{1}{2}n(n-1)$, also halb so gross als die Anzahl $n(n-1)$ der Constanten, welche irgend n Axen von Σ bestimmen.

In dem Axensystem Σ der n. Stufe der Freiheit gibt es immer n Axen, sodass je zwei derselben conjugirt und zugleich reciprocal sind. Man kann nämlich die $\frac{1}{2}n(n-1)$ disponibelen Constanten der Wahl von n paarweise conjugirter Axen so bestimmen, dass diese Axen reciprocal werden. Zu dem Ende wähle man A_1 reciprocal zu $B_1, B_2, \ldots B_{6-n}$, wobei $n-1$ Constanten disponibel bleiben, dann A_2 reciprocal zu $A_1, B_1, \ldots B_{6-n}$ mit $n-2$ disponibelen Constanten u. s. f. Man erhält dann für die Anzahl der willkürlichen Constanten behufs der Wahl von n coreciprocalen Axen von Σ

$$n-1+n-2+\cdots+1=\tfrac{1}{2}n(n-1).$$

Die Bestimmung erschöpft also genau die Gesammtzahl aller überhaupt disponibelen Constanten.

In dem Axensystem Σ der n. Stufe der Freiheit gibt es nur n Axen der Art, dass eine Momentandyname um irgend eine derselben dem beweglichen System eine Windungsgeschwindigkeit um dieselbe Axe ertheilt (Hauptaxen der Momentandynamen und Momentanwindungen). Sie sind die n conjugirten und coreciprocalen Axen. Es genügt, den Beweis für $n=3$ zu führen, für jede andere Stufe der Freiheit ist er diesem ähnlich. Es seien A_1, A_2, A_3 die drei conjugirten und coreciprocalen Axen des Axensystems Σ der 3. Stufe, B_1, B_2, B_3 irgend drei Axen des reciprocalen Axensystems Σ' und R_1, R_2, R_3 die Axen von irgend drei Momentandynamen, welche um A_1, A_2, A_3 Momentanwindungen hervorrufen. Jede Momentandyname, deren Axe dem Axensystem R_1, B_1, B_2, B_3 angehört, windet das System um A_1 (vgl. den Beweis des 1. Satzes dieses Paragraphen). Die Axen dieses Systems sind aber reciprocal zu A_2 und A_3; denn da A_1 und A_2 conjugirt sind, ist R_1 reciprocal zu A_2 und ebenso ist R_1 reciprocal zu A_3, da A_1 und A_3 conjugirt sind.

Hieraus ergibt sich, dass eine Dyname, deren Axe reciprocal zu A_2 und A_3 ist, das System um A_1 windet. A_1 ist aber selbst reciprocal zu A_2 und A_3 und daher windet eine Dyname, deren Axe A_1 ist, das System um A_1 selbst. Ebenso für A_2 und A_3.

Für das freie System ($n = 6$) z. B. sind die drei Hauptaxen SA, SB, SC mit den doppelten Parametern a, $-a$, b, $-b$, c, $-c$ 6 Hauptaxen der Momentandynamen und Momentanwindungen.

Es fehlt nun noch der Nachweis, dass es ausser den n bezeichneten Hauptaxen der Dynamen und Windungen keine weiteren gibt. Denn es sei S irgend eine weitere Hauptaxe, sodass eine Dyname um dieselbe eine Windung um sie selbst hervorbringe; so zerlege man sie in n Dynamen um die Hauptaxen A_1, A_2, ... A_n und seien S_1, S_2, ... S_n die Intensitäten dieser Componenten. Diese Zerlegung muss möglich sein, da vermöge der Windung des Systems um S diese Axe dem Axensystem A_1, A_2, ... A_n angehört. Diese n Componenten rufen einzeln Windungsgeschwindigkeiten um A_1, A_2, ... A_n hervor, deren Winkelgeschwindigkeiten σ_1, σ_2, ... σ_n proportional den Intensitäten S_1, S_2, ... S_n sind und sich zu der Windungsgeschwindigkeit um S zusammensetzen lassen müssen. Hieraus folgt aber, dass jede Axe, welche dem Axensystem A_1, ... A_n angehört, eine Hauptaxe sein müsste, was nicht allgemein der Fall ist. Ist nämlich X eine Axe mit einer Dyname und Y die ihr entsprechende Momentanwindungsaxe, so erzeugen die Componenten von X in Bezug auf A_1, ... A_n, deren Intensitäten X_1, ... X_n seien, Windungsgeschwindigkeiten um A_1, ... A_n gleich $\frac{X_1}{S_1}\sigma_1$, $\frac{X_2}{S_2}\sigma_2$, ... $\frac{X_n}{S_n}\sigma_n$ und diese müssten gleich den Componenten der Windungsgeschwindigkeit um Y sein. Da aber die Verhältnisse $\frac{X_1}{S_1}$, $\frac{X_2}{S_2}$ ... $\frac{X_n}{S_n}$ einander gleich sind, so müssten die Winkelgeschwindigkeiten der Componenten der Windungsgeschwindigkeit um Y um A_1, ... A_n proportional sein den Intensitäten X_1, X_2, ... X_n der Dyname um X. Da aber Windungsgeschwindigkeiten und Dynamen dieselben Gesetze der Zusammensetzung befolgen, so müssten Y und X identische Axen, d. h. X müsste eine Hauptaxe sein.

§. 8. Die Windungsgeschwindigkeit eines Systems mit Freiheit n. Stufe kann zerlegt werden in n Componenten um n Axen des Axensystems n. Stufe, welches der Freiheit angehört. **Sind diese Axen conjugirte Axen, so ist die kinetische Energie (halbe lebendige Kraft) des Systems die Summe von n quadratischen Gliedern.**

Es wirke eine Momentandyname auf das System und erzeuge um eine Axe α eine Windungsgeschwindigkeit, in Folge deren das System die kinetische Energie E_α erlangt. Ertheilt ihm nun eine zweite Dyname, deren Axe ν sei, ein Windungsgeschwindigkeit um die Axe β und ist E_β die kinetische Energie, welche es dadurch erlangen würde, wenn es vorher keine Windung besässe, so wird die kinetische Energie, welche durch die gleichzeitige Wirkung beider Dynamen hervorgerufen wird, von E_α und E_β abhängen. Die Art dieser Abhängigkeit ist je nach der gegenseitigen Lage der Axen verschieden. Im Allgemeinen wird, während das System um β eine Windung erleidet, die Dyname um ν in Bezug auf die Windung um α noch eine Arbeit leisten. Nur dann, wenn diese Arbeit Null ist, also die Axen α und ν reciprocal und folglich α und β conjugirte Axen sind, wird die Energie E_β nicht durch E_α modificirt und ergibt sich $E_\alpha + E_\beta$ als die von beiden Dynamen zusammen erzeugte Energie des Systems. Wirken ebenso

noch weitere Dynamen und bilden die Momentanaxen aller ein System conjugirter Axen, so gilt der Satz in erweiterter Form und ist $E_\alpha + E_\beta + \cdots$ die gesammte kinetische Energie, welche durch eine Reihe von Windungen um conjugirte Axen α, β, ... erzeugt wird.

Um die kinetische Energie, entsprechend einer Windungsgeschwindigkeit (ω, $p\omega$) um die Axe α durch die Coordinaten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_6$ des Axenparameters p_α in Bezug auf die Hauptaxen darzustellen, bedenken wir, dass die Componente der Translationsgeschwindigkeit parallel der Coordinatenaxe α_i gleich $\omega p_i \alpha_i$ ist und also den Bestandtheil $\frac{1}{2} M\omega^2 p_i^2 \alpha_i^2$, die Componente der Winkelgeschwindigkeit um α_i aber, nämlich $\omega\alpha_i$ den Bestandtheil $\frac{1}{2}\omega^2\alpha_i^2 M\varkappa^2$ liefert. Der Parameter p_i ist aber der Trägheitsradius $\varkappa$ von α_i. Denn ist P die Intensität der zu α_i gehörigen Dyname und $\varkappa$ der Trägheitsradius, so muss $p_i\omega\alpha_i = P : M$ und $\omega\alpha_i = p_i P_i : M\varkappa^2$ sein, woraus $\varkappa = p_i$ folgt. Daher ist das Trägheitsmoment Mp_i^2, sodass dieser letztere Bestandtheil gleichfalls in $\frac{1}{2}\omega^2 p_i^2 \alpha_i^2$ übergeht. Daher ist die kinetische Energie der Windung um α_i überhaupt gleich $M\omega^2 p_i^2 \alpha_i^2$. Dem obigen Satze zufolge ist daher die der Windung um die Axe α entsprechende kinetische Energie des Systems

$$M\omega^2 (p_1^2\alpha_1^2 + p_2^2\alpha_2^2 + \cdots p_6^2\alpha_6^2) = M\omega^2 u_\alpha^2,$$

wenn $u_\alpha^2 = p_1^2\alpha_1^2 + p_2^2\alpha_2^2 + \cdots p_6^2\alpha_6^2$ gesetzt wird.

Ist das System nicht frei, sondern nur windbar um eine Axe α (Parameter p_α), so ertheilt ihm eine Momentandyname von der Intensität P, deren Axe η ist, um α eine Windungsgeschwindigkeit ω, welche leicht zu bestimmen ist. Denn der Momentanwiderstand ist äquivalent einer Momentandyname von der Intensität Q um eine gewisse Axe ν. Durch Einführung derselben wird das System frei. Die Componente um die Coordinatenaxe μ_i, welche von beiden Dynamen zusammen herrührt, hat die Intensität $P\eta_i + Q\nu_i$ und ertheilt dem System parallel μ_i die Translationsgeschwindigkeit $(P\eta_i + Q\nu_i) : M$, sowie die Winkelgeschwindigkeit $(P\eta_i + Q\nu_i) : Mp_i$. Die Winkelgeschwindigkeit um α hat aber um μ_i die Componenten $\omega\alpha_i$ und besteht daher die Gleichung

$$\omega\alpha_i = \frac{P\eta_i + Q\nu_i}{Mp_i}.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $p_i^2\alpha_i$ und summirt nach i, so erhält man

$$\Sigma\omega p_i^2\alpha_i^2 = \omega u_\alpha^2 = \frac{P}{M}\Sigma p_i\alpha_i\eta_i + \frac{Q}{M}\Sigma p_i\alpha_i\nu_i = \frac{P}{M}\varpi_{\alpha\eta}$$

da $\Sigma p_i\alpha_i\nu_i = \varpi_{\alpha\nu} = 0$ ist, weil α und ν reciprocal sind. Hierdurch ist ω bestimmt. Es ist direkt proportional dem virtuellen Coefficienten $\varpi_{\alpha\eta}$ und umgekehrt proportional u_α^2. Die kinetische Energie des Systems folgt hieraus, nämlich

$$M\omega^2 u_\alpha^2 = \frac{P^2}{M}\frac{\varpi_{\eta\alpha}^2}{u_\alpha^2}.$$

Wenn das System sich frei um die Axe α drehen würde in Folge der Dyname um η, so würde von den Componenten $P\eta_i$ die kinetische Energie

$$\omega^2\alpha_i^2 Mp_i^2 = \frac{P^2\eta_i^2}{M}$$

und also die Gesammtenergie $\frac{P^2}{M}\Sigma\eta_i^2$ ertheilt werden. Die Differenz zwischen dieser und der, dem in der Bewegung auf die Axe α beschränkten System ertheilten Energie ergibt daher den Energieverlust

$$\frac{P^2}{M}\left[\Sigma\eta_i^2 - \frac{(\Sigma p_i\alpha_i\eta_i)^2}{u_\alpha^2}\right] = \frac{P^2}{M u_\alpha^2}\left[u_\alpha^2\Sigma\eta_i^2 - (\Sigma p_i\alpha_i\eta_i)^2\right].$$

§. 9. Wir haben bisher für eine Dyname oder Windungsgeschwindigkeit 6 Coordinaten angewandt. Für ein System, welches Freiheit n. Stufe besitzt, genügen aber n Coordinaten. Es wurde nämlich gezeigt, dass es stets möglich ist, in dem Axensystem der n. Stufe n Axen zu bestimmen, von denen jede zu den übrigen reciprocal ist. Wählt man n solche coreciprocale Axen unter die Coordinatenaxen, so werden von den 6 Coordinaten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_6$ einer Axe α $6-n$ gleich Null. Da nämlich eine Dyname von der Intensität 1 um eine Axe α, welche dem Axensystem n. Stufe angehört, in n Componenten von den Intensitäten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ um n coreciprocale Axen dieses Axensystems zerlegt werden kann, so genügen diese n Grössen als Coordinaten für die vollständige Bestimmung der Dyname. Der Parameter von α ist dann $p_1\alpha_1^2 + \cdots + p_n\alpha_n^2$ und der virtuelle Coefficient zweier Axen α, β wird $2(p\alpha_1\beta_1 + \cdots + p_n\alpha_n\beta_n)$. Um eine Axe des Axensystems n. Stufe zu finden, welche zu $n-1$ Axen desselben Axensystems reciprocal ist, wähle man $6-n$ Axen des reciprocalen Axensystems, dann ist die gesuchte Axe zu $6-n+n-1=5$ bekannten Axen reciprocal, also bestimmt, da es zu 5 Axen nur eine reciprocale gibt.

Eine Dyname, welche auf ein System mit Freiheit n. Stufe wirkt, ist immer äquivalent einer gewissen Dyname um eine Axe, welche dem Axensystem n. Stufe angehört. Denn man wähle n Axen des Axensystems und $6-n$ Axen des zu ihm reciprocalen Axensystems. Zerlegt man die gegebene Dyname in Componenten um diese 6 Axen, so werden die $6-n$ Componenten um die letzteren Axen durch die Widerstände des Systems getilgt, während die n ersteren sich zu einer Dyname um eine Axe des Axensystems n. Stufe zusammensetzen. Diese Dyname heisst die reducirte Dyname der gegebenen.

Wählen wir zu Coordinatenaxen die n Hauptaxen und sind $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ die Coordinaten einer reducirten Dyname in Bezug auf sie, sowie $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ die der entsprechenden Winkelgeschwindigkeit, sowie $u_1, u_2, \ldots u_n$ die entsprechenden Werthe der Grösse u für die Axen, so ist nach §. 8, weil die Dynamen um die Hauptaxen selbst winden, also die virtuellen Coefficienten gleich den doppelten Parametern werden

$$\omega_i u_i^2 = \frac{\eta_i p_i}{M} \text{ und also } \eta_i = \frac{M u_i^2}{p_i}\omega_i,$$

d. h. die Coordinaten der reducirten Dyname werden proportional den Grössen $\frac{u_1^2}{p_1}\omega_1, \frac{u_2^2}{p_2}\omega_2, \ldots \frac{u_n^2}{p_n}\omega_n$.

§. 10. Wir wollen jetzt annehmen, das bewegliche System von der n. Stufe der Freiheit sei einem System continuirlicher Kräfte unterworfen, für welches das Princip der Erhaltung der Energie gilt. Das Kräftesystem ist zu jeder Zeit einer Dyname äquivalent, welche wir zum Unterschied von den bisherigen Momentandynamen eine continuirlich wirkende Dyname nennen. Das be-

wegliche Punktsystem befinde sich in einer Lage Σ stabilen Gleichgewichtes und besitze eine Windungsgeschwindigkeit um eine Axe, vermöge welcher es in eine unendlich nahe Lage Σ' übergeführt wird. Die unendlichkleine Amplitude der Elementarwindung sei ϑ. In der Lage Σ ist die Kräftefunction oder das Potential V ein Maximum, dessen Werth nach Cap. V, §. 11, S. 511 gleich Null angenommen werden kann, sodass V selbst für Bewegungen in der Nähe der Gleichgewichtslage negativ sein wird. Indem das System die Gleichgewichtslage verlässt, werden die Kräfte einer Dyname äquivalent, die wir durch ihre reducirte Dyname ersetzt denken, deren Axe η und deren Componente um n coreciprocale Coordinatenaxen die Intensitäten $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ haben, während $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_n$ die Componenten der Amplitude ϑ um dieselben Axen darstellen mögen. Der Werth von V wird eine Function von $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_n$ ohne Absolutglied sein, welche in eine Reihe nach Potenzen dieser Grössen entwickelt, mit den Gliedern zweiter Ordnung beginnt, indem die Glieder erster Ordnung vermöge des Maximums in der Lage Σ verschwinden. Sie und ihre Derivirten werden daher die Form haben

$$V_\vartheta = A_{11}\vartheta_1^2 + A_{22}\vartheta_2^2 + \cdots + A_{nn}\vartheta_n^2 + 2A_{12}\vartheta_1\vartheta_2 + 2A_{13}\vartheta_1\vartheta_3 + \cdots + \cdots,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta_i} = 2\left[A_{ii}\vartheta_i + A_{1i}\vartheta_1 + A_{2i}\vartheta_2 + \cdots + A_{ni}\vartheta_n\right].$$

Aus der Lage Σ' wird nun das System in eine weitere unendlichnahe Lage Σ'' gelangen und dabei wird die Dyname um η eine Elementararbeit leisten, welche durch die Abnahme $-\delta V_\vartheta$ des Potentials, d. h. durch

$$-\left(\frac{\partial V_\vartheta}{\partial \vartheta_1}\delta\vartheta_1 + \frac{\partial V_\vartheta}{\partial \vartheta_2}\delta\vartheta_2 + \cdots + \frac{\partial V_\vartheta}{\partial \vartheta_n}\delta\vartheta_n\right),$$

dargestellt wird. Dieselbe ist aber, da die Coordinatenaxen coreciprocal sind, gleich

$$2\eta_1 p_1 \delta\vartheta_1 + 2\eta_2 p_2 \delta\vartheta_2 + \cdots + 2\eta_n p_n \delta\vartheta_n.$$

Indem wir die Coefficienten beider Ausdrücke gleich setzen (denn die Gleichheit der Ausdrücke muss für verschiedene Lagen von Σ'' bestehen), erhalten wir die Coordinaten η_i der reducirten continuirlichen Dyname, nämlich

$$\eta_1 = -\frac{1}{2p_1}\frac{\partial V_\vartheta}{\partial \vartheta_1}, \quad \eta_2 = -\frac{1}{2p_2}\frac{\partial V_\vartheta}{\partial \vartheta_2}, \ldots \quad \eta_n = -\frac{1}{2p_n}\frac{\partial V_\vartheta}{\partial \vartheta_n}.$$

§. 11. Analog zu §. 6 ergibt sich, dass wenn einer Elementarwindung ϑ um die Axe (ϑ) eine continuirliche Dyname um eine Axe η und einer anderen Elementarwindung φ um eine Axe (φ) eine Dyname ζ entspricht und (ϑ) zu ζ reciprocal ist, dann auch (φ) zu η reciprocal sein muss. Zwei Axen (ϑ), (φ) von dieser Eigenschaft heissen in Bezug auf das Potential conjugirte Axen. Denn die Bedingung der Reciprocalität von (ϑ) und ζ ist

$$p_1\vartheta_1\zeta_1 + p_2\vartheta_2\zeta_2 + \cdots + p_n\vartheta_n\zeta_n = 0,$$

wenn ζ_i die Coordinaten von ζ sind. Es sind aber $\zeta_i = -\frac{1}{2p_i}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi_i}$, wenn φ_i die Coordinaten von φ sind und in V statt $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ die Werthe φ_1, φ_2 geschrieben werden. Hiermit wird die Bedingung der Reciprocalität

$$\vartheta_1\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi_1} + \vartheta_2\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi_2} + \cdots + \vartheta_n\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi_n} = 0,$$

welche aber, wenn man die Derivirten von V einsetzt in die, in Bezug auf $\vartheta_1, \vartheta_2 \ldots$

und φ_1, φ_2 symmetrische Form

$$A_{11}\vartheta_1\varphi_1 + \cdots + A_{nn}\vartheta_n\varphi_n + A_{12}(\vartheta_1\varphi_2 + \vartheta_2\varphi_1) + \cdots = 0$$

übergeht und ebenso erhalten wird, wenn man ausdrücken will, dass φ und η reciprocal seien.

Jeder Windungsaxe ϑ entspricht die Axe η einer continuirlichen Dyname. Man kann zeigen, dass es n Axen η gibt, welche mit den ihnen entsprechenden Axen ϑ zusummenfallen (Hauptaxen in Bezug auf das Potential). Denn es sei α eine solche Axe und P die Intensität der Dyname um sie, welche der Windung von der Amplitude σ um α entspricht, so ist nach §. 10

$$P_i = -\frac{1}{2p_i}\frac{\partial V_\sigma}{\partial \sigma_i}, \quad P_i = P\alpha_i, \quad \sigma_i = \sigma\alpha_i$$

und wenn man die Werthe von V_σ und dessen Differentialquotient nach σ_i einführt und hierauf $i = 1, 2, \ldots n$ setzt:

$$\alpha_1\left(A_{11} - \frac{P}{\sigma}p_1\right) + \alpha_2 A_{12} + \cdots + \alpha_n A_{1n} = 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\alpha_1 A_{n1} + \alpha_2 A_{n2} + \cdots + \alpha_n\left(A_{nn} + \frac{P}{\sigma}p_n\right) = 0.$$

Eliminirt man aus diesen n linearen Gleichungen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, so bleibt eine Gleichung n. Grades zur Bestimmung von $\frac{P}{\sigma}$ mit n reellen Wurzeln; zu jedem Wurzelwerthe ergeben sich aus den linearen Gleichungen die Verhältnisse der Coordinaten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ für eine bestimmte Axe und da zwischen diesen Coordinaten eine Relation besteht (s. §. 4) diese Coordinaten selbst. Man kann zeigen, dass diese Axen reciprocal sind (Ball, *theory of screws*, p. 69).

§. 12. Zu jeder Momentanwindungsaxe ϑ des Axensystems n. Stufe gehört eine Axe λ, um welche eine Momentandyname die Windung ϑ hervorbringt. Zu jeder Axe ϑ gehört aber auch eine Axe η, welche die Axe der reducirten continuirlichen Dyname ist, welcher das Kräftesystem nach der Windung ϑ äquivalent ist. Man kann zeigen, dass es n Axen η gibt, welche mit den ihnen correspondirenden Axen λ zusammenfallen (harmonische Axen). Denn in Bezug auf die n Hauptaxen der Momentandynamen und Windungen sind die Coordinaten der Momentandyname um λ, welche die Windung ϑ hervorzubringen vermag, nach §. 9, wenn h einen Proportionalitätsfactor bedeutet $h\frac{u_i^2}{p_i}\omega_i$, wo $\omega_i = \frac{d\vartheta_i}{dt}$ und wenn λ mit η zusammenfallen soll, so müssen n Gleichungen bestehen von der Form $h\frac{u_i^2}{p_i}\omega_i = -\frac{1}{2p_i}\frac{\partial V_\vartheta}{\partial \vartheta_i}$, oder da nach §. 9 die Coordinaten P_i der Dyname $P_i = M\frac{u_i^2}{p_i}\omega_i$, also $\frac{u_i^2}{p_i} = \frac{1}{M}\frac{P_i}{\omega_i} = \frac{1}{M}\frac{P}{\omega}$ ist, wenn man $-h\frac{P}{\omega} = Ms^2$ setzt und den Werth von V_ϑ einführt, die Gleichungen:

$$\vartheta_1(A_{11} - Ms^2u_1^2) + \vartheta_2 A_{12} + \cdots + \vartheta_n A_{1n} = 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\vartheta_1 A_{n1} + \vartheta_2 A_{n2} + \cdots + \vartheta_n(A_{nn} - Ms^2u_n^2) = 0.$$

Aus diesen folgt nach Elimination von $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_n$ eine Gleichung n. Grades

für s^2 mit n reellen Wurzeln und jeder derselben entspricht daher ein Paar zusammenfallende Axen λ und η. Ball zeigt (a. a. O. S. 75), dass jedes solche Paar conjugirte Axen der Momentandynamen und also conjugirte Axen in Bezug auf das Potential sind.

§. 13. Nach §. 8 ist die kinetische Energie, herrührend von der Bewegung um die Coordinatenaxe vom Index i gleich $M u_i^2 \omega_i^2$, also die gesammte kinetische Energie T des Systems

$$T = M(u_1^2 \omega_1^2 + u_2^2 \omega_2^2 + \cdots + u_n^2 \omega_n^2),$$

während die potentiale Energie V eine homogene Function 2. Grades von ϑ_1, $\vartheta_2, \ldots \vartheta_n$ ist. Die Bewegungsgleichungen von Lagrange, deren Zahl n ist, weil die Coordinaten, welche hier angewandt sind, die Bedingungen, welche die Bewegung beschränken, von selbst erfüllen, sind nämlich

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial \vartheta_i} = 0,$$

gehen mit Hülfe des Ausdruckes für T über in

$$2 M u_i^2 \frac{d^2 \vartheta_i}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta_i} = 0$$

und werden mit Hülfe des Werthes von V lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung. Um sie zu integriren kann man eine Function Ω der Zeit und n Constanten $f_1, f_2, \ldots f_n$ so finden, dass

$$\vartheta_1 = f_1 \Omega, \ \vartheta_2 = f_2 \Omega, \ \ldots \ \vartheta_n = f_n \Omega$$

wird. Die Bewegungsgleichungen werden nämlich

$$M u_1^2 f_1 \frac{d^2 \Omega}{dt^2} + (A_{11} f_1 + A_{12} f_2 + \cdots + A_{1n} f_n)\,\Omega = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M u_n^2 f_n \frac{d^2 \Omega}{dt^2} + (A_{n1} f_1 + A_{n2} f_2 + \cdots + A_{nn} f_n)\,\Omega = 0.$$

Bestimmt man $f_1, f_2, \ldots f_n$ und eine Grösse s so, dass

$$f_1 (A_{11} - M u_1^2 s^2) + f_2 A_{12} + \cdots + f_n A_{n1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_1 A_{n1} + f_2 A_{n2} + \cdots + f_n (A_{nn} - M u_n^2 s^2) = 0$$

wird, so reduciren sich die n Gleichungen auf die eine

$$\frac{d^2 \Omega}{dt^2} + s^2 \Omega = 0.$$

Das System der Hülfsgleichungen, welches zur Bestimmung der Constanten f und s dient, ist das System, welches die n harmonischen Axen liefert und die Constanten $f_1, f_2, \ldots f_n$, welche einem der n Werthe von s entsprechen, sind die Coordinaten der diesem Werthe entsprechenden Axe. Die Integration der Differentialgleichung für Ω gibt

$$\Omega = H \sin(st + c).$$

Hieraus folgt sodann, wenn $H_1, \ldots H_n$, $c_1, \ldots c_n$ willkürliche Constanten und f_{pq} die Werthe von f_q sind, welche der Wurzel s_p^2 entsprechen, nach der Theorie der linearen Differentialgleichungen

$$\vartheta_1 = f_{11} H_1 \sin(s_1 t + c_1) + \cdots + f_{n1} H_n \sin(s_n t + c_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\vartheta_n = f_{1n} H_1 \sin(s_1 t + c_1) + \cdots + f_{nn} H_n \sin(s_n t + c_n),$$

wovon man sich auch hinterher überzeugen kann, indem diese Ausdrücke der Bewegungsgleichungen genügen und die genügende Anzahl $2n$ willkürlicher Constanten enthalten.

Die hier in Kürze mitgetheilte Ball'sche Theorie gibt die kleinen Schwingungen eines Systems n. Stufe der Freiheit um eine stabile Gleichgewichtslage. Die Constanten werden durch den Anfangszustand bestimmt. Man wird die anfängliche Windungsgeschwindigkeit in n Componenten um die Hauptaxen auflösen. Ist der Anfangszustand so beschaffen, dass $H_2 = H_3 = \cdots H_n = 0$, also $\vartheta_1 = f_{11} H_1 \sin(s_1 t + c), \ldots \vartheta_n = f_{1n} H_1 \sin(s_1 t + c)$, so werden die Coordinaten des Systems proportional $f_{11}, f_{12}, \ldots f_{1n}$, d. h. das System oscillirt dann um die harmonische Axe, deren Coordinaten dies sind.

Wir dürfen den tiefen Forschungen Ball's auf dem Gebiete der Mechanik, von welchen wir hier einen kurzen Abriss geben, nicht weiter folgen, sondern müssen auf sein Werk selbst verweisen. Er hat seine Theorie für alle Grade der Freiheit im Speciellen durchgeführt und eine Menge neuer Sätze und fruchtbarer Methoden gelehrt, welche eine wichtige Parthie der Mechanik, die Kinetik des unveränderlichen, bestimmten Beschränkungen seiner Beweglichkeit unterworfenen Systems zu einem lange ersehnten Abschlusse hinzuführen geeignet sind. In Bezug auf den Zusammenhang seiner Lehren mit der Theorie der Liniencomplexe verdankt er Klein's Untersuchungen über Liniencomplexe manche Hilfe. Es ist zu hoffen, dass die sich allmälig ausbildende rein geometrische Theorie der Complexe den hier vorgetragenen Lehren noch einen erhöhten Grad der Anschaulichkeit verleihen werde.

IX. Capitel.

Einige Probleme der Bewegung veränderlicher Systeme.

§. 1. Bewegung eines biegsamen und dehnbaren homogenen Fadens (Problem der schwingenden Saiten). Ein biegsamer und dehnbarer Faden von der Länge l sei zwischen zwei festen Punkten A, B gespannt. Zur Zeit $t = 0$ sei er um ein Weniges aus der Gleichgewichtslage entfernt, sei ihm ein bestimmter Geschwindigkeitszustand ertheilt und mögen auf ihn continuirliche Kräfte P wirken. Es sollen die Gleichungen seiner Bewegung aufgestellt und näherungsweise integrirt werden.

1. Wir nehmen die Gerade AB zur x-Axe, zwei andere zu ihr und unter einander senkrechte Axen des Punktes A zur y- und z-Axe. Die anfängliche Spannung des Fadens, ohne dass die Kräfte P wirken, sei in allen Punkten gleich τ. Die Gerade AB ist nicht die Gleichgewichtslage, um welche der Faden schwingen wird, sie ist die Gestalt des Fadens, welche er annehmen würde, wenn blos die Spannung τ wirkte. Ein Punkt N dieser Linie wird zur Zeit $t = 0$ die Lage M_0, zur Zeit t die Lage M haben. Ist $AN = x$, so seien $x + u$, y, z die Coordinaten von M, entsprechend der Zeit t, sodass u, y, z die Verschiebungen des Punktes

N darstellen. An dem Punkte M, in welchem man sich das Bogenelement MM' verschwindend zu denken hat, wirkt nun die gegebene Kraft, welche wir auf die Masse ε der Längeneinheit beziehen, sodass $X\varepsilon\partial s$, $Y\varepsilon\partial s$, $Z\varepsilon\partial s$ ihre an M in Betracht kommenden Componenten sind; ferner die Spannungen T, $T + \partial T$ längs den beiden an M anstossenden Elementen, deren Componenten $T_x + \partial T_x$, $T_y + \partial T_y$, $T_z + \partial T_z$ im Sinne des wachsenden Bogens und $-T_x$, $-T_y$, $-T_z$ im entgegengesetzten Sinne sind.

Diese Componenten beziehen sich auf die Zeit t und ∂T_x, ∂T_y, ∂T_z, ∂s sind Aenderungen, welche man zu derselben Zeit beim Uebergange vom Punkte N zum Punkte N' erhält, wobei sich x allein ändert; es sind partielle Aenderungen nach x. Diese Spannungscomponenten liefern mit denen der äussern Kraft zusammen $\partial T_x + X\varepsilon\partial s$, $\partial T_y + Y\varepsilon\partial s$, $\partial T_z + Z\varepsilon\partial s$, welche mit den Reactionskräften am Punkte M Gleichgewicht halten. Die Beschleunigungscomponenten des Punktes $M(x+u, y, z)$ zur Zeit t sind die zweiten Derivirten seiner Coordinaten nach der Zeit. Daher ergeben sich als Reactionskräfte $-\varepsilon ds\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $-\varepsilon ds\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, $-\varepsilon ds\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, indem x von der Zeit unabhängig ist. Da u, y, z Functionen von x und t sind, so sind diese Derivirten partielle; daher das Zeichen ∂ und nicht d geschrieben werden muss. Das Gleichgewicht der Kräfte von M liefert uns daher die Gleichungen der Bewegung:

$$\partial T_x + \left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\varepsilon\partial s = 0,\quad \partial T_y + \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\varepsilon\partial s = 0,\quad \partial T_z + \left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\varepsilon\partial s = 0.$$

Um nun T_x, T_y, T_z zu erhalten, ist T mit seinen Richtungscosinussen zu multipliciren. Diese sind die Richtungscosinusse der Fadentangente zur Zeit t, nämlich $\frac{\partial(x+u)}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$, wo dies Zeichen ∂ einer Aenderung des x, d. h. einem Uebergange vom Punkte M zu M' zu derselben t entspricht. Demnach ist

$$T_x = T\cdot\frac{\partial(x+u)}{\partial s},\qquad T_y = T\cdot\frac{\partial y}{\partial s},\qquad T_z = T\cdot\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Wir wollen nun den Faden so beschaffen annehmen, dass das Bogenelement $MM' = \partial s$, welches ursprünglich die Länge $NN' = dx$ hatte, nach wie vor dieselbe Masse besitzt. Dann ist, wenn M die Gesammtmasse des Fadens und l seine ursprüngliche Länge AB bezeichnet, $\varepsilon\partial s = \frac{M}{l}\partial x$. Führen wir diesen Ausdruck in die Bewegungsgleichungen ein, und schreiben statt der Differentiale derivirte Functionen, so nehmen dieselben die Gestalt an:

$$\frac{\partial}{\partial x}T\frac{\partial(x+u)}{\partial s} + \frac{M}{l}\left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}T\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{M}{l}\left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}T\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{M}{l}\left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) = 0.$$

2. Nehmen wir jetzt an, es wirken keine äusseren Kräfte, d. h. es seien X, Y, Z gleich Null und sei der Zusammenhang der Fadentheile der Art, dass die Verlängerung, welche ein Theil desselben durch eine spannende Kraft erleidet, der ursprünglichen Länge und der spannenden Kraft proportional sei. Nun besass

∂s ursprünglich die Länge ∂x und ist mithin $\partial s - \partial x$ seine Verlängerung; die ursprüngliche Spannung war τ und ist mithin die Kraft, welche die Verlängerung hervorgebracht hat $T - \tau$. Daher besteht die Gleichung $\partial s - \partial x = E(T - \tau)\partial x$, sowie E einen constanten, von der materiellen Beschaffenheit des Fadens abhängigen Coefficienten bedeutet. Im vorliegenden Falle, wo keine äusseren Kräfte wirken, ist die Gleichgewichtslage des Fadens die Gerade AB und wird derselbe, wenn er zur Zeit $t = 0$ nur eine kleine Ausbiegung erfährt, fortwährend nur kleine Abweichungen von AB zeigen. In Folge dessen wird zu allen Zeiten die Tangente der Fadencurve mit AB einen sehr kleinen Winkel bilden, sein Cosinus $\frac{\partial (x + u)}{\partial s}$ also sehr nahe die Einheit und $\partial s = \partial x + \partial u$ sein. Daher ergibt die oben entwickelte Formel $T = \tau + E \frac{\partial u}{\partial x}$.

Demzufolge wird die erste der drei Bewegungsgleichungen:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{M}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Drücken wir jetzt die beiden anderen Richtungscosinusse der Fadentangente und die Componenten der Spannung mit Rücksicht auf die angeführten speciellen Verhältnisse aus. Man erhält:

$$T \frac{\partial y}{\partial s} = \left(\tau + E \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial y}{\partial x + \partial u} = \left(\tau + E \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial y}{\partial x} \left[1 - \frac{\partial u}{\partial x} + \cdots\right].$$

Es ist aber $\frac{\partial y}{\partial x}$ die Tangente der Neigung der Projection des Fadenelementes auf die xy-Ebene gegen die x-Axe, also sehr klein. Ebenso ist u gegen x und mithin ∂u gegen ∂x sehr klein. Mit Beseitigung der kleinen Grössen höherer Ordnung erhält man demnach $T \frac{\partial y}{\partial s} = \tau \frac{\partial y}{\partial x}$ und folglich für die zweite und ganz in derselben Weise die dritte Bewegungsgleichung, nämlich

$$\tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M}{l} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \qquad \tau \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{M}{l} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Setzt man $\frac{El}{M} = \alpha^2$ und $\frac{\tau l}{M} = a^2$, so nehmen die Bewegungsgleichungen die einfache Form an:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Sie sind simultane partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung und dienen dazu, u, y, z und mithin die Lage jedes Systempunktes $(x, 0, 0)$ als Functionen seines Abstandes in der Gleichgewichtslage von dem einen Endpunkte des Fadens und der Zeit zu finden. Die erste Gleichung bestimmt die Bewegung der Projection des Systems auf die x-Axe (die sogenannten Longitudinalschwingungen der Saite), die zweite und dritte die Bewegung der Projection auf die xy- und die xz-Ebene (die Transversalschwingungen). Da jede der Gleichungen blos eine der gesuchten Functionen u, y, z und die unabhängigen Variabeln x und t enthält, so können sie gesondert integrirt werden. Zu den Differentialgleichungen treten noch die Bedingungen der Anfangslage und des anfänglichen Geschwindigkeitszustandes hinzu, sowie die für alle Zeiten zu erfüllende Bedingung des Systems, dass die beiden Endpunkte fest seien. Bezüglich der Anfangslage müssen sich also u, y und z für $t = 0$ auf bestimmte Functionen $f_0(x)$, $f(x)$ und

$f_1(x)$ von x reduciren, sodass $y = f(x)$, $z = f_1(x)$ die Gleichungen der Form sind, in welche man die Saite zur Zeit $t = 0$ durch Herausbringen aus der Gleichgewichtslage gebracht hat. Ebenso müssen die Componenten der Geschwindigkeit sich für $t = 0$ auf gegebene Functionen $\frac{\partial u}{\partial x} = F_0(x)$, $\frac{\partial y}{\partial x} = F(x)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = F_1(x)$ reduciren. Demnach ist das Problem in folgenden Bedingungen vollständig enthalten:

$$\left.\begin{array}{llll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & u = f_0(x), & \frac{\partial u}{\partial t} = F_0(x), & u = u \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, & y = f(x) \quad \text{und} & \frac{\partial y}{\partial t} = F(x) \text{ für } t = 0, & y = 0 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, & z = f_1(x), & \frac{\partial z}{\partial t} = F_1(x), & z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{für } x = 0,\\ x = l \text{ und}\\ \text{alle Werthe}\\ \text{von } t.\end{array}$$

3. Wir beschäftigen uns vorläufig nur mit der Behandlung des Gleichungssystems

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad y = f(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = F(x) \text{ für } t = 0,$$

$$y = 0 \text{ für } \begin{array}{c} x = 0 \\ x = l \end{array} \text{ für jedes } t.$$

Für sich drücken diese Gleichungen die Bewegung der Saite aus, wenn dieselbe blos Transversalschwingungen in der xy-Ebene macht. Der erste, welcher die vorliegende Aufgabe löste, war D'Alembert (*Mémoires de l'Académie de Berlin*). Wir wollen zunächst seine Methode der Integration der partiellen Differentialgleichung erläutern, die beiden willkürlichen Functionen, welche das allgemeine Integral enthält, bestimmen und später die neuere Methode mit Hülfe von Particularlösungen und Fourier'schen Reihen auseinandersetzen. D'Alembert schreibt die Differentialgleichung in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a^2 \frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

und bemerkt, dass sie ausdrückt, dass die Grösse $\frac{\partial y}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial y}{\partial x} dt$ ein vollständiges Differential einer Function u von x und t ist, sodass

$$du = \frac{\partial y}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial y}{\partial x} dt.$$

Hierzu tritt die allgemein gültige Gleichung:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial t} dt.$$

Aus beiden Gleichungen ergibt sich, wenn man die zweite mit a multiplicirt und mit der ersteren durch Addition und Subtraction verbindet:

$$d(u + ay) = \left(\frac{\partial y}{\partial t} + a \frac{\partial y}{\partial x}\right) d(x + at),$$

$$d(u - ay) = \left(\frac{\partial y}{\partial t} - a \frac{\partial y}{\partial x}\right) d(x - at),$$

Da die linken Seiten dieser Gleichungen vollständige Differentialien sind, so müssen es auch die rechten Seiten sein. Demnach ist $\frac{\partial y}{\partial t} + a \frac{\partial y}{\partial x}$ eine Function von

$x + at$ und $\frac{\partial y}{\partial t} - a\frac{\partial y}{\partial x}$ eine Function von $x - at$. In Folge dessen sind $u + ay$ und $u - ay$ Functionen resp. von $x + at$ und $x - at$, d. h. man kann setzen

$$u + ay = \varphi(x + at), \qquad u - ay = -\psi(x - at)$$

und mithin wird

$$2ay = \varphi(x + at) + \psi(x - at),$$

welche Gleichung die allgemeine Lösung der Differentialgleichung der schwingenden Saiten mit den zwei willkürlichen Functionen φ und ψ darstellt. Um die Form derselben zu finden, wie sie dem mechanischen Probleme entspricht, haben wir gemäss den Bedingungen des Anfangszustandes

$$2af(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$
$$2F(x) = \varphi'(x) + \psi'(x),$$

mithin, nachdem man die zweite dieser Gleichungen zwischen 0 und x integrirt hat, wodurch

$$2\int_0^x F(x)\,dx = \varphi(x) - \psi(x)$$

wird

$$\varphi(x) = af(x) + \int_0^x F(x)\,dx, \qquad \psi(x) = af(x) - \int_0^x F(x)\,dx$$

und mithin, indem man an die Stelle des Argumentes x die Argumente $x + at$, $x - at$ setzt:

$$2ay = a[f(x + at) + f(x - at)] + \int_0^{x+at} F(x)\,dx - \int_0^{x-at} F(x)\,dx,$$

oder

$$y = \tfrac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(x)\,dx.$$

Da die Zeit t von 0 bis ∞ und x von 0 bis l läuft, so erhält $x + at$ alle Werthe von 0 bis ∞, $x - at$ aber alle Werthe von $-\infty$ bis l. Damit also y und mithin auch $\frac{\partial y}{\partial t}$ für alle Werthe von t gefunden werden könne, müssen die Functionen $\varphi(\xi)$ und $\psi(\xi)$ für alle Werthe des Argumentes ξ, die erste von 0 bis ∞, die zweite von $-\infty$ bis l bekannt sein. Durch den Anfangszustand sind aber die Functionen f und F und in Folge dessen auch die aus ihnen gebildeten Functionen φ und ψ nur für alle Argumente zwischen 0 und l bestimmt. Die Ausdehnung dieser Kenntniss der Werthe derselben ergibt sich mit Hülfe der Bedingung für die Grenzpunkte der Saite. Vermöge derselben ist $y = 0$ für $x = 0$ und $x = l$, d. h. es bestehen die Gleichungen:

$$\varphi(at) + \psi(-at) = 0, \qquad \varphi(l + at) + \psi(l - at) = 0,$$

oder, wenn man $at = \varrho$ setzt:

$$\varphi(\varrho) + \psi(-\varrho) = 0, \qquad \varphi(l + \varrho) + \psi(l - \varrho) = 0.$$

Diese Gleichungen bestimmen den periodischen Charakter der Functionen φ und ψ und damit den der ganzen Bewegung. Die erste zeigt, dass wenn $\varphi(\varrho)$ für irgend ein positives ϱ bekannt ist, man sofort $\psi(-\varrho)$ für das absolut

ebenso grosse negative ϱ erhält und dass wenn $\psi(-\varrho)$ für ein negatives ϱ, also für ein positives Argument bekannt ist, φ für das entsprechende negative Argument erhalten wird, sowie dass die eine dieser Functionen periodisch ist, wenn es die andere ist. Die zweite Gleichung sagt aber aus, dass eine derselben periodisch sein muss. Denn setzt man in ihr $l-\varrho=-\sigma$, also $\varrho=l+\sigma$, so kommt $\varphi(2l+\sigma)=-\psi(-\sigma)$ und da die erste Gleichung hierzu $-\psi(-\sigma)=4\varphi(\sigma)$ liefert, so wird $\varphi(\sigma+2l)=\varphi(\sigma)$. Die Periode von φ ist also $2l$. Dasselbe gilt von ψ. Hiernach ist klar, wie die Reihe der Werthe der Functionen φ und ψ, welche durch den Anfangszustand nur zwischen den Grenzen 0 und l des Argumentes gegeben ist, über diese Grenzen ausgedehnt wird und wie durch die Bedingungen an den festen Endpunkten diese Functionen als periodische definirt werden. Setzt man für σ die Grösse at, so erhellt, dass wenn at um $2l$ zunimmt, die Functionen φ und ψ und also auch die Ordinate y und die Geschwindigkeit $\frac{\partial y}{\partial t}$ dieselben Werthe annehmen. Es kehren daher nach der Zeit $T=\frac{2l}{a}$ alle Zustände der Saite in derselben Ordnung wieder und macht die Saite fortfährend gleiche Oscillationen von der Dauer T. Für die Anzahl n der Oscillationen in der Zeiteinheit hat man $nT=1$, also $n=\frac{a}{2l}$, oder da $a^2=\frac{\tau l}{M}$ ist: $n=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau}{Ml}}$. Diese Schwingungszahl, welche unabhängig von der Anfangsgestalt der Saite ist, bestimmt die Höhe des Tones, den sie erzeugt. Sie ist proportional der Quadratwurzel aus der Spannung τ. Da M selbst proportional l ist, so wird n umgekehrt proportional der Länge der Saite.

4. Ist z. B. $\frac{\partial y}{\partial x}=F(x)$ für $t=0$ gleich Null, so erhält man

$$\varphi(x)=af(x),\quad \psi(x)=af(x),$$

oder

$$y=\tfrac{1}{2}\{f(x+at)+f(x-at)\}.$$

5. Wir wollen jetzt die erwähnte zweite Behandlungsweise unseres Problems durchführen. Der linearen partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ kann man durch eine Exponentialfunction $y=e^{\alpha x+\beta t}$ als Particularlösung genügen, sobald die Constanten α, β der Gleichung $\beta^2=a^2\alpha^2$ genügen. Ueber die eine von ihnen kann dann noch weiter verfügt werden. Setzen wir $\beta=\pm a\alpha$ ein, so wird die Particularlösung $y=e^{(x\pm at)\alpha}$ und spaltet sich in zwei solche, nämlich $y=e^{(x+at)\alpha}$ und $y=e^{(x-at)\alpha}$. Jede von diesen Lösungen genügt auch noch, wenn man sie mit einer willkürlichen Constanten multiplicirt, d. h. es sind $y=C_1e^{(x+at)\alpha}$ und $y=C_2e^{(x-at)\alpha}$ gleichfalls Particularlösungen. Nun ist aber weiter einleuchtend, dass allgemein, wenn X_1 und X_2 zwei Lösungen sind, auch die Summe X_1+X_2 eine Lösung ist. Dies ist eine Folge der linearen Beschaffenheit der Differentialgleichung und des Mangels eines Absolutgliedes. Daher ist auch $y=C_1e^{(x+at)\alpha}+C_2e^{(x-at)\alpha}$ eine Lösung. Die speciellen weiteren Bedingungen unseres mechanischen Problems fordern nun aber, dass für $x=0$ und $x=l$ die Function y bei jedem Werthe von t verschwinde. Dies ist in der vorliegenden Form für reelle α nicht möglich, wohl aber, wenn α imaginär, d. h. $\beta=\pm a\alpha i$ genommen wird. Dann gehen nämlich die Exponentialgrössen in goniometrische Functionen über. An die Stelle der Lösungen $e^{(x\pm at)\alpha i}$ treten

dann $\cos \alpha (x \pm at) + i \sin \alpha (x \pm at)$, welche man aber selbst wieder in ihre reellen und imaginären Theile spalten kann, sodass $\cos \alpha (x \pm at)$ und $\sin \alpha (x \pm at)$ selbst Particularlösungen sind. Die letzteren kann man aber auch nach der obigen Bemerkung durch Addition und Subtraction combiniren. Daher ist $\sin \alpha (x + at) + \sin \alpha (x - at)$ oder $\sin \alpha x \cos \alpha at$ eine Lösung; ebenso $\cos \alpha (x - at) - \cos \alpha (x + at)$ oder $\sin \alpha x \sin \alpha at$. Multipliciren wir diese beiden letzten Lösungen mit Constanten und addiren sie, so wird

$$y = \sin \alpha x (A \cos \alpha at + B \sin \alpha at)$$

gleichfalls eine Lösung. Sie besitzt bereits die Eigenschaft, dass y für $x = 0$ bei jedem Werthe von t verschwindet. Wir können aber die Grösse von α noch so wählen, dass y auch für $x = l$ Null wird. Dies liefert die Bedingung $\sin \alpha l = 0$, woraus $\alpha = 0, \frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l}, \ldots, \frac{n\pi}{l}$ folgt, sodass

$$y = \sin \frac{n\pi}{l} x \left(A \cos \frac{n\pi a}{l} t + B \sin \frac{n\pi a}{l} t\right)$$

wird. Endlich können wir hierin zu jedem Werthe von n immer andere Werthe der Constanten A und B wählen und alle so erhaltenen Particularlösungen summiren, sodass wir unter der Form

$$y = \Sigma \sin \frac{n\pi}{l} x \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t\right), \quad n = 1, 2, \ldots \infty$$

eine Lösung erhalten, welche nicht allein der Differentialgleichung, sondern auch den Bedingungen $y = 0$ für $x = 0$ und $x = l$ genügt. Durch Differentiation erhält man für die Geschwindigkeit:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{a\pi}{l} \Sigma \sin \frac{n\pi}{l} x \left(- nA_n \sin \frac{n a\pi}{l} t + nB_n \cos \frac{n a\pi}{l} t\right), \quad n = 1, 2, \ldots \infty.$$

Hierin sind die Coefficienten A und B noch so zu bestimmen, dass sich y und $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $t = 0$ auf gegebene Functionen $f(x)$ und $F(x)$ von x reduciren. Dies führt zu den Bedingungen:

$$f(x) = \Sigma A_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad F(x) = \frac{a\pi}{l} \Sigma n B_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Um hierin A_n und B_n für alle Werthe von $n = 1, 2, \ldots \infty$ zu bestimmen, entwickelt man die Functionen $f(x)$ und $F(x)$ auf den linken Seiten nach Sinussen der Vielfachen von $\frac{\pi x}{l}$ und vergleicht beiderseits die Coefficienten. Unter dem Namen der Fourier'schen Reihe kennt die Analysis aber nun folgende Entwickelung einer beliebigen Function $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = C_1 \sin \frac{\pi}{l} x + C_2 \sin \frac{2\pi}{l} x + C_3 \sin \frac{3\pi}{l} x + \cdots, \quad 0 \leq x \leq l$$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\sigma) \sin \frac{n\pi}{l} \sigma \cdot d\sigma.$$

Die Entwickelung von $f(x)$ und $F(x)$ in eine solche Reihe liefert daher sofort:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\sigma) \sin \frac{n\pi}{l} \sigma \cdot d\sigma, \qquad B_n = \frac{2}{n a\pi} \int_0^l F(\sigma) \sin \frac{n\pi}{l} \sigma \cdot d\sigma.$$

Demnach wird y dargestellt durch die periodische Reihe:

$$y = A_1 \sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi a t}{l} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{l}\cos\frac{2\pi a t}{l} + A_3 \sin\frac{3\pi x}{l}\cos\frac{3\pi a t}{l} + \cdots$$

$$+ B_1 \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi a t}{l} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{l}\cos\frac{2\pi a t}{l} + B_3 \sin\frac{3\pi x}{l}\cos\frac{3\pi a t}{l} + \cdots\,,$$

und A_n, B_n haben die angeführte Bedeutung.

Aus dieser Form der Lösung erhellt die Periodicität der Bewegung besser, als aus der früheren D'Alembert'schen. Insbesondere erkennt man leichter die Oscillationsdauer. Soll nämlich y für t und $t + T$ denselben Werth annehmen, so muss $\frac{\pi a T}{l} = 2\pi$, also $T = \frac{2l}{a}$ sein. Der Einfluss des Anfangszustandes spricht sich in den Coefficienten aus. Wenn derselbe derart ist, dass Coefficienten von bestimmtem Index ausfallen, so zeigt die Saite ausser den festen Endpunkten noch andere ruhende Punkte (Schwingungsknoten). Fallen z. B. alle Coefficienten aus, für welche n nicht durch die Zahl m ohne Rest theilbar ist, so ist für die Anfangsglieder der Reihe $n = m$ und wird $\frac{m a \pi}{l} T = 2\pi$, also $T = \frac{1}{m}\,\frac{2l}{a}$ und alle Punkte, für welche $\frac{m\pi}{l} x = 1, 2, \ldots m$, also $x = \frac{l}{m\pi}, \frac{2l}{m\pi}, \ldots \frac{2l}{\pi}$ sind Schwingungsknoten.

Ueber den speciellen Einfluss des Anschlags der Saite durch einen Hammer, durch das Pizzicato, den Bogenstrich u. s. w. auf den Anfangszustand der Saite und die Bildung der Schwingungsknoten, abgeleitet aus der vorstehenden Entwickelungsreihe für y, s. Helmholtz, die Lehre von den Tonempfindungen S. 563 u. ffg.

6. Die Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ für die Longitudinalschwingungen hat dieselbe Form, wie die für die Transversalschwingungen. Man erhält daher aus ihr analoge Resultate. Die Constante α aber hat eine etwas andere Bedeutung. Es ist $\alpha^2 = \frac{El}{M}$ und $a^2 = \frac{\tau l}{M}$. Die Oscillationsdauer der Longitudinalschwingungen ist $T' = \frac{2l}{\alpha}$, während die der Transversalschwingungen $T = \frac{2l}{a}$ ist. Man hat daher $\frac{T}{T'} = \frac{\alpha}{a} = \sqrt{\frac{E}{\tau}}$. Die Grösse E, der Elasticitätsmodulus des Systems, ist eine sehr grosse Zahl und daher T bedeutend grösser, als T'. Daher sind die Longitudinaltöne der Saite weit höher, als ihre Transversaltöne. Wir hatten früher die Formal

$$T - \tau = E\,\frac{ds - dx}{dx}.$$

Aus ihr erkennt man die Bedeutung von E. Würde nämlich $T - \tau$ so gross, dass die Verlängerung $ds - dx$ von dx gleich $2dx$ würde, so erhielte man $E = T - \tau$. Es bedeutet demnach der Elasticitätsmodulus den Zuwachs der Spannung, welcher eine Ausdehnung der Saitentheile auf die doppelte Länge zu erzeugen im Stande wäre. Es ist daher E sehr viel grösser, als τ.

7. Im Vorstehenden ist nur eine specielle Aufgabe über die schwingenden Saiten behandelt worden, nämlich die Schwingungen der Saite mit zwei festen Endpunkten. Andere Probleme, welche hierher gehören, sind die Bewegung eines Fadens, welcher nur einen festen Punkt oder gar keinen festen Punkt hat, aber

durch Kräfte ursprünglich gespannt ist. Auch haben wir mancherlei Einzelheiten übergangen, wie die Bildung der Wellen, ihre Reflexion und Superposition, ihre Fortpflanzung u. s. w. Wir werden bei anderen Problemen, bei welchen Aehnliches vorkommt, derartige Fragen etwas eingehender behandeln.

§. 2. Bewegung flüssiger Systeme. Die Bedingungen, welche die Natur eines Systems charakterisiren, können zweierlei Art sein, geometrische Bedingungen zwischen den Abständen der Systempunkte oder mechanische zwischen den Kräften, welche den Zusammenhang der Punkte mit dem System darstellen. Das flüssige System wird auf die letztere Art definirt. Man versteht unter einem flüssigen System eine continuirliche Vereinigung von Massenpunkten der Art, dass, wenn an irgend einer Stelle nach irgend einer Richtung hin die Verbindung mit dem System aufgehoben wird, die Kraft, welche den Einfluss des Zusammenhanges darstellt (der Druck), von der Richtung unabhängig ist. Denkt man sich daher durch einen Punkt des Systems ein ebenes Flächenelement gelegt, so wird hinter demselben der Einfluss der hinweggedachten Masse durch dieselbe Kraft vertreten, nach welcher Richtung man auch das Element hindrehen mag.

Wir stellen zunächst die Bewegungsgleichungen einer Flüssigkeit auf, indem wir eine kleine Parthie, z. B. ein unendlichkleines rechtwinkliges Flüssigkeitsparallelepiped, abtrennen und das Gleichgewicht der Reactionskraft mit den gegebenen und den Druckkräften analytisch darstellen. Man kann verlangen, dass durch diese Gleichungen die Coordinaten x, y, z irgend eines Punktes, die Componenten seiner Geschwindigkeit, der Druck, der auf ihn ringsherum wirkt und seine Dichtigkeit als Functionen der Zeit gefunden werden, wenn die Anfangslage und der anfängliche Geschwindigkeitszustand des Systems bekannt sind. Hierdurch würde auch die Bahn bekannt, welche jedes Theilchen beschreibt. Man legt der Aufstellung der Bewegungsgleichungen gewöhnlich aber eine etwas andere Auffassungsweise zu Grunde, auf welche sich übrigens die eben angeführte leicht zurückführen lässt. Die Geschwindigkeit, mit welcher ein Theilchen zur Zeit t durch den Punkt xyz hindurchgeht und ihre Componenten können als Functionen von t und x, y, z angesehen werden, indem sie an demselben Orte zu verschiedenen Zeiten und zu derselben Zeit an verschiedenen Orten verschieden sein werden. Dasselbe findet statt bei dem Druck und der Dichtigkeit. Hiernach hat man für die drei Componenten u, v, w der Geschwindigkeit, die Dichtigkeit ϱ und den Druck p fünf Differentialgleichungen aufzustellen zwischen den vier Variabeln x, y, z, t, durch deren Integration diese fünf Grössen als Functionen der vier Variabeln dargestellt werden. Von diesen Gleichungen ist eine gewöhnlich eine algebraische Gleichung, nämlich die, welche einen Zusammenhang der Dichtigkeit und des Druckes darstellt. Diese Gleichung ist durch die Beschaffenheit des Systems gegeben. Man unterscheidet in dieser Hinsicht zwei Arten von Flüssigkeiten: incompressibele, für welche ϱ durchaus constant bleibt, und elastische, für welche ϱ eine gegebene Function von p ist. Die vier nothwendigen Differentialgleichungen sind partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung und ihre zweimalige Integration würde die Gleichungen liefern, aus denen man durch Elimination von u, v, w, p und ϱ die Grössen x, y, z als Functionen von t finden würde, wodurch die obige Auffassungsweise des Problems mit der jetzigen vermittelt würde.

Zu den Bedingungen, welche den Anfangszustand ausdrücken, treten noch andere hinzu, welche die Begrenzung des Systems (Gefässwände, freie Oberfläche u. s. w.) betreffen.

Den Systempunkt (xyz) denken wir uns als ein verschwindend kleines Parallelepiped von den Kanten dx, dy, dz, welches während des Zeitelementes dt sich um die Strecken dx, dy, dz parallel den Axen fortbewegt. Um die Componenten der an demselben angreifenden Reactionskraft zu finden, haben wir seine Beschleunigungscomponenten $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ darzustellen. Da u, v, w Functionen von x, y, z, t sind, so sind diese Grössen

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial u}{\partial t},\quad \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial v}{\partial t},$$
$$\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial w}{\partial t},$$

oder da $\frac{dx}{dt}=u$, $\frac{dy}{dt}=v$, $\frac{dz}{dt}=w$ sind,

$$\frac{du}{dt}=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t},\quad \frac{dv}{dt}=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial t},$$
$$\frac{dw}{dt}=u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Sie sind mit der Masse $dm=\varrho\,dx\,dy\,dz$ des Punktes zu multipliciren und stellen

$$-\varrho\frac{du}{dt}dx\,dy\,dz,\qquad -\varrho\frac{dv}{dt}dx\,dy\,dz,\qquad -\varrho\frac{dw}{dt}dx\,dy\,dz$$

die Componenten der Reactionskraft dar.

Die Resultante der gegebenen am Punkte (xyz) angreifenden Kräfte werde auf die Einheit der Masse bezogen und sind demnach $X\,dm$, $Y\,dm$, $Z\,dm$ oder $X\varrho\,dx\,dy\,dz$, $Y\varrho\,dx\,dy\,dz$, $Z\varrho\,dx\,dy\,dz$ ihre Componenten. Beziehen wir den Druck p auf die Flächeneinheit, so wirkt auf die Seitenfläche des Parallelepipeds $dy\,dz$, welche durch den Punkt (xyz) geht, der Druck $p\,dy\,dz$ in der Richtung der x-Axe. Der Druck auf die gegenüberliegende Seitenfläche $dy\,dz$ geht aus diesem hervor, indem x sich um dx ändert, welcher Aenderung eine Aenderung von p um $\frac{\partial p}{\partial x}dx$ entspricht. Er ist, da er mit dem vorigen entgegengesetzten Sinn hat: $-(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx)\,dy\,dz$. Beide Pressungen, welche der x-Axe parallel sind, haben daher die Resultante $-\frac{\partial p}{\partial x}dx\,dy\,dz$. Analog erhalten wir für die Pressungen parallel der y- und z-Axe: $-\frac{\partial p}{\partial y}dx\,dy\,dz$ und $-\frac{\partial p}{\partial z}dx\,dy\,dz$. Daher liefert das Gleichgewicht der gegebenen, der Druck- und der Reactionskräfte, die Gleichungen

$$\varrho X-\frac{\partial p}{\partial x}-\varrho\frac{du}{dt}=0,\quad \varrho Y-\frac{\partial p}{\partial y}-\varrho\frac{dv}{dt}=0,\quad \varrho Z-\frac{\partial p}{\partial z}-\varrho\frac{dw}{dt}=0,$$

oder nach Einsetzung der obigen Werthe für $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$:

$$(1)\quad \begin{aligned}
u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}&=X-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial t}&=Y-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}&=Z-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Zu diesen Gleichungen tritt eine weitere hinzu, welche die Aenderung der Dichtigkeit an der Stelle (xyz) während des Zeitelementes entwickelt. Man erhält dieselbe, indem man die Masse bestimmt, welche in das Volumenelement $dx\,dy\,dz$ an der fraglichen Stelle während des Zeitelementes dt eintritt und dieselbe durch das Volumenelement selbst dividirt. Diese Masse setzt sich aus drei Theilen zusammen. Durch die Seitenfläche $dy\,dz$ tritt parallel der x-Axe mit der Geschwindigkeit u die Masse $\varrho\,dy\,dz \cdot u\,dt$ ein, indem während dt zusammenhängende Masse um die Strecke $dx = u\,dt$ fortrückt. Gleichzeitig aber tritt durch die gegenüberliegende Seitenfläche Masse aus. Man erhält dieselbe aus der vorigen, indem man x um dx zunehmen lässt; denn diese austretende Masse ist die, welche in das anstossende Volumenelement eintritt, welches der Abscisse $x + dx$ entspricht. Die austretende Masse ist daher $dy\,dz\left(u\varrho + \frac{\partial(u\varrho)}{\partial x}\right)dt$. Die Differenz zwischen beiden gibt die in dem Zeitelemente dt erfolgte Aenderung der Masse des Volumenelementes in Folge eines Massenein- und Austritts parallel der x-Axe an, nämlich $-\frac{\partial(u\varrho)}{\partial x}dx\,dy\,dz\,dt$. Aehnliche Ausdrücke erhält man für die Massenänderungen bezüglich der y- und z-Axe, nämlich $-\frac{\partial(u\varrho)}{\partial y}dx\,dy\,dz\,dt$, $-\frac{\partial(u\varrho)}{\partial z}dx\,dy\,dz\,dt$ und die Summe aller durch $dx\,dy\,dz$ dividirt gibt die Aenderung der Dichtigkeit an der Stelle (xyz) nach t, d. h. $\frac{\partial\varrho}{\partial t}dt$. Nach Division mit dt hat man daher die Gleichung:

$$(2)\qquad \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \frac{\partial(u\varrho)}{\partial x} + \frac{\partial(u\varrho)}{\partial y} + \frac{\partial(u\varrho)}{\partial z} = 0.$$

Die totale Aenderung der Dichtigkeit, welche beim Uebergang des Massenelementes von der Stelle (xyz) zur Stelle $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ im Zeitelemente erfolgt, würde sein

$$d\varrho = \left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varrho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varrho}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\varrho}{\partial t}\right)dt$$

und die totale Derivirte von ϱ

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial\varrho}{\partial x}\cdot u + \frac{\partial\varrho}{\partial y}\cdot v + \frac{\partial\varrho}{\partial z}\cdot w + \frac{\partial\varrho}{\partial t}.$$

Für die incompressibeln Flüssigkeiten ist $\varrho = Const.$, mithin

$$\frac{\partial\varrho}{\partial x}\cdot u + \frac{\partial\varrho}{\partial y}\cdot v + \frac{\partial\varrho}{\partial z} + \frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0$$

und wenn man mit Hülfe dieser Relation die Gleichung (2) nach Ausführung der Differentiationen reducirt, so wird sie ersetzbar durch:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Man hat daher für die incompressibeln Flüssigkeiten als Differentialgleichungen der Bewegung die folgenden fünf:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} = Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}=Z-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$
$$u\frac{\partial \varrho}{\partial x}+v\frac{\partial \varrho}{\partial y}+w\frac{\partial \varrho}{\partial z}+\frac{\partial \varrho}{\partial t}=0.$$

Die Integration derselben gibt u, v, w, ϱ, p als Functionen von x, y, z, t. Eliminirt man zwischen den Integralen dieses Gleichungssystems ϱ und p, so erhält man noch drei Gleichungen mit u, v, w, x, y, z, t, welche mit $\frac{dx}{dt}=u$, $\frac{dy}{dt}=v$, $\frac{dz}{dt}=w$ verbunden, nach abermaliger Integration die Coordinaten als Functionen der Zeit geben.

Für die compressibelen flüssigen Systeme muss noch eine Definitionsgleichung gegeben sein, welche einen Zusammenhang zwischen dem Druck und der specifischen Masse herstellt, z. B. $p=\varphi(\varrho)$. Für solche Systeme gelten die drei ersten Bewegungsgleichungen ebenfalls, die vierte und fünfte dagegen sind zu ersetzen durch:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\frac{\partial (u\varrho)}{\partial x}+\frac{\partial (u\varrho)}{\partial y}+\frac{\partial (u\varrho)}{\partial z}=0, \qquad p=\varphi(\varrho).$$

§. 3. **Oscillatorische Bewegung einer elastischen Flüssigkeit.** Es sei ϱ ursprünglich constant, $\varrho=c$, die äusseren Kräfte X, Y, Z seien Null, die Flüssigkeit in Ruhe und es werde zur Zeit $t=0$ in der Flüssigkeit eine kleine Störung vorgenommen. Zu irgend einer Zeit t wird dann ϱ von c um eine kleine veränderliche Grösse verschieden sein, nämlich $\varrho=c(1+s)$. Der Factor s heisst, je nachdem er positiv oder negativ ist, die Condensation oder Dilatation zur Zeit t. Man hat dann $p=\varphi(\varrho)=\varphi(c+cs)$ und erhält für die erste Bewegungsgleichung, da u, v, w wegen der Kleinheit der Störung fortwährend klein sein werden, abgekürzt:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{c}{c+cs}\varphi'(c+cs)\cdot\frac{\partial s}{\partial x}=0$$

oder, wenn man $\varphi'(c+cs)$ und $\frac{1}{c+cs}$ nach Potenzen von s entwickelt und die Glieder mit s tilgt:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\varphi'(c)\cdot\frac{\partial s}{\partial x}=0.$$

Da der Druck und die Dichtigkeit gleichzeitig wachsen und abnehmen, so ist $\frac{\partial p}{\partial \varrho}=\varphi'(\varrho)$ für $\varrho=c$ positiv und wenn wir diese Constante mit a^2 bezeichnen, die Rechnung für alle Coordinatenaxen durchführen und behufs der vierten der Gleichungen des §. 2 berücksichtigen, dass $u\varrho=uc+ucs$ wegen der Kleinheit von u und s sich auf uc reducirt, also $\frac{\partial (u\varrho)}{\partial x}=c\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots$ ist, so erhalten wir für die oscillatorische Bewegung der elastischen Flüssigkeit unter den angegebenen Bedingungen die Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a^2\frac{\partial s}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}+a^2\frac{\partial s}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}+a^2\frac{\partial s}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \quad p=\varphi(\varrho), \quad \varrho=c(1+s).$$

Die Integration dieses Gleichungssystems mit Rücksicht auf den Anfangszustand und die Bedingungen an den Grenzen des Systems wollen wir in einigen Fällen ausführen.

§. 4. **Die elastische Flüssigkeit erfülle einen nach beiden Seiten unendlich langen Cylinder von beliebiger Form, die Störung des Gleichgewichts sei so beschaffen, dass alle Punkte eines zur Cylinderaxe senkrechten Querschnittes gleiche Geschwindigkeiten parallel der Axe und gleiche Condensation besitzen. Welche Bewegung erfolgt in dem Systeme und wie ist die Condensation in demselben beschaffen?**

Die Axe des Cylinders sei die x-Axe; nur in ihrer Richtung erfolgt Bewegung. Die ganze Bewegung hängt daher blos von zwei Variabeln x, t ab; y und z eines Punktes ändern sich nicht, v und w, $\frac{\partial v}{\partial t}$ und $\frac{\partial w}{\partial t}$ sind Null; s hängt nicht von y und z ab, es ist mithin $\frac{\partial s}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial s}{\partial z} = 0$ und bleiben uns blos die Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \qquad p = \varphi(\varrho), \qquad \text{und} \qquad u = f(x), \qquad \text{für } t = 0,$$
$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \varrho = c(1 + s), \qquad s = F(x),$$

von denen die letzteren ausdrücken, dass die Geschwindigkeit und die Condensation für $t = 0$ sich auf gegebene Functionen $f(x)$ und $F(x)$ reduciren sollen.

1. Um u und s als Functionen von x und t zu bestimmen, könnte man aus den beiden ersten Gleichungen je eine dieser Grössen eliminiren, indem man beide Gleichungen nach einer Variabeln x, t differentiirte und beide dann von einander subtrahirte. Indessen gelangt man kürzer durch Particularlösungen der Gleichungen zum Ziel. Die lineare Beschaffenheit und die constanten Coefficienten deuten hinreichend an, dass ihnen Exponentialgrössen $u = l e^{\alpha t + \beta x}$, $s = m e^{\alpha t + \beta x}$ genügen. Die Einsetzung dieser Grössen liefert für die Constanten α, β, l, m die beiden Bedingungen $l\alpha + m\beta a^2 = 0$, $m\alpha + l\beta = 0$, sodass von diesen 4 Grössen noch zwei willkürlich bleiben. Wählen wir hierzu β und l, so folgt $\alpha = \pm a\beta$, $m = \mp \frac{l}{a}$ und werden also

$$u = l e^{\beta(x \pm at)}, \qquad s = \mp \frac{l}{a} e^{\beta(x \pm at)}.$$

Indem man nun eine Reihe von Werthen β_1, β_2, ... annimmt und ihr eine Reihe von Werthen l_1, l_2, ... zuordnet, dass jedem β_i ein bestimmtes l_i zugehört, erhält man eine Menge von Particularlösungen, aus welchen man auch die vollständige Lösung würde zusammensetzen können. Indessen bedarf es nur einer kleinen Ueberlegung, um diese sofort in weit bequemerer Gestalt aufzufinden. Das Genügen der Exponentialfunction beruht nämlich darauf, dass sie in ihren Differentialquotienten sich wiederholt und vermöge der linearen Beschaffenheit der Differentialgleichungen, die keine Absolutglieder besitzen, herausfällt, sodass blos algebraische Beziehungen zwischen den Constanten übrig bleiben. Dasselbe leistet aber auch, da blos Differentialquotienten gleich hoher Ordnung vorkommen, jede Function von $x \pm at$. Man überzeugt sich sofort, dass

$$u = \psi(x \pm at), \qquad s = \mp \frac{1}{a} \psi(x \pm at)$$

genügen, indem man $\frac{\partial u}{\partial t} = \pm a\psi'(x \pm at)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \psi'(x \pm at)$, $\frac{\partial s}{\partial t} = -\psi'(x \pm at)$, $\frac{\partial s}{\partial x} = \mp \frac{1}{a} \psi'(x \pm at)$ einsetzt. Der doppelten Zeichen wegen erhält man zwei Lösungen:

$$u = \psi(x + at), \qquad u = \chi(x - at),$$

$$s = -\frac{1}{a} \psi(x + at); \qquad s = \frac{1}{a} \chi(x - at),$$

indem man zugleich eine andere Function χ statt ψ wählt. Aus beiden bildet man nun durch Addition die allgemeine Lösung mit 2 willkürlichen Functionen ψ und χ, nämlich

$$u = \psi(x + at) + \chi(x - at),$$

$$s = -\frac{1}{a} \psi(x + at) + \frac{1}{a} \chi(x - at).$$

Man kann zu dieser Form der Lösung auch gelangen, indem man $x + at = \lambda$, $x - at = \mu$ als neue Variabeln in die Differentialgleichungen einführt. Man hat nämlich, da λ und μ Functionen von x und t sind:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial \lambda} - a\frac{\partial u}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial u}{\partial \mu},$$

$\frac{\partial s}{\partial t} = a\frac{\partial s}{\partial \lambda} - a\frac{\partial s}{\partial \mu}$, $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial \lambda} + \frac{\partial s}{\partial \mu}$ und die Einführung dieser Ausdrücke in die Differentialgleichungen ertheilt diesen die Form:

$$\frac{\partial(u + as)}{\partial \lambda} - \frac{\partial(u - as)}{\partial \mu} = 0, \qquad \frac{\partial(u + as)}{\partial \lambda} + \frac{\partial(u - as)}{\partial \mu} = 0.$$

Hieraus folgt weiter

$$\frac{\partial(u + as)}{\partial \lambda} = 0, \qquad \frac{\partial(u - as)}{\partial \mu} = 0,$$

sodass also $u + as$ Function blos von μ, $u - as$ blos von λ ist. Setzt man daher

$$u + as = \chi(\mu), \qquad u - as = \psi(\lambda),$$

so ergibt sich

$$u = \tfrac{1}{2}\psi(\lambda) + \tfrac{1}{2}\chi(\mu), \qquad s = \tfrac{1}{2}\psi(\lambda) - \tfrac{1}{2}\chi(\mu),$$

welches nach Restitution von $\lambda = x + at$, $\mu = x - at$ in die obige Form übergeht.

2. Die unbekannten Functionen ψ und χ in der allgemeinen Lösung

$$u = \psi(x + at) + \chi(x - at), \qquad s = -\frac{1}{a}\psi(x + at) + \frac{1}{a}\chi(x - at)$$

werden durch die Bedingungen des Anfangszustandes bestimmt. Diesen zufolge ist

$$\psi(x) + \chi(x) = f(x), \qquad -\psi(x) + \chi(x) = aF(x),$$

woraus

$$\psi(x) = \tfrac{1}{2}f(x) - \tfrac{1}{2}aF(x), \qquad \chi(x) = \tfrac{1}{2}f(x) + \tfrac{1}{2}aF(x)$$

folgt, sodass unsre Lösung vollständig bestimmt ist, nämlich

$$u = \tfrac{1}{2}f(x + at) - \tfrac{1}{2}aF(x + at), \qquad s = -\frac{1}{2a}f(x + at) + \tfrac{1}{2}F(x + at)$$

$$+ \tfrac{1}{2}f(x - at) + \tfrac{1}{2}aF(x - at), \qquad + \frac{1}{2a}f(x - at) + \tfrac{1}{2}F(x - at).$$

Durch diese Formeln werden die Geschwindigkeit u und die Condensation s als Functionen von x und t bestimmt; sie hängen von der Natur zweier Functionen $f(x)$ und $F(x)$ ab, welche den anfänglichen Geschwindigkeitszustand und die anfängliche Condensation darstellen. Diese Functionen müssen bei dem beiderseits unendlich langen Cylinder für alle Werthe von x gegeben sein, können aber Discontinuitäten besitzen. Wir wollen hierüber einige specielle Annahmen machen.

3. Es werde der ursprüngliche Gleichgewichtszustand nur innerhalb des Raumes von $x = -\alpha$ bis $x = +\alpha$ gestört, sodass $u = f(x)$ und $s = F(x)$ für $t = 0$ an allen Stellen $x > \alpha$ und $x < -\alpha$ die Werthe Null haben, während sie zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ im Allgemeinen nicht Null sind.

Für einen Punkt $x > \alpha$, der ausserhalb des Erregungsraumes liegt, ist $x + at > \alpha$, mithin werden für ihn $f(x + at)$ und $F(x + at)$ Null und bleiben in u und s blos zwei Glieder, nämlich:

$$u = \tfrac{1}{2} f(x - at) + \tfrac{1}{2} a F(x - at), \qquad s = \frac{1}{2a} f(x - at) + \tfrac{1}{2} F(x - at).$$

Der Punkt x ist anfangs in Ruhe, da für ihn für $t = 0$, $f(x) = F(x) = 0$; mit wachsendem t nimmt aber $x - at$ ab und sobald es gleich α wird, hören die Functionen f, F auf Null zu sein und erlangen u und s Werthe, welche von Null verschieden sind. Die Zeit t_1, für welche der Punkt seine Bewegung beginnt, folgt aus der Gleichung $x - at_1 = \alpha$, nämlich $t_1 = (x - \alpha) : a$. Im weiteren Verlauf von t nimmt aber $x - at$ bis $-\alpha$ ab, dann verschwinden wieder f und F und folglich auch u und s. Für die Zeit t_2, welche aus $x - at_2 = -\alpha$ folgt, nämlich $t_2 = (x + \alpha) : a$, kommt der Punkt x wieder zur Ruhe. Die Dauer seiner Bewegung ist daher $t_2 - t_1 = 2\alpha : a$. Sie ist proportional der Länge des Erschütterungsraumes.

Für zwei Punkte x, x' ausserhalb des Erschütterungsraumes auf der Seite der positiven x-Axe sind die Zeiten t, t', zu welchen sie die Bewegung beginnen: $t' = (x' + \alpha) : a$, $t = (x + \alpha) : a$ und stellt die Differenz $t' - t = (x' - x) : a$ die Zeit dar, während welcher sich das Phänomen von dem, dem Erschütterungsraume näher liegenden Punkte x bis zu dem entfernteren x' fortgepflanzt hat. Dieser Zeitunterschied ist proportional dem Abstande $x' - x$ beider Punkte. Für $t' - t$ gleich der Zeiteinheit wird $x' - x = a$. Die Constante a stellt also die Strecke dar, um welche das Phänomen in der Zeiteinheit fortschreitet. Sie heisst die Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Es sei x ein Punkt, in welchem das Phänomen zur Zeit t beginnt, x' ein solcher, in welchem es zu derselben Zeit aufhört. Für beide bestehen zur selben Zeit die Gleichungen $x - at = \alpha$, $x' - at = -\alpha$. Hieraus folgt $x - x' = 2\alpha$ für die Länge des Raumes, welcher zur Zeit t sich in Erschütterung befindet. Er ist ebenso lang, wie der anfängliche Erschütterungsraum. Er rückt scheinbar fort mit der Geschwindigkeit a und wird die Welle genannt.

Aus den Formeln für u und s ergibt sich noch $u = as$, d. h. die Geschwindigkeit ist der Condensation proportional. Da a positiv ist, so ist u positiv, wenn s positiv ist, d. h. wenn Condensation stattfindet, dagegen ist u negativ, wenn Dilatation eintritt. Der Systempunkt oscillirt also immer nach der Seite hin, nach welcher Verdichtung des Systems stattfindet.

Nehmen wir den Punkt x jetzt ausserhalb des Erschütterungsraumes auf der negativen Seite des x an, sodass $x < -\alpha$. Hierfür ist $x - at$ stets kleiner als α, daher fallen in den Ausdrücken für u und s jetzt die Glieder aus, welche

$f(x-at)$ und $F(x-at)$ enthalten, da die Functionen f und F für alle Argumente kleiner als $-\alpha$ Null sind. Demnach wird

$$u = \tfrac{1}{2} f(x+at) - \tfrac{1}{2} aF(x+at), \qquad s = -\frac{1}{2a} f(x+at) + \tfrac{1}{2} F(x+at).$$

Es ist hier $u = -as$, sodass die negative Geschwindigkeit dieselbe Rolle spielt, wie oben die positive.

Für $x+at_1 = -\alpha$ und $x+at_2 = \alpha$ ergeben sich die Anfangs- und Endzeit für die Bewegung des Punktes x, nämlich $t_1 = -(x+\alpha):a$, $t_2 = -(x-\alpha):a$, sowie die Dauer der Bewegung $t_2 - t_1 = 2\alpha : a$, wie oben.

Ebenso erhält man für zwei Punkte x', x, in denen das Phänomen eben anfängt und aufhört $x+at = -\alpha$, $x'-at = \alpha$. Die Gleichung $x'-x = 2\alpha$ zeigt, dass auch nach der negativen Seite des x eine Welle von der Länge 2α fortschreitet.

Für einen Punkt x innerhalb des Erschütterungsraumes, d. h. für $-\alpha < x < \alpha$ ist das Phänomen complicirter, indem dort jene beiden Glieder in u und s nicht ausfallen. Um zu bestimmen, wann dort die Geschwindigkeit und die Condensation Null werden, muss man für die einzelnen Glieder die Zeit des Verschwindens untersuchen. Für zwei Glieder tritt dies ein, sobald $x+at = \alpha$, also $t = (\alpha - x):a$, für die beiden andern, sobald $x - at = -\alpha$, d. h. $t = (x+\alpha):a$ wird. Für die grösste von beiden Zeiten verschwinden alle vier Glieder, also auch u und s. Diese Zeit hängt von der Grösse α und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit a ab.

Euler warf die Frage auf, wie es komme, dass aus dem Anfangszustande zwei Wellen hervorgehen, von denen die eine nach der positiven, die andere nach der negativen Seite der x fortschreitet, dass aber nicht zu jeder Zeit aus dem zu dieser stattfindenden Zustande zwei solche Wellen hervorgehen. An sich hat der Anfangszustand nichts voraus vor dem Zustande, welcher zu irgend einer Zeit t stattfindet. Er erklärt diesen Umstand so, dass ausserhalb des Erregungsraumes u und s eine solche Beziehung haben, dass eine Welle ausfällt; diese Beziehung ist $u = as$ und $u = -as$. Uebrigens kann man den Anfangszustand so in zwei Anfangszustände spalten, dass der eine von ihnen nur die eine, der andere nur die andere Welle zur Folge hat. Der Satz, mit Hülfe dessen dies möglich ist, heisst der Satz von der Superposition oder Coexistenz der Bewegungen. Er lautet folgendermassen.

Wenn aus einem Anfangszustande $u = f_1(x)$, $s = F_1(x)$ für die Geschwindigkeit und die Condensation zur Zeit t die Functionen u_1 und s_1 folgen; wenn ferner ein zweiter Anfangszustand $u = f_2(x)$, $s = F_2(x)$ für die Geschwindigkeit und Condensation zur Zeit t die Functionen u_2 und s_2 ergibt und man führt nun einen Anfangszustand $u = f_1(x) \pm f_2(x)$, $s = F_1(x) \pm F_2(x)$ ein, dessen Geschwindigkeit und Condensation durch die algebraischen Summen der Geschwindigkeiten und Condensationen jener beiden Anfangszustände gebildet werden, so folgen aus diesem dritten Anfangszustande zur Zeit t für die Geschwindigkeit u_3 und die Condensation s_3 die Functionen $u_3 = u_1 \pm u_2$, $s_3 = s_1 \pm s_2$, d. h. die algebraischen Summen aus den Functionen, welche diese Grössen für die einzelnen Bewegungen darstellen.

Denn u_3 und s_3 gehen aus $f_1(x) \pm f_2(x)$ und $F_1(x) \pm F_2(x)$ hervor, indem man in den Formeln Nr. 2 diese Summen an die Stelle von $f(x)$ und $F(x)$ treten

lässt. Dadurch erhält man aber je 8 Glieder, von welchen nach denselben Formeln die 4 einen die Grössen u und s bilden, welche man durch Einführung von $f_1(x)$ und $F_1(x)$ an die Stelle von $f(x)$ und $F(x)$ erhält, während die 4 andern dem Einsetzen von $f_2(x)$ und $F_2(x)$ entsprechen.

Man kann nun den oben zu Grunde gelegten Anfangszustand $u = f(x)$, $s = F(x)$ auf mannigfache Weise in zwei Anfangszustände $f_1(x)$, $F_1(x)$ und $f_2(x)$, $F_2(x)$ zerlegen, sodass für $t = 0$ $u = f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ und $s = F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ wird; insbesondere so, dass für $t = 0$ auch die Relationen $u = as$ und $u = -as$, d. h. $f_1(x) = aF_1(x)$ und $f_2(x) = -aF_2(x)$ bestehen. Sobald dies der Fall ist, so fallen in dem Bewegungszustande f_1, F_1 zu allen Zeiten und an allen Orten in den Ausdrücken für u und s zwei Glieder aus und schreitet nur eine Welle im positiven Sinne der x-Axe fort. Ebendasselbe gilt für den Bewegungszustand f_2, F_2 und liefert derselbe nur eine im negativen Sinne fortschreitende Welle. Im Erschütterungsraume lagern sich beide Wellen übereinander. Die fragliche Zerlegung des Anfangszustandes ist:

$$f_1(x) = \tfrac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a} F(x), \quad F_1(x) = \tfrac{1}{2} a f(x) + \tfrac{1}{2} F(x),$$

$$f_2(x) = \tfrac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a} F(x), \quad F_2(x) = -\tfrac{1}{2} a f(x) + \tfrac{1}{2} F(x).$$

4. Nimmt man an zwei Stellen im Cylinder Störungen des ursprünglichen Gleichgewichtes zugleich zur Zeit $t = 0$ vor, so kann man den Anfangszustand in zwei andere zerlegen, in einen, für welchen an der ersten Stelle Erschütterung stattfindet, während an der zweiten Stelle u und s Null sind und einen zweiten, für welchen dasselbe bezüglich der andern Stelle eintritt. Jeder der beiden Anfangszustände veranlasst zwei in entgegengesetztem Sinne fortschreitende Wellen. Diese Wellen kreuzen sich, gehen aber ungehindert fort, ohne sich zu stören. Nur an der Kreuzungsstelle complicirt sich das Phänomen.

§. 5. Der Cylinder, in welchem die elastische Flüssigkeit eingeschlossen ist, erstrecke sich nur nach einer Seite ins Unendliche und sei nach der anderen Seite durch eine zu den Erzeugungslinien senkrechte Ebene geschlossen. Welche oscillatorische Bewegung folgt aus einem gegebenen Anfangszustande?

Zu den Bedingungen des Problems in §. 4 tritt hier noch die hinzu, dass an der Grenzwand die Geschwindigkeit fortwährend Null ist. Nehmen wir diese Ebene zur yz-Ebene, so sind die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad u = f(x) \qquad \qquad x = 0,$$
$$\text{für } t = 0, \qquad u = 0 \text{ für}$$
$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad s = F(x) \qquad \qquad t = t.$$

Die Functionen ψ und χ der allgemeinen Lösung

$$u = \psi(x + at) + \chi(x - at), \quad s = -\frac{1}{a}\psi(x + at) + \frac{1}{a}\chi(x - at)$$

bestimmen sich durch die Bedingungen

$$\psi(x) + \chi(x) = f(x), \quad -\psi(x) + \chi(x) = aF(x),$$

nämlich

$$\psi(x) = \tfrac{1}{2} f(x) - \tfrac{1}{2} aF(x), \quad \chi(x) = \tfrac{1}{2} f(x) + \tfrac{1}{2} aF(x).$$

Es sind aber $f(x)$ und $F(x)$ nur für positive Argumente gegeben, da die negative x-Axe nicht dem System angehört; es sind also auch ψ und χ blos für positive Argumente bis jetzt bestimmt. Die Function ψ wird auch nur für positive Werthe $x + at$ in u und s in Anspruch genommen, das Argument $x - at$ in χ aber kann negativ werden und müssen wir also diese Function auch für negative Argumente kennen. Hierzu dient die letzte Bedingung. Vermöge derselben ist $\psi(at) + \chi(-at) = 0$ oder $\chi(-\varrho) = -\psi(\varrho)$, wenn man $at = \varrho$ setzt. Für negative $x - at$ ist mithin $\chi(x - at)$ durch $-\psi(at - x)$ zu ersetzen. Unsere Formeln spalten sich folgendermassen:

für $x - at > 0$:

$$u = \tfrac{1}{2} f(x + at) - \tfrac{1}{2} aF(x + at) + \tfrac{1}{2} f(x - at) + \tfrac{1}{2} aF(x - at)$$

$$s = -\frac{1}{2a} f(x + at) + \tfrac{1}{2} F(x + at) + \frac{1}{2a} f(x - at) + \tfrac{1}{2} F(x - at)$$

für $x - at < 0$:

$$u = \tfrac{1}{2} f(x + at) - \tfrac{1}{2} aF(x + at) - \tfrac{1}{2} f(at - x) + \tfrac{1}{2} aF(at - x)$$

$$s = -\frac{1}{2a} f(x + at) + \tfrac{1}{2} F(x + at) - \frac{1}{2a} f(at - x) + \tfrac{1}{2} F(at - x).$$

Wir wollen annehmen, es finde die Erschütterung zur Zeit $t = 0$ nur innerhalb eines bestimmten Raumes statt, sodass innerhalb desselben f und F gegebene Werthe besitzen, ausserhalb desselben Null sind. Da für negative x diese Functionen nicht gegeben sind, so kann man sie hierfür beliebig definiren. Die Vergleichung der vorstehenden Ausdrücke zeigt nun, dass sowohl die beiden Werthe für u, als auch die für s sich in einen zusammenfassen lassen, wenn man $f(x)$ und $F(x)$ so definirt, dass $f(-x) = -f(x)$ und $F(-x) = F(x)$ wird. Die Bedeutung dieser Definitionserweiterung ist folgende. Wir wollen uns einen nach beiden Seiten unendlich langen Cylinder denken und in dem elastisch flüssigen Medium, welches ihn erfüllt, eine Störung des Gleichgewichts vornehmen, sodass auf der Seite des positiven x die anfängliche Geschwindigkeit und Condensation durch die Functionen $f(x)$, $F(x)$ angegeben werden, welche aber nur innerhalb eines gewissen Bereiches von Null verschiedene Werthe haben mögen. Auf der Seite des negativen x wollen wir in dem zu diesem Bereiche symmetrisch liegenden Raume zugleich derart das Gleichgewicht stören, dass die Geschwindigkeit und die Condensation durch $-f(x)$ und $F(x)$ angegeben werden, d. h. dass die Geschwindigkeit entgegengesetzt, die Condensation aber dieselbe ist, wie auf der positiven Seite. Dieser Anfangszustand wird zur Zeit t einen Bewegungszustand zur Folge haben, welcher auf der Seite der positiven x derselbe sein wird, wie in dem an der Stelle $x = 0$ durch eine Ebene begrenzten Cylinder unseres Problems, sodass man behaupten kann, dass das Phänomen in dem begrenzten Cylinder unter Einfluss der Bedingungen $u = f(x)$ und $s = F(x)$ für $t = 0$ und $u = 0$, für $x = 0$ ebenso erfolge, als ob an Stelle dieser Bedingungen der Cylinder beiderseits unendlich lang wäre und in der Verlängerung die genannte symmetrische Störung eintrete. Den angenommenen Anfangszustand in dem beiderseits unendlichen Cylinder kann man nun zerlegen in zwei andere, einen, für welchen blos auf der positiven Seite, nicht aber zugleich auf der negativen Seite eine Erschütterung eintritt, und einen andern, bei welchem umgekehrt blos auf der negativen Seite dies der Fall ist. Aus beiden ergeben sich vier Wellen, von denen aber die beiden, die auf der negativen Seite fortschreiten, für das wirkliche Bewegungsphänomen nicht in Betracht kommen, weil der Cylinder in Wirklichkeit abgeschnitten ist. Die von dem Anfangszustande auf der negativen Seite her-

rührende und sich nach der positiven Seite fortpflanzende Welle liefert das Phänomen der Zurückwerfung der von der positiven Seite ausgehenden Welle an der festen Wand. An der Stelle $x = 0$ ist die Geschwindigkeit von selbst zu allen Zeiten Null.

§. 6. Der Cylinder sei durch zwei zu den Erzeugungslinien senkrechte Ebenen begrenzt. Nehmen wir die eine Ebene zur yz-Ebene und nennen c den Abstand beider Ebenen von einander, so sind jetzt die Bedingungen des Problems:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0\end{array}\right\} \left\{0 < x < c\right\}, \qquad \begin{array}{l} u = f(x) \\ s = F(x) \end{array} \left\{\begin{array}{c} t = 0 \\ 0 < x < c \end{array}\right\},$$

$$u = 0, \quad \left\{\begin{array}{c} x = 0 \\ t = t \end{array}\right\}, \qquad u = 0, \quad \left\{\begin{array}{c} x = c \\ t = t \end{array}\right\}.$$

Die Functionen ψ, χ, welche die allgemeine Lösung

$$u = \psi(x + at) + \chi(x - at), \qquad s = -\frac{1}{a}\psi(x + at) + \frac{1}{a}\chi(x - at)$$

enthält, müssen zunächst den Bedingungen:

$$\psi(x) + \chi(x) = f(x), \qquad -\psi(x) + \chi(x) = aF(x)$$

genügen, woraus folgt:

$$\psi(x) = \tfrac{1}{2} f(x) - \tfrac{1}{2} aF(x), \qquad \chi(x) = \tfrac{1}{2} f(x) + \tfrac{1}{2} aF(x).$$

Da x blos positive Werthe haben kann (von 0 bis c), so erhält $x + at$ alle positiven Werthe von 0 bis ∞ und $x - at$ alle Werthe von c bis $-\infty$. Innerhalb der Grenzen von 0 bis ∞ wird in den obigen Ausdrücken für u und s die Function ψ in Anspruch genommen, von c bis $-\infty$ die Function χ. Beide sind bis jetzt aber nur für Argumente zwischen 0 und c bekannt. Allein die weiteren Bedingungen des Problems liefern, wenn man $at = \varrho$ setzt:

$$\psi(\varrho) + \chi(-\varrho) = 0, \qquad \psi(c + \varrho) + \chi(c - \varrho) = 0.$$

Da ψ von 0 bis c bekannt ist, so liefert die erste dieser Gleichungen χ von 0 bis $-c$ und da man χ bereits von 0 bis c kennt, so kennt man χ jetzt von c bis $-c$. Setzt man in der zweiten Gleichung für ϱ alle Werthe von 0 bis c, so ergibt sich ψ von 0 bis $2c$. Hiermit findet man dann aus der ersten Gleichung weiter χ von $-c$ bis $-2c$ u. s. w. Eine abwechselnde Benutzung beider Gleichungen führt auf diese Weise zur Kenntniss der Functionen ψ und χ für alle Argumente, für welche sie zur Bildung von u und s in Anspruch genommen werden. Setzt man $c + \varrho = \sigma$, so gibt die zweite Gleichung $\chi(-\sigma + 2c) = -\psi(\sigma)$ oder vermöge der ersten Gleichung $\chi(-\sigma + 2c) = \chi(-\sigma)$, woraus die Periodicität von χ erhellt. Ebenso für ψ.

Man kann leicht zeigen, dass das Phänomen in dem begrenzten Cylinder ebenso vor sich geht, wie in einem beiderseits unendlichen Cylinder, wenn über $f(x)$ und $F(x)$ die Voraussetzungen $f(-x) = -f(x)$, $F(-x) = F(x)$, zugleich aber noch die weiteren $f(x + 2c) = f(x)$, $F(x + 2c) = F(x)$ gemacht werden.

§. 7. Es soll die oscillatorische Bewegung im unendlichen elastisch-flüssigen Medium untersucht werden, welche eine Folge eines gegebenen Anfangszustandes ist.

1. Die Bedingungen des Problems sind in dem Gleichungssystem ausgesprochen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \frac{\partial s}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial s}{\partial t},$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

aus welchen u, v, w, s, nämlich die drei Componenten der Geschwindigkeit und die Condensation als Functionen von x, y, z, t hervorgehen. Für $t = 0$ müssen sich dieselben auf 4 gegebene Functionen reduciren, sodass

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad w = w_0, \quad s = s_0 \text{ für } t = 0.$$

Weitere Bedingungen der Bewegung des Systems sollen nicht gegeben sein, vielmehr nehmen wir an, dass das elastische Medium den unendlichen Raum erfüllt. Wir suchen zunächst s und eliminiren hierzn u, v, w, indem wir die drei ersten Bewegungsgleichungen der Reihe nach in Bezug auf x, y, z, die vierte nach t differentiiren und dann die Summe der drei ersten von der letzten subtrahiren. Dies liefert die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right),$$

aus welcher s vollständig bestimmt hervorgeht, sobald sein Werth s_0 und sein Differentialquotient $\frac{\partial s}{\partial t}$ für $t = 0$ bekannt ist. Den letzteren erhält man, vermöge der obigen weiteren Gleichung, nämlich

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{t=0} = -\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right).$$

Sobald s vollständig bekannt ist, hat man mit Hülfe der drei ersten Gleichungen auch u, v, w, nämlich

$$u - u_0 = -a^2 \int_0^t \frac{\partial s}{\partial x}\, dt, \quad v - v_0 = -a^2 \int_0^t \frac{\partial s}{\partial y}\, dt, \quad w - w_0 = -a^2 \int_0^t \frac{\partial s}{\partial z}\, dt.$$

Der Differentialgleichung für s genügt nun die Particularlösung $s = e^{\lambda x + \mu x + \nu z + \varpi t}$, sobald zwischen λ, μ, ν, ϖ die Relation $\varpi^2 = a^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)$ besteht. Wegen der voraussichtlich periodischen Beschaffenheit der Bewegung wählen wir λ, μ, ν imaginär und nehmen die Particularlösung unter der Form an

$$s = e^{(\lambda x + \mu y + \nu z)i + \varpi t}, \quad \varpi = \pm a \varrho i, \quad \varrho = +\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}.$$

Wir zerlegen dieselbe, indem wir setzen:

$$s = e^{(\lambda x + \mu y + \nu z \pm a \varrho t)i} = \cos(\lambda x + \mu y + \nu z \pm a \varrho t) + i \sin(\lambda x + \mu y + \nu z \pm a \varrho t)$$

und bemerken, dass die Glieder $\cos(\lambda x + \mu y + \nu z \pm a\varrho t)$ und $\sin(\lambda x + \mu y + \nu z \pm a\varrho t)$ einzeln, so wie die Summe $\cos(\lambda x + \mu y + \nu z - a\varrho t) + \sin(\lambda x + \mu y + \nu z + a\varrho t)$, so wie auch die Bestandtheile $\cos(\lambda x + \mu y + \nu z)\cos a\varrho t$ und $\cos(\lambda x + \mu y + \nu z)\sin a\varrho t$ genügen. Von diesen letzteren Particularlösungsformen gehen wir aus. Sie sind besonders geeignet, wenn wir den Anfangszustand so in zwei andere zerlegen wollen, dass $s = s' + s''$ wird und zwar s' sich für $t = 0$ auf s_0 reducirt, während sein Differentialquotient $\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_0$ verschwindet, dagegen s'' für $t = 0$ verschwindet, wäh-

rend dessen Differentialquotient $\left(\frac{\partial s''}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_0$ wird. Dabei wollen wir der Uebersichtlichkeit wegen $s_0 = f(x, y, z)$ und $\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_0 = F(x, y, z)$ setzen. Von den beiden zuletzt aufgestellten Particularlösungen hat nämlich die erste die Eigenschaft, für $t = 0$ nicht zu verschwinden, während ihre Derivirte nach t verschwindet; bei der andern ist es umgekehrt und verschwindet sie selbst für $t = 0$, nicht aber ihre Derivirte. Zunächst verallgemeinern wir die Particularlösungen, indem wir $x - \alpha$, $y - \beta$, $z - \gamma$ an Stelle von x, y, z schreiben, wodurch sie nicht aufhören der Gleichung zu genügen. Sodann multipliciren wir sie mit einer willkürlichen Function $\Phi\,(\alpha, \beta, \gamma)$ von α, β, γ und nehmen das sechsfache Integral zwischen $-\infty$ und $+\infty$ in Bezug auf λ, μ, ν, α, β, γ. Da die Differentiationen nach x, y, z, t sämmtlich unter dem Integralzeichen ausgeführt werden dürfen, so sieht man leicht ein, dass der so gewonnene verallgemeinte Ausdruck immer noch eine Particularlösung ist. Demnach haben wir, indem wir ihn zu s' wählen

$$s' = \overset{(6)}{\int_{-\infty}^{\infty}} \cos\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\} \cos a\varrho t \;\varphi(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Er besitzt die Eigenschaft, dass sein Differerentialquotient für $t = 0$ verschwindet und wenn wir im Stande sind, φ so zu bestimmen, dass $s' = f(x, y, z)$ für $t = 0$ nämlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\}\, \varphi(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu = f(x, y, z)$$

wird, so genügt s' den Bedingungen des ersten der beiden Zustände, in welche wir den Anfangszustand des Systems zerlegt haben. Die ganz analoge Behandlung der andern Particularlösung liefert uns in

$$s'' = \overset{(6)}{\int_{-\infty}} \cos\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\} \sin a\varrho t \;\psi(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu$$

einen Ausdruck, welcher genau den Bedingungen des zweiten Bestandtheiles vom Anfangszustande entspricht, sobald ψ der Bedingung genügt

$$\overset{(6)}{\int_{-\infty}^{\infty}} \cos\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\}\, \frac{\psi(\alpha, \beta, \gamma)}{a\varrho}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu = F(x, y, z).$$

Sobald φ und ψ gefunden sind, stellt $s = s' + s''$ die vollständige Lösung des Problems dar. Auch sieht man leicht, dass nur eine einzige Lösung möglich ist, indem s durch die partielle Differentialgleichung vollständig bestimmt ist, sobald s_0 und $\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_0$ gegeben sind.

Zur Bestimmung der Functionen φ und ψ dient der Fourier'sche Satz über die Darstellung willkürlicher Functionen durch doppelte und mehrfache Integrale. Derselbe lautet in einer sehr gangbaren Form

$$\overset{(6)}{\int_{-\infty}^{\infty}} \cos\lambda(\alpha - x) \cos\mu(\beta - y) \cos\nu(\gamma - z) \cdot \chi(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu = (2\pi)^3 \cdot \chi(x, y, z),$$

muss aber für unsern Zweck ein wenig umgestellt werden, damit an die Stelle des Cosinusproduktes der Cosinus eines Aggregates tritt. Eine zweimalige Anwendung der Gleichung $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$ gibt nun

$$\cos a \cos b \cos c = \tfrac{1}{4}\cos(a+b+c) + \tfrac{1}{4}\cos(-a+b+c) + \tfrac{1}{4}\cos(a-b+c) + \tfrac{1}{4}\cos(a+b-c).$$

Mit Hülfe derselben spaltet sich die linke Seite der Fourier'schen Gleichung in vier Integrale, welche alle vier einander gleich sind. Sie unterscheiden sich nämlich nur durch die Vorzeichen im Innern der Klammer in der Function $\cos\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\}$. Indem man für λ, μ, ν in ihnen $-\lambda, -\mu, -\nu$ als neue Variabeln einführt, je nachdem die eine oder die andere dieser Grössen in der Klammer das negative Zeichen hat, überzeugt man sich sofort von der Richtigkeit dieser Behauptung. Es nimmt daher unser Satz die Form an:

$$\overset{(6)}{\int_{-\infty}^{\infty}} \cos\{\lambda(\alpha-x) + \mu(\beta-y) + \nu(\gamma-z)\}\, \chi(\alpha,\beta,\gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu = (2\pi)^3 \chi(x,y,z),$$

in welcher er sich unserm Bedürfniss genau anschliesst. Die beiden obigen Gleichungen für φ und ψ ergeben hiernach augenblicklich: $(2\pi)^3 \varphi(x,y,z) = f(x,y,z)$ und $(2\pi)^3 \varphi(x,y,z) = F(x,y,z)$ und indem wir hieraus die Werthe für φ und ψ entnehmen und in s' und s'' einsetzen, ergibt sich uns die vollständige Lösung des Problems unter der Form:

$$s = s' + s'', \qquad \varrho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$$

$$s' = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \overset{(6)}{\int_{-\infty}^{\infty}} \cos\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\} \cos a\varrho t\, f(\alpha,\beta,\gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu$$

$$s'' = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \overset{(6)}{\int_{-\infty}^{\infty}} \cos\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\} \frac{\sin a\varrho t}{a\varrho} F(\alpha,\beta,\gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Das erste dieser Integrale geht aus dem zweiten hervor, wenn man dieses nach t differentiirt und die Function F mit f vertauscht.

2. Die beiden sechsfachen Integrale, aus welchen s sich zusammensetzt, lassen sich noch, ohne eine bestimmte Form für f und F vorauszusetzen, auf Doppelintegrale reduciren. Es genügt, das zweite derselben in dieser Hinsicht zu transformiren, da das erste aus ihm unmittelbar ableitbar ist. Wir führen für λ, μ, ν, die wir uns als ein System rechtwinkeliger Coordinaten denken wollen, Polarcoordinaten $\varrho, \vartheta, \varphi$ ein mit Hülfe der Formeln $\lambda = \varrho\cos\vartheta$, $\mu = \varrho\sin\vartheta\cos\varphi$, $\nu = \varrho\sin\vartheta\sin\varphi$, wobei $\varrho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$ dieselbe Grösse ist, wie bisher. Der Sinn des Integrales s'' ist nun der, dass das Volumenelement $d\lambda\, d\mu\, d\nu$ mit einer gewissen Function multiplicirt durch den ganzen unendlichen Raum summirt werden soll. Das Volumenelement für Polarcoordinaten ist aber $\varrho^2 \sin\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi$ und die Grenzen für die Integration durch den ganzen unendlichen Raum sind 0 und ∞ für ϱ, 0 und π für ϑ, 0 und 2π für φ. Demnach wird

$$s'' = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \overset{(3)}{\int_{-\infty}^{\infty}} F(\alpha,\beta,\gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \cos\varrho\{(\alpha-x)\cos\vartheta + (\beta-y)\cos\vartheta\cos\varphi + (\gamma-z)\sin\vartheta\sin\varphi\} \frac{\sin a\varrho t}{a} \cdot \varrho \sin\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi,$$

oder wenn wir den Ursprung der α, β, γ um x, y, z verlegen, d. h. $\alpha + x$, $\beta + y$, $\gamma + z$ statt α, β, γ schreiben, was auf die Grenzen 0 und ∞ keinen Einfluss hat,

$$s'' = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \overset{(3)}{\int_{-\infty}^{\infty}} F(x+\alpha, y+\beta, z-\gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \int_0^{\infty} \frac{\sin a\varrho t}{a} \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\varrho\,\{\alpha\cos\vartheta$$
$$+ \beta \sin\vartheta\cos\varphi + \gamma\sin\vartheta\sin\varphi\}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Nach einem bekannten Satze hat man nun, wenn $r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ ist,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \psi(\alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta\cos\varphi + \gamma\sin\vartheta\sin\varphi)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 2\pi \int_{-1}^{+1} \psi(r\sigma)\, d\sigma.$$

Wir wollen den Beweis nachliefern. Einstweilen folgern wir aus demselben

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\varrho\,\{\alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta\cos\varphi + \gamma\sin\vartheta\sin\varphi\}\cdot\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$
$$= 2\pi\int_{-1}^{+1}\cos(\varrho r\sigma)\, d\sigma = 4\pi\,\frac{\sin\varrho r}{\varrho r}$$

und hiermit wird:

$$s'' = \frac{1}{2\pi^2} \overset{(4)}{\int_0^{\infty}} F(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma)\,\frac{\sin\varrho a t}{a r}\sin\varrho r\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\varrho,\quad r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

Wir führen nun abermals Polarcoordinaten ein, indem wir setzen $\alpha = r\cos\vartheta$, $\beta = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $\gamma = r\sin\vartheta\sin\varphi$ und erhalten:

$$s'' = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\vartheta}{a}\, d\vartheta\, d\varphi \times$$
$$\times \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} r\cdot F(x + r\cos\vartheta, y + r\sin\vartheta\cos\varphi, z + r\sin\vartheta\sin\varphi)\cdot\sin\varrho a t\sin r\varrho\, dr\, d\varrho.$$

Nun ist aber nach dem Fourier'schen Satze für Functionen einer Variabeln

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(x)\sin\alpha\lambda\sin\lambda x\, d\alpha\, d\lambda = f(x),\qquad 0 < x$$

und hieraus erhält man für $\alpha = r$, $f = rF$, $\lambda = \varrho$, $at = x$

$$\int_0^{\infty}\int rF(x + r\cos\vartheta, y + r\sin\vartheta\cos\varphi, z + r\sin\vartheta\sin\varphi)\sin r\varrho\sin\varrho a t\, dr\, d\varrho$$
$$\tfrac{1}{2}\pi a t F(x + at\cos\vartheta, y + at\sin\vartheta\cos\varphi, z + at\sin\vartheta\sin\varphi),$$

wodurch sich s'' auf

$$s'' = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\cdot F(x + at\cos\vartheta, y + at\sin\vartheta\cos\varphi, z + at\sin\vartheta\sin\varphi)\cdot\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

reducirt. s' erhält man hieraus durch Differentiation nach t und Vertauschung von F und f, sodass also schliesslich sich ergibt:

$$s = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t \cdot f(x + at\cos\vartheta, y + at\sin\vartheta\cos\varphi, z + at\sin\vartheta\sin\varphi)\cdot\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\cdot F(x + at\cos\vartheta, y + at\sin\vartheta\cos\varphi, z + at\sin\vartheta\sin\varphi)\cdot\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Zum Beweise des benutzten Satzes setzen wir $\alpha = r\cos p$, $\beta = r\sin p\cos q$, $\gamma = r\sin p\sin q$ und erhalten für die linke Seite der Gleichung:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \psi\{r[\cos p\cos\vartheta + \sin p\sin\vartheta\cos(q-\varphi)]\}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Auf einer um den Pol des Coordinatensystems mit dem Radius 1 beschriebenen Kugel hat nun ein Punkt die sphärischen Coordinaten ϑ, φ; ein anderer die Coordinaten p, q und ist für den Verbindungsbogen ω beider

$$\cos\omega = \cos p\cos\vartheta + \sin p\sin\vartheta\cos(q-\varphi).$$

Hierdurch nimmt das Integral die Form an:

$$\frac{1}{r^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(r\cos\omega)\, r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

wo $\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ das sphärische Flächenelement bedeutet. Der Bogen ω misst den Winkel, welchen der Radiusvector des Punktes (ϑ, φ), an welchem das Flächenelement anliegt, mit dem festen Radiusvector (p, q) bildet. $\cos\omega$ ist daher der Abstand des Flächenelementes $\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ von einer zur Richtung (p, q) senkrechten Aequatorebene. Der Sinn des Integrales ist daher, abgesehen von dem Divisor r^2, die Summe aller Flächenelemente einer Kugel mit dem Radius r, jedes multiplicirt mit seinem Abstande von einer festen Aequatorebene, ausgedehnt über die ganze Kugelfläche. Da alle Aequatorebenen für die Kugel dieselbe Bedeutung haben, so ist es gleichgültig, welche man wählt, und behält das Integral denselben Werth, wenn man $p = 0$ und $q = 0$ setzt. Hierfür fällt die Richtung (p, q) mit der Polaraxe zusammen, wird $\omega = \vartheta$, und folglich das Integral

$$\frac{1}{r^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(r\cos\vartheta)\, r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 2\pi\int_0^{\pi}\psi(r\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = 2\pi\int_{+1}^{-1}\psi(r\sigma)\, d\sigma,$$

indem man $\cos\vartheta = \sigma$ setzt.

4. Wir wollen jetzt das gefundene Resultat interpretiren und bis zu einem gewissen Grade discutiren. Die Functionen f und F sind die anfängliche Condensation und deren Differentialquotient, welcher letzterer gleich der mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Summe der Derivirten von u_0, v_0, w_0 ist. Es sei der Anfangszustand derart, dass die Erschütterung nur innerhalb eines bestimmten Raumes stattfinde, sodass s_0, u_0, v_0, w_0 und die Differentialquotienten von u_0, v_0, w_0 nur innerhalb desselben Werthe haben, ausserhalb aber Null sind. Dann ist auch F ausserhalb dieses Raumes Null. Nun sind $x + at\cos\vartheta$, $y + at\sin\vartheta\cos\varphi$, $z + at\sin\vartheta\sin\varphi$ die Coordinaten eines Punktes, welcher auf einer um den Punkt

(xyz) mit dem Radius at beschriebenen Kugelfläche liegt und $(at)^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ ist das Flächenelement der Kugel an jener Stelle. Die Bedeutung des Bestandtheiles s'' von s, wofür

$$4\pi (at)^2 \cdot s'' = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} t \cdot F(x + at \cos\vartheta, \ldots) (at)^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi,$$

ist die, dass die Summe aller Flächenelemente dieser Kugel, jedes multiplicirt mit dem Werthe der Function tF in ihm, ausgedehnt über die ganze Kugel gleich s'', multiplicirt mit der Oberfläche der Kugel selbst, sei. Es stellt demnach s'' den Mittelwerth der Function tF auf der Kugel dar. Aehnliches gilt von dem andern Bestandtheil s', welcher zur Bildung von s dient. Man sieht hieraus, dass das Phänomen von dem anfänglichen Zustande auf einer Kugelfläche abhängig ist und im Verlaufe desselben alle Elemente einer mit der Zeit veränderlichen Kugel zur Bildung der Condensation beitragen.

Es liege nun der Punkt (xyz) ausserhalb des Erschütterungsraumes; wann beginnt derselbe seine Bewegung und wann hört sie wieder auf? Die Functionen f und F haben anfangs auf der um ihn beschriebenen Kugel die Werthe Null, so lange bis der Radius at so gross ist, dass die Kugel den Erschütterungsraum berührt. Mit dem Momente, in welchem dies eintritt, beginnt die Bewegung und findet so lange Condensation oder Dilatation statt, als die Kugelfläche den Raum schneidet, innerhalb dessen f und F Werthe haben, so lange also, bis sie denselben nach der äussersten Berührung verlässt. Sind also r_1, r_2 die kürzeste und die weiteste Entfernung des Punktes (xyz) von der Oberfläche des Erschütterungsraumes, so folgen die Zeitgrenzen t_1, t_2, innerhalb welcher der Punkt überhaupt Condensation besitzt, aus den Gleichungen $at_1 = r_1$, $at_2 = r_2$. Dazwischen kann übrigens die Bewegung öfters intermittiren. Alle Punkte, welche gleichzeitig mit dem Punkte (xyz) ihre Bewegung beginnen, liegen in demselben Abstande r von der Aussenfläche des Erschütterungsraumes. Errichtet man in allen Punkten dieser Fläche nach aussen Normalen von der Länge r, so erhält man eine Parallelfläche als Ort dieser Punkte. Die Zeiten, um welche zwei Punkte (xyz) und $(x'y'z')$, deren Normalabstände vom Erschütterungsraume r und r' sind, ihre Bewegung beginnen, sind $t = r : a$ und $t = r' : a$ und die Zeit, in welcher sich das Phänomen vom ersten bis zum zweiten fortpflanzt, ist $t' - t = (r' - r) : a$. Für $t' - t = 1$ wird $r' - r = a$, d. h. a ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Es schreitet vom Erschütterungsraume aus eine Welle von der Dicke a nach dem unendlichen Raume fort. Sie ist begrenzt von Parallelflächen zur Oberfläche des Erschütterungsraumes. Mit wachsender Zeit nähert sich die Form der Wellenfläche mehr und mehr der Kugel. Im Erregungsraume selbst ist das Phänomen etwas complicirter. In Betreff der Geschwindigkeit bemerke man, dass der Punkt (xyz) ausserhalb des Erregungsraumes anfangs keine Geschwindigkeit besitzt, dass also für ihn zur Zeit t

$$u = -\int_0^t \frac{\partial s}{\partial x} dt, \qquad v = -\int_0^t \frac{\partial s}{\partial y} dt, \qquad w = -\int_0^t \frac{\partial s}{\partial z} dt.$$

So lange t kleiner ist, als die Zeit t_r, für welche $at_r = r$ ist, wenn r den kürzesten Abstand vom Erschütterungsraume bedeutet, sind $\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y}, \frac{\partial s}{\partial z}$ Null und mithin auch die Componenten der Geschwindigkeit. Daher kann man setzen:

$$u = \int_{t_r}^{t} \frac{\partial s}{\partial x}\, dt, \qquad v = \int_{t_r}^{t} \frac{\partial s}{\partial y}\, dt, \qquad w = \int_{t_r}^{t} \frac{\partial s}{\partial z}\, dt.$$

Dasselbe ereignet sich von der Zeit $t_{r'}$ an, für welche $at_{r'} = r'$, nämlich gleich der grössten Entfernung r' wird. Von diesem Momente an werden u, v, w constant, nämlich

$$u = \int_{t_r}^{t_{r'}} \frac{\partial s}{\partial x}\, dt; \qquad v = \int_{t_r}^{t_{r'}} \frac{\partial s}{\partial y}\, dt, \qquad w = \int_{t_r}^{t_{r'}} \frac{\partial s}{\partial z}\, dt.$$

Man bemerke noch, dass während die Condensation von dem Zustande auf einer Kugelfläche abhängt, die Geschwindigkeit wegen der noch weiter hinzutretenden Integration von dem Zustande in einem Raume von drei Dimensionen bedingt ist.

5. Befindet sich das elastische Fluidum blos auf einer Seite einer festen Ebene, so sind f und F, wenn wir diese Ebene zur yz-Ebene nehmen, blos für positive x und beliebige y und z gegeben. Es tritt zu den Bedingungen des bisher behandelten Problems noch die weitere hinzu, dass $u = 0$ sei, für $x = 0$ zu allen Zeiten. Es kann auch hier gezeigt werden, dass das Phänomen der Bewegung dasselbe ist, welches erfolgt, sobald man sich den ganzen Raum mit elastischem Fluidum erfüllt denkt und symmetrisch zu der yz-Ebene eine zweite anfängliche Gleichgewichtsstörung so vornimmt, dass $f(-x, y, z) = f(x, y, z)$ aber $u_0(-x, y, z) = -u_0(x, y, z)$ ist, während v_0 und w_0 für negative x dieselben Werthe haben, wie für positive x. Die Geschwindigkeitscomponente u ist dann an der Ebene zu jeder Zeit Null, indem das Integral, welches sie darstellt, paarweise entgegengesetzte Elemente besitzt (Reflexion der Wellen).

6. Nimmt man an, dass f und F blos Functionen von x sind und kein y und z enthalten, so ist die anfängliche Störung für alle Punkte einer zur x-Richtung senkrechten Ebene dieselbe. Die Ausführung der Integrationen führt wieder zu der Lösung des Problems des §. 6.

§. 8. Die anfängliche Störung im elastischen Medium sei so beschaffen, dass die Condensation und die Geschwindigkeit blos Functionen des Abstandes r von einem bestimmten Punkte sind und die Richtung der letzteren durch diesen Punkt hindurchgeht. Das Medium selbst sei unbegrenzt.

Nehmen wir diesen Punkt zum Ursprung der x, y, z, so ist

$$s_0 = f(r) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = f(x, y, z)$$

und die Geschwindigkeit $\varpi_0 = \varphi(r)$ so, dass $u_0 = \varpi_0 \frac{x}{r}$, $v_0 = \varpi_0 \frac{y}{r}$, $w_0 = \varpi_0 \frac{z}{r}$. Wir erhalten dann

$$\frac{\partial \varpi_0}{\partial x} = \frac{\partial \varpi_0}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \varpi_0}{\partial r} \cdot \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial \varpi_0}{\partial y} = \frac{\partial \varpi_0}{\partial r} \cdot \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial \varpi_0}{\partial z} = \frac{\partial \varpi_0}{\partial r} \cdot \frac{z}{r}$$

und hiermit weiter

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial \varpi_0}{\partial r} \cdot \frac{x^2}{r^2} + \varpi_0\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right), \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{\partial \varpi_0}{\partial r} \cdot \frac{y^2}{r^2} + \varpi_0\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right),$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial z} = \frac{\partial \varpi_0}{\partial r} \cdot \frac{z^2}{r^2} + \varpi_0\left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}\right).$$

Hiermit finden wir weiter

$$F(x, y, z) = -\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \varpi_0}{\partial r} - \frac{2}{r}\varpi_0 = -\varphi'(r) - \frac{2}{r}\varphi(r).$$

Um s darzustellen, haben wir mit Hülfe von $f(x, y, z) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ zu bilden

$$f(x + at\cos\vartheta,\ y + at\sin\vartheta\cos\varphi,\ z + at\sin\vartheta\sin\varphi)$$

$$= f\left\{\sqrt{(x + at\cos\vartheta)^2 + (y + at\sin\vartheta\cos\varphi)^2 + (z + at\sin\vartheta\sin\varphi)^2}\right\} = f(X),$$

wenn wir unter X die Wurzel aus

$$(x + at\cos\vartheta)^2 + (y + at\sin\vartheta\cos\varphi)^2 + (z + at\sin\vartheta\sin\varphi)^2$$

$$= r^2 + a^2t^2 + 2at\,(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta\cos\varphi + z\sin\vartheta\sin\varphi)$$

verstehen. Ebenso ist

$$F(x + at\cos\vartheta, \ldots) = -\varphi'(X) - \frac{2}{X}\varphi(X)$$

zu bilden. Man erhält:

$$s = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\, f(X)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\left\{\varphi'(X) + \frac{2}{X}\varphi(X)\right\}\sin d\,\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Von den beiden Integrationen kann eine noch ausgeführt werden vermöge des §. 7, Nr. 2 benutzten Satzes. Im vorliegenden Falle sind nämlich die dortigen Grössen $\alpha = 2atx$, $\beta = 2aty$, $\gamma = 2atz$ und wird daher

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(X)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 2\pi\int_{-1}^{+1} f\left(\sqrt{r^2 + a^2t^2 + 2atr\sigma}\right)d\sigma,$$

und folglich

$$s = \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int_{-1}^{+1} f(\Xi)\, d\sigma\right) - \tfrac{1}{2}t\int_{-1}^{+1}\left(\varphi'(\Xi) + \frac{2}{\Xi}\varphi(\Xi)\right)d\sigma,$$

$$\Xi = (r^2 + a^2t^2 + 2atr\sigma)^{\frac{1}{2}}.$$

Führen wir Ξ als neue Variabele für σ ein, so wird

$$s = \frac{1}{2ar}\frac{\partial}{\partial t}\int_{r-at}^{r+at} f(\Xi)\,\Xi\, d\Xi - \frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at}(\Xi\varphi'(\Xi) + 2\varphi(\Xi))\, d\Xi.$$

Nach Ausführung der Differentiation mit Hülfe des Satzes

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_a^b f(\xi)\, d\xi = f(b)\frac{\partial b}{\partial \alpha} - f(a)\frac{\partial a}{\partial \alpha}$$

ergibt sich

$$s = \frac{1}{2r}\{(r+at)f(r+at) - (r-at)f(r-at)\} - \frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at}\{\Xi\varphi'(\Xi) + 2\varphi(\Xi)\}\, d\Xi.$$

In Betreff der Geschwindigkeit ϖ hat man

$$u - u_0 = -a^2\int_0^t \frac{\partial s}{\partial x}dt, \quad v - v_0 = -a^2\int_0^t \frac{\partial s}{\partial y}dt, \quad w - w_0 = -a^2\int_0^t \frac{\partial s}{\partial z}dt$$

oder da

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{x}{r}, \ldots, \qquad u_0 = \varpi_0 \frac{x}{r}, \ldots$$

ist:

$$u = \left(\varpi_0 - a^2 \int_0^t \frac{\partial s}{\partial r} dt\right) \frac{x}{r}, \qquad v = \left(\varpi_0 - a^2 \int_0^t \frac{\partial s}{\partial r} dt\right) \frac{y}{r},$$

$$w = \left(\varpi_0 - a^2 \int_0^t \frac{\partial s}{\partial r} dt\right) \frac{z}{r}, \qquad \varpi = \varpi_0 - a^2 \int_0^t \frac{\partial s}{\partial r} dt.$$

Sie ist normal zur Kugel um den Coordinatenursprung.

§. 9. Die Gleichungen für die Bewegung flüssiger Systeme wurden zuerst von Euler in zwei verschiedenen Formen aufgestellt. (*Principes généraux du mouvement des fluides* in der *Histoire de l'Acad. de Berlin* 1755; *de principiis motus fluidorum. Novi commentarii Acad. Petrop.* T. XIV. P. I. 1769.) Die Probleme von §. 3 bis §. 7 wurden gleichfalls von Euler zuerst behandelt; das allgemeine Problem §. 7 und seine Lösung verdankt man Poisson (*Mém. de l'Acad. de Paris.* T. X). Die vorliegende Darstellung lehnt sich streng an die Dirichlet-sche Behandlungsweise an, wie sie derselbe in seinen Vorlesungen über die Integration partieller Differentialgleichungen und ihre Anwendung auf physicalische Probleme gegeben hat. Dieselbe ist zum Theil in die Hattendorff'sche Bearbeitung Riemann'scher Vorlesungen über denselben Gegenstand übergegangen. Eine Ausgabe der Dirichlet'schen Originalvorlesungen existirt nicht, so wünschenswerth dieselbe wäre.

§. 10. Gleichgewichtsfigur einer rotirenden incompressibelen flüssigen Masse.

Eine incompressibele Flüssigkeit rotire als ein unveränderliches System um eine feste Axe mit constanter Winkelgeschwindigkeit ω unter Einwirkung gegebener Kräfte P (X, Y, Z); es fragt sich, welche Gestalten die freie Oberfläche derselben annehmen kann?

1. Auf das Massenelement $\varrho\, dx\, dy\, dz$ wirken die Componenten $\varrho X dx\, dy\, dz$, $\varrho Y dx\, dy\, dz$, $\varrho Z dx\, dy\, dz$ der gegebenen Kräfte und die Componenten $-\frac{\partial p}{\partial x} dx\, dy\, dz$, $-\frac{\partial p}{\partial y} dx\, dy\, dz$, $-\frac{\partial p}{\partial z} dx\, dy\, dz$ des Druckes, welche mit den Reactionskräften im Gleichgewicht sein müssen. Die letzteren reduciren sich vermöge der Rotation um die feste Axe und der Unveränderlichkeit der Geschwindigkeit auf die Centrifugalkraft $\varrho\omega^2 r\, dx\, dy\, dz$, deren Componenten $\varrho\omega^2 x\, dx\, dy\, dz$, $\varrho\omega^2 y\, dx\, dy\, dz$ sind, wenn wir zur z-Axe die Rotationsaxe wählen. Nach dem D'Alembert-schen Princip besteht also für jeden Systempunkt (xyz) die Gleichgewichtsbedingung

$$\left(\varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \varrho\omega^2 x\right) \delta x + \left(\varrho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \varrho\omega^2 y\right) \delta y + \left(\varrho Z - \frac{\partial p}{\partial z}\right) \delta z = 0,$$

oder

$$\frac{\partial p}{\partial x} \delta x + \frac{\partial p}{\partial y} \delta y + \frac{\partial p}{\partial z} \delta z = \varrho\, (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + \varrho\omega^2 (x\delta x + y\delta y),$$

wofür wir auch schreiben können

$$\delta p = \varrho\, (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + \varrho\omega^2 \delta \cdot \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

und insbesondere, wenn eine Kräftefunction existirt

$$\delta p = \varrho \delta U + \varrho \omega^2 \delta \cdot \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Hieraus erhalten wir für den Druck:

$$p = \varrho \left[U + \tfrac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2)\right] + C.$$

Eine Fläche des Systems, deren Punkte denselben Druck erleiden, heisst eine Niveaufläche der rotirenden Flüssigkeit. Die Gleichung dieser Flächen ist daher

$$U + \tfrac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2) = c$$

und unter diese Flächen gehört die freie Oberfläche selbst, wenn sie unter constantem Drucke steht.

2. Die Flüssigkeit sei schwer und von einem Cylinder umschlossen, dessen Axe mit der Rotationsaxe zusammenfällt. Man hat dann $X = Y = 0$, $Z = -g$, $U = -gz$. Daher ist die Gleichung der Niveauflächen:

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z + c).$$

Für die freie Oberfläche bestimmt sich die Constante c mit Hülfe des Volumens der flüssigen Masse. Es sei a der Radius des Cylinders, h die Höhe, bis zu welcher im ruhenden Zustand die Flüssigkeit denselben füllt, also $\pi a^2 h$ ihr Volumen. Im rotirenden Zustande ist dasselbe Volumen von der vorstehenden Rotationsfläche begrenzt und wenn ζ die Ordinate des Kreises ist, welcher von den höchstliegenden Systempunkten gebildet wird, welche der Gleichung $a^2 = \frac{2g}{\omega^2}(\zeta + c)$ genügen muss, so besteht die Bedingung

$$\pi a^2 \zeta - \int_{-c}^{\zeta} \pi (x^2 + y^2)\, dz = \pi a^2 \zeta - \frac{\pi g}{\omega}(\zeta + c)^2 = \pi a^2 h,$$

indem $-c$ der Werth von z ist, für welchen $x^2 + y^2$ verschwindet. Die Entfernung von ζ liefert für c den Werth $c = -\left(h - \tfrac{1}{4}\frac{a^2}{g}\omega^2\right)$ und hiermit als Gleichung der Oberfläche der rotirenden Masse das Rotationsparaboloid:

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}\left(z + \tfrac{1}{4}\frac{a^2}{g}\omega^2 - h\right).$$

Die Constante des Druckes

$$p = \varrho\,(U + \tfrac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2)) + C = \varrho\,(-gz + \tfrac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2)) + C$$

bestimmt man mit Hülfe des constanten Druckes, welcher auf der Oberfläche lastet. Ist derselbe P, so erhält man nach Einsetzung des Werthes von $x^2 + y^2$ aus der Gleichung des Paraboloides $P = \tfrac{1}{4}a^2\omega^2\varrho - g\varrho h + C$ und folglich $p - P = \varrho\,\{g(h - z) + \tfrac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) - \tfrac{1}{4}a^2\omega^2\}$.

Die Constante $-c$ in der Gleichung des Paraboloids ist die Ordinate seines Scheitels, sie ist demnach $-c = h - \tfrac{1}{4}\frac{a^2}{g}\omega^2$, die Grösse $\zeta = \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{g}\omega^2 - c$. Die Differenz $\zeta + c$ beider ist $\tfrac{1}{2}\frac{a^2}{g}\omega^2$. Beide Grössen differiren also um dieselbe Grösse $\tfrac{1}{4}\frac{a^2}{g}\omega^2$ von h. Die Flüssigkeit ist also auf der Axe ebenso viel gesunken, als sie am Rande gestiegen ist.

§. 11. Die Punkte einer flüssigen, mit constanter Winkelgeschwindigkeit rotirenden Masse ziehen einander nach dem Newton'schen

Gesetze an, man soll die Bedingungen bestimmen, unter welchen die Oberfläche derselben ein Ellipsoid sein kann, dessen eine Axe mit der Rotationsaxe zusamenfällt.

1. Nach Th. III, Cap. XIII, §. 9, S. 306 ist das Potential eines homogenen Ellipsoids von der Dichtigkeit ϱ und den Halbaxen α, β, γ in Bezug auf einen der Masse angehörigen Punkt x, y, z, wenn dessen Coordinaten sich auf die Hauptaxen beziehen:

$$\pi\varrho\int_0^\infty\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2+s}-\frac{y^2}{\beta^2+s}-\frac{z^2}{\gamma^2+s}\right)\frac{ds}{D},\quad D=\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}.$$

Dies Potential mit dem Factor ε behaftet (S. 293) ist in unserem Falle die Kräftefunction U für die Kräfte X, Y, Z, welche auf die Einheit der Masse bezogen sind. Demnach ist die Gleichung der Niveauflächen

$$\left(\int_0^\infty\frac{ds}{(\alpha^2+s)D}-\frac{\omega}{2\pi\varepsilon\varrho}\right)x^2+\left(\int_0^\infty\frac{ds}{(\beta^2+s)D}-\frac{\omega}{2\pi\varepsilon\varrho}\right)y^2$$
$$+\int_0^\infty\frac{ds}{(\gamma^2+s)D}\cdot z^2=\int_0^\infty\frac{ds}{D}-c.$$

Diese Gleichung muss mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$

des Ellipsoides übereinstimmen, wenn dieses eine Gleichgewichtsfigur sein soll. Die Vergleichung der Coefficienten von x^2, y^2, z^2 liefert als Bedingungen hierfür:

$$\int_0^\infty\frac{ds}{(\alpha^2+s)D}-\frac{\omega^2}{2\pi\varepsilon\varrho}=\frac{1}{\alpha^2}\left(\int_0^\infty\frac{ds}{D}-c\right),\quad\int_0^\infty\frac{ds}{(\beta^2+s)D}-\frac{\omega^2}{2\pi\varepsilon\varrho}=\frac{1}{\beta^2}\left(\int_0^\infty\frac{ds}{D}-c\right),$$
$$\int_0^\infty\frac{ds}{(\gamma^2+s)D}=\frac{1}{\gamma^2}\left(\int_0^\infty\frac{ds}{D}-c\right).$$

Diese Gleichungen liefern die Constante c, die Winkelgeschwindigkeit ω, mit welcher die Masse rotiren muss, damit sie die Gestalt des Ellipsoids annehme und eine Relation zwischen den drei Axen α, β, γ. Die Elimination der Constanten c führt zu den Gleichungen

$$\alpha^2\left(\int_0^\infty\frac{ds}{(\alpha^2+s)D}-\frac{\omega^2}{2\pi\varepsilon\varrho}\right)=\beta^2\left(\int_0^\infty\frac{ds}{(\beta^2+s)D}-\frac{\omega^2}{2\pi\varepsilon\varrho}\right)=\gamma^2\left(\int_0^\infty\frac{ds}{(\gamma^2+s)D}\right)$$

oder

$$\int_0^\infty\frac{ds}{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)D}-\frac{\alpha^2\omega^2}{2\pi\varepsilon\varrho}=\int_0^\infty\frac{ds}{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)D}-\frac{\beta^2\omega^2}{2\pi\varepsilon\varrho}=\int_0^\infty\frac{ds}{\left(1+\frac{s}{\gamma^2}D\right)}$$

und hiermit zu

$$(\beta^2-\alpha^2)\left\{\int_0^\infty\frac{ds}{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)D}-\int_0^\infty\frac{ds}{\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)D}\right\}=0,\qquad(1)$$

$$\frac{\omega^2}{2\pi\varepsilon\varrho}=\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^4\gamma^2}\int\limits_0^\infty\frac{s\,ds}{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)D}=\frac{\beta^2-\gamma^2}{\beta^4\gamma^2}\int\limits_0^\infty\frac{s\,ds}{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)D}. \quad (2)$$

Da blos zwei Gleichungen zwischen α, β, γ und ω bestehen, so sieht man, dass man im Allgemeinen zwei Axen α, β des Ellipsoids willkürlich annehmen kann, die dritte und die Winkelgeschwindigkeit bestimmen sich hierzu aus diesen beiden transcendenten Gleichungen.

2. Die Gleichung (1) hat den Factor $\beta-\alpha$ und wird also für $\alpha=\beta$ erfüllt. Da hierzu aus der zweiten Gleichung eine reelle endliche Winkelgeschwindigkeit folgt, so sieht man, dass das Rotationsellipsoid eine Gleichgewichtsfigur der flüssigen Masse sein kann. Es ist aber auch denkbar, dass der andere Factor sich auf Null reducire und die Gleichung auch erfüllt werde, ohne dass $\alpha=\beta$ sei. Dies ist in der That der Fall und es kann auch das dreiaxige Ellipsoid Gleichgewichtsfigur sein.

Wir wollen zunächst untersuchen, welche Rotationsellipsoide der Aufgabe genügen. Man erhält für $\beta=\alpha$ für die Winkelgeschwindigkeit die Gleichung:

$$\frac{\omega^2}{2\pi\varepsilon\varrho}=\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^4\gamma^2}\int\limits_0^\infty\frac{s\,ds}{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^2\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Man sieht hieraus, dass ω nur dann reell sein kann, wenn $\alpha>\gamma$, d. h. wenn die Rotationsaxe die kleinste Axe, das Ellipsoid also abgeplattet ist. **Unter den Rotationsellipsoiden genügen nur abgeplattete der Aufgabe.**

Um etwas zu vereinfachen, setzen wir $\frac{s}{\gamma^2}=u$, $\frac{\alpha^2}{\gamma^2}=\alpha'^2$, $\alpha'^2-1=\lambda^2$ und $\frac{\omega^2}{2\pi\varepsilon\varrho}=V$. Dadurch wird

$$V=\frac{\omega^2}{2\pi\varepsilon\varrho}=\lambda^2\int\limits_0^\infty\frac{u\,du}{(1+\lambda^2+u^2)(1+u)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\left(Arctg\,\lambda-\frac{3\lambda}{3+\lambda^2}\right).$$

Es sei $Arctg\,\lambda-\frac{3\lambda}{3+\lambda^2}=\varphi(\lambda)$, so wird $\varphi'(\lambda)=\frac{4\lambda^4}{(1+\lambda^2)(3+\lambda^2)^2}$. Da diese Grösse stets positiv ist, so folgt, dass **V und mithin ω^2 mit wachsendem λ wächst und zu jedem positiven Werthe von λ auch ein reeller Werth der Winkelgeschwindigkeit gehört und zwar, abgesehen vom Vorzeichen nur ein einziger.** Die Grösse λ ist die Abplattung des Ellipsoids, nämlich das Verhältniss der Differenz der Quadrate beider Halbaxen zum Quadrate der kleineren von ihnen. Es ist $\lambda^2=\alpha'^2-1=\frac{\alpha^2}{\gamma^2}-1=\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma^2}$.

Für $\lambda=0$, d. h. $\alpha=\gamma$, oder die **Kugel**, muss $V=0$ sein. Ebenso für $\lambda=\infty$ oder $\gamma=0$, d. h. für die Gestalt einer **Scheibe** als Gleichgewichtsfigur.

Ob auch jeder gegebenen Winkelgeschwindigkeit ein Rotationsellipsoid als Gleichgewichtsfigur entspricht, oder vielleicht mehrere, oder ob nur bis zu einer gewissen Grenze von ω die Gleichgewichtsfigur ein Rotationsellipsoid sein kann, ergibt sich folgendermassen. Wir construiren eine Curve, deren Abscissen λ und deren Ordinaten die Werthe von V sind und fragen, ob ein gegebener Werth V Ordinate dieser Curve sein kann und ob dies für eine oder mehrere Abscissen λ eintreten kann oder nicht. Man erhält mit Hülfe des obigen Ausdruckes für V:

$$\frac{dV}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda^4}\left\{\frac{9\lambda + 7\lambda^3}{1+\lambda^2} - (9+\lambda^2)\, Arctg\, \lambda\right\} = \frac{F(\lambda)}{\lambda^4(9+\lambda^2)},$$

wenn

$$F(\lambda) = \frac{9\lambda + 7\lambda^3}{(1+\lambda^2)(9+\lambda^2)} - Arctg\,\lambda$$

gesetzt wird. Da $\frac{dV}{d\lambda}$ mit $F(\lambda)$ das Zeichen wechselt, so wächst V oder nimmt ab, je nachdem $F(\lambda)$ positiv oder negativ ist. Für $\lambda = 0$ ist $F(\lambda)$ positiv und da

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = \frac{8\lambda^4(3-\lambda^2)}{[(1+\lambda^2)(9+\lambda^2)]^2}$$

von $\lambda = 0$ bis $\lambda = \sqrt{3}$ positiv ist, so wächst $F(\lambda)$ innerhalb dieses Intervalles und ist positiv, aber von $\lambda = \sqrt{3}$ an wird $\frac{dF}{d\lambda}$ fortwährend negativ und nimmt mithin $F(\lambda)$ fortwährend ab. Anfangs ist $F(\lambda)$ noch positiv, da es aber für $\lambda = \infty$ in $-\frac{1}{2}\pi$ übergeht, so folgt, dass es zwischen $\lambda = \sqrt{3}$ und $\lambda = \infty$ einen Werth λ geben müsse, für welchen $F(\lambda)$ und mithin auch $\frac{dV}{d\lambda}$ vom Positiven zum Negativen, also V selbst vom Wachsen zum Abnehmen übergeht, mithin V ein Maximum wird. Genauer berechnet ist dieser Werth $\lambda = 2{,}5293$, der Werth des Maximums von V aber $0{,}2246$ und ihm entspricht eine Winkelgeschwindigkeit $\omega = 0{,}2246^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi\varepsilon\varrho}$. Die fragliche Curve ist demnach folgendermassen beschaffen. Für $\lambda = 0$ wird $V = 0$; von $\lambda = 0$ bis $\lambda = 2{,}5293$ wächst V und erreicht für letzteren Werth sein Maximum $0{,}2246$, von da nimmt V fortwährend ab und nähert sich die Curve der Axe der λ asymptotisch. Es kann daher zu keinem Werthe V, welcher grösser als $0{,}2246$ ist, Abscissen λ geben. Dagegen entsprechen einem Werthe von V zwischen Null und $0{,}2246$ zwei Werthe λ, von denen der eine unter $2{,}5293$, der andere über dieser Zahl liegt. Daher:

Einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit ω kann nur dann ein Rotationsellipsoid als Gleichgewichtsfigur entsprechen, wenn

$$\omega^2 \leqq 0{,}2246 \cdot 2\pi\varepsilon\varrho$$

und zwar entsprechen ihr zwei solche Figuren, welche an dieser Grenze in eine zusammenfallen.

3. Wir gehen jetzt zu der Beantwortung der Frage über, in welchen Fällen ein dreiaxiges Ellipsoid Gleichgewichtsfigur sein könne. Hierzu bringen wir die beiden Gleichungen unter Nr. 1, welche die Bedingungen der Aufgabe aussprechen, nach Tilgung des Factors $\beta^2 - \alpha^2$ auf etwas andere Formen.

Setzt man nämlich $s : \gamma^2 = u$ und benutzt die Buchstaben s und t von jetzt an zur Bezeichnung der Axenverhältnisse, sodass $\gamma^2 : \alpha^2 = t$, $\gamma^2 : \beta^2 = s$ wird, so erhält man aus der Gleichung (1)

$$1. \qquad F \equiv (1 - s - t)\int_0^\infty \frac{u\,du}{R^3} - st\int_0^\infty \frac{u^2\,du}{R^3} = 0,$$

$$R^2 = (1+su)(1+tu)(1+u),$$

oder auch, indem man das erste der Integrale, mit st multiplicirt, hinzufügt und wieder subtrahirt:

$$2. \qquad F = (1-s)(1-t)\int_0^\infty \frac{u\,du}{R^3} - st\int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+su)(1+tu)R} = 0.$$

Ebenso gibt die Gleichung (2), wenn $\frac{\omega^2}{2\pi\varepsilon\varrho} = V$ gesetzt wird:

$$3. \qquad V = t\,(t-1)\int\limits_0^\infty \frac{u\,(1+su)}{R^3}\,du = s\,(1-s)\int\limits_0^\infty \frac{u\,(1+tu)}{R^3}\,du,$$

sowie mit Benutzung der eben gefundenen Gleichung 1. oder 2.:

$$4. \qquad V = st\int\limits_0^\infty \frac{u\,du}{(1+su)\,(1+tu)\,R} = (1-s)\;1-t)\int\limits_0^\infty \frac{u\,du}{R^3}.$$

Da die hier vorkommenden Integrale sämmtlich positiv sind, so folgt aus 1., dass $s+t<1$ und mithin $s<1$, $t<1$, d. h. $\gamma^2<\alpha^2$, $\gamma^2<\beta^2$, $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}<\frac{1}{\gamma^2}$.

Die kleinste Axe des dreiaxigen Ellipsoids, welches Gleichgewichtsfigur ist, fällt in die Rotationsaxe der Masse und ist die Quadratsumme der reciproken Werthe der beiden grösseren Axen kleiner als das reciproke Quadrat des kleinsten.

Nimmt man für s einen bestimmten Werth zwischen 0 und 1 an, so folgt aus der Gleichung 2. für $t=0$ ein positiver, für $t=1-s$ ein negativer Werth von F. Da nun F eine continuirliche Function von s und t ist, so folgt, dass ein Werth t zwischen 0 und $1-s$ existire, für welchen F verschwindet. Aehnliches gilt in Bezug auf s, wenn für t ein bestimmter Werth angenommen wird. Es existirt demnach zu jedem beliebigen Werthe eines der beiden Axenverhältnisse $\gamma^2:\alpha^2$, $\gamma^2:\beta^2$ immer ein Ellipsoid, welches der ersten Gleichung des Problems genügt.

Es kann ferner gezeigt werden, dass mit wachsendem s das Verhältniss t abnehme und umgekehrt. Man erhält nämlich aus 1., wenn man setzt:

$$2A_0 = \int\limits_0^\infty \frac{u\,(1+u)}{R^5}\,[2+(3-s-t)\,u - st\,u^2]\,du,$$

$$2A_1 = \int\limits_0^\infty \frac{u^2\,(1+u)}{R^5}\,[2+(3-s-t)\,u - st\,u^2]\,du,$$

für die Differentialquotienten von F nach s und t:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = -A_0 - tA_1 = -(1-\tfrac{2}{3}t)\,A_0 - \tfrac{1}{3}t\,(2A_0+3A_1),$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -A_0 - sA_1 = -(1-\tfrac{2}{3}s)\,A_0 - \tfrac{2}{3}s\,(2A_0+3A_1).$$

Nun kann man leicht zeigen, dass A_0 und $2A_0+3A_1$ positiv sind und da s und t kleiner als 1 sind, so folgt, dass beide partielle Differentialquotienten von F negativ sind, F mithin mit s und t abnimmt und zeigt die Gleichung $\frac{\partial F}{\partial s}+\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{dt}{ds}=0$, dass $\frac{dt}{ds}$ negativ sein muss und also t abnimmt, wenn s wächst und umgekehrt. Man erhält nämlich

$$d\cdot\frac{u^2}{(1+su)\,(1+tu)\,R} = \frac{4u+(3+s+t)\,u^2-2stu^3-3stu^4}{2\,(1+su)\,(1+tu)\,R^3}\,du$$

und folglich durch Integration zwischen 0 und ∞:

$$0 = \int_0^\infty \frac{u(u+1)}{R^5} [4 + (3 + s + t) u - 2stu^2 - 3stu^4] \, du.$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der obigen für $2A_0$, so kommt

$$2A_0 = \tfrac{3}{2} \int_0^\infty \frac{u^2(u+1)}{R^5} (1 - s - t - stu^2) \, du$$

und wenn man sie mit 2 dividirt und von der Verbindung $2A_0 + 3A_1$ abzieht:

$$2A_0 + 3A_1 = \tfrac{3}{4} (3 - s - t) \int_0^\infty \frac{u^2(u+1)^2}{R^5} \, du.$$

Man sieht hieraus, dass $2A_0$ und $2A_0 + 3A_1$ positiv sind.

Man kann ferner zeigen, dass V mit wachsendem s abnehme.

Es ist nämlich, da auch t als Function von s anzusehen ist:

$$\frac{dV}{ds} = \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t} \cdot \frac{dt}{ds} = \left(\frac{\partial V}{\partial s}\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial s}\right) : \frac{\partial F}{\partial t},$$

da

$$\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{dt}{ds} = 0.$$

Nun zeigt sich, dass der Zähler dieses Ausdruckes fortwährend positiv, während der Nenner nach dem Vorstehenden negativ ist, sodass also dV und ds entgegengesetztes Zeichen haben müssen. Man erhält nämlich aus der obigen Gleichung 4.:

$$\frac{\partial V}{\partial s} = t \int_0^\infty \frac{u(1+u^2)(1+tu)}{R^5} (1 - \tfrac{1}{2} su) \, du,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = s \int_0^\infty \frac{u(1+u^2)(1+su)}{R^5} (1 - \tfrac{1}{2} tu) \, du,$$

welche Ausdrücke mit Hülfe der Bezeichnung

$$B_0 = \int_0^\infty \frac{u(1+u)^2}{R^5} (1 - \tfrac{1}{2} stu^2) \, du, \quad B_1 = \int_0^\infty \frac{u^2(1+u)^2}{R^5} \, du$$

sich unter der Form

$$\frac{\partial V}{\partial s} = tB_0 + t(t - \tfrac{1}{2}s) B_1, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = sB_0 + s(s - \tfrac{1}{2}t) B_1$$

darstellen. Hiermit und mit den oben entwickelten Werthen von $\frac{\partial F}{\partial s}$, $\frac{\partial F}{\partial t}$ erhält man:

$$\frac{\partial V}{\partial s}\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial s} = (s - t)[A_0B_0 + (s + t) A_0B_1 + \tfrac{3}{2} stA_1B_1]$$

$$= (s - t)[A_0B_0 + \tfrac{1}{2} stA_0B_1 + \tfrac{1}{2} stB_1(2A_0 + 3A_1) + (s + t - \tfrac{3}{2} st) A_0B_1].$$

Dass B_1 positiv ist, ersieht man unmittelbar, dass B_0 es ist, ergibt sich, wenn man von

$$4B_0 = \int_0^\infty \frac{u(u+1)}{R^5} (4 + 4u - 2stu^2 - 2stu^3) \, du$$

die oben benutzte Gleichung

$$0 = \int_0^\infty \frac{u\,(u+1)}{R^5}\,[4 + (3 + s + t)\,u - 2\,stu^2 - 3stu^4]\,du$$

abzieht, wodurch man

$$4B_0 = \int_0^\infty \frac{u^2\,(1+u)}{R^5}\,(1 - s - t + stu^2)\,du$$

erhält, einen Ausdruck, dessen positive Beschaffenheit einleuchtet. Da nun also B_0, B_1, A_0, $2A_0 + 3A_1$ und $s + t - \frac{4}{3}st = s\,(1 - \frac{2}{3}t) + t\,(1 - \frac{2}{3}s)$ positiv sind, so folgt, dass für $s > t$, d. h. $s > \frac{1}{2}$ und also $t < \frac{1}{2}$ die Grösse

$$\frac{\partial V}{\partial s}\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial s}$$

positiv ist und mithin V mit wachsendem s abnimmt. Da ferner

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial s}\frac{ds}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\partial V}{\partial s}\frac{\partial F}{\partial t}\right) : \frac{\partial F}{\partial s} = -\left(\frac{\partial V}{\partial s}\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial s}\right) : \frac{\partial F}{\partial t}$$

ist, so ergibt sich weiter, dass V mit wachsendem t wächst.

Das Resultat dieser Untersuchung kann auch dahin ausgesprochen werden, dass mit wachsendem V die Grösse s abnehme und t wachse, woraus folgt, dass einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit ω nur ein einziges dreiaxiges Ellipsoid als Gleichgewichtsfigur entsprechen kann. Aus den Gleichungen $\gamma^2 : \beta^2 = s$, $\gamma^2 : \alpha^2 = t$ ergibt sich hierzu weiter, dass mit wachsender Winkelgeschwindigkeit die grössere Axe 2α des Aequators des Ellipsoids abnimmt, während die kleinere 2β wächst.

Aus der Gleichung 2. folgt, dass wenn $s = 0$ ist, $t = 1$ wird und umgekehrt dem $t = 0$ der Werth $s = 1$ entspricht. Da nun von beiden Grössen die eine abnimmt, wenn die andere wächst, so folgt, dass, während s von 0 bis 1 wächst, t von 1 bis zu 0 abnimmt. Es wird daher nur einmal innerhalb dieser Grenzen sich ereignen, dass s und t einen gemeinschaftlichen Werth $s = t = \tau$ annehmen. Wächst s über diesen hinaus, so geht t unter ihn herab und umgekehrt, sodass, wenn $s = s_0$, $t = t_0$ ein Paar zusammengehörige Werthe sind, wo $s_0 < \tau$ und $t_0 > \tau$ ist, bei dem weiteren Wachsen von s und Abnehmen von t man auch zu dem Paare $s = t_0$, $t = s_0$ gelangt. Dies ergibt sich auch schon daraus, dass F eine symmetrische Function von s und t ist. Die beiden Annahmen $s = s_0$, $t = t_0$ und $s = t_0$, $t = s_0$ führen daher zu demselben Ellipsoid und braucht man deshalb blos die Untersuchung auf die Werthe $s > t$ zu erstrecken.

In Bezug auf die Geschwindigkeit ω oder die Grösse V nahmen wir $s > t$ an und folgerten, dass V mit wachsendem s abnehme; ebenso ergibt sich, dass wenn $s < t$ ist, V mit wachsendem s abnimmt. Nimmt daher s von 1 bis τ ab, so wächst V, nimmt es weiter von τ bis 0 ab, so nimmt V wieder ab. Es erreicht mithin V sein Maximum V_0, wenn $s = t = \tau$. Da ferner V sich nicht ändert, wenn s und t vertauscht werden, so gehören zu den Werthsystemen $s = s_0$, $t = t_0$ und $s = t_0$, $t = s_0$ derselbe Werth von V. Jede dieser Annahmen liefert aber dasselbe Ellipsoid. Daher entspricht einem gegebenen Werthe $V < V_0$ nur ein einziges Ellipsoid. Da nun mit $t = 0$, $s = 0$ die Grösse V verschwindet, so folgt:

Wenn V von 0 bis zum Maximum V_0 wächst, so wächst auch t von 0 bis τ und nimmt s von 1 bis τ ab oder es nimmt die grössere Halbaxe

des Aequators von ∞ bis $\frac{\gamma}{\sqrt{\tau}}$ ab und wächst die kleinere von γ bis $\frac{\gamma}{\sqrt{\tau}}$.
Zur Berechnung von τ und V_0 dienen die Gleichungen:

$$0 = \int_0^\infty \frac{du}{(1+\tau u^2)^3 (1+u)^{\frac{1}{2}}} - \int_0^\infty \frac{du}{(1+u)^{\frac{3}{2}} (1+\tau u)},$$

$$V_0 = \tau^2 \int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+u)^{\frac{1}{2}} (1+\tau u)^3},$$

die man aus der Formel (1) erhält, indem man $\alpha = \beta$, $\frac{s}{\gamma^2} = u$ und $\frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \tau$ setzt, sowie aus obiger Gleichung 4. für $s = t = \tau$. Indem man weiter $\frac{1}{\tau} = 1 + \lambda^2$ und $u = \frac{1-x^2}{x^2}$ setzt, nehmen diese Gleichungen die Formen an:

$$0 = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+\lambda^2 x^2} - (1+\lambda^2)^2 \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(1+\lambda^2 x^2)^3},$$

$$V_0 = 2(1+\lambda^2) \int_0^1 \frac{(1-x^2)\,x^2 dx}{(1+\lambda^2 x^2)^3},$$

oder nach Ausführung der Integrationen die Formen

$$0 = -\lambda(3+13\lambda^2) + (3+14\lambda^2+3\lambda^4)\,Arctg\,\lambda,$$
$$V_0 = \frac{1}{4\lambda^5}\{\lambda(3+\lambda^2) - (3-\lambda^2)(1+\lambda^2)\,Arctg\,\lambda\}.$$

Man erhält hieraus, da $\lambda = 0$ nicht in Frage kommen kann:

$$\lambda = 1{,}3946, \qquad V_0 = 0{,}18711,$$
$$\frac{\alpha^2}{\gamma^2} = \frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{1}{\tau} = \sqrt{1+\lambda^2} = 1{,}7161, \qquad \tau = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = 0{,}3395.$$

Dividirt man die erste der beiden vorstehenden Gleichungen mit $4\lambda^5$ und addirt sie zur zweiten, so ergibt sich

$$V_0 = \frac{1}{\lambda^3}[(3+\lambda^2)\,Arctg\,\lambda - 3\lambda],$$

welche Gleichung bereits oben auftrat bei Bestimmung des Rotationsellipsoids. Es ist daher das Ellipsoid, welches die Grenze aller dreiaxigen Gleichgewichtsellipsoide bildet, in der Reihe der oben untersuchten Rotationsellipsoide enthalten, entsprechend dem Werthe $\lambda = 1{,}3946$.

Wir erhalten, indem wir alle gewonnenen Resultate zusammenfassen, den Satz:

Damit ein Ellipsoid Gleichgewichtsfigur einer mit constanter Winkelgeschwindigkeit ω rotirenden Flüssigkeit sei, ist erforderlich, dass $V = \frac{\omega^2}{2\pi\varepsilon\varrho}$ zwischen den Grenzen 0 und 0,2246 liege. Allen Werthen V von 0 bis $V_0 = 0{,}18711$ entsprechen je ein dreiaxiges Ellipsoid und zwei abgeplattete Rotationsellipsoide; für $V = V_0$ geht das dreiaxige Ellipsoid in das eine der beiden Rotationsellipsoide über, für $V > V_0$ existiren zwei Rotationsellipsoide, welche für $V = 0{,}2246$ zusammenfallen. Darüber hinaus gibt es keine ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren mehr.

Der ruhenden Flüssigkeitsmasse, also $V = 0$ entsprechend, liefert die Gleichung 4. die Werthe $s = 1$, $t = 0$, d. h. $\gamma^2 : \beta^2 = 1$, $\gamma^2 : \alpha^2 = 0$, also $\alpha = \infty$, $\beta = \gamma$. Die Gleichgewichtsfigur ist in diesem Falle ein unendlich langer, unendlich dünner Rotationscylinder. Die beiden Rotationsflächen, welche Gleichgewichtsfiguren für $V = 0$ sind, waren die Kugel und die unendliche Scheibe.

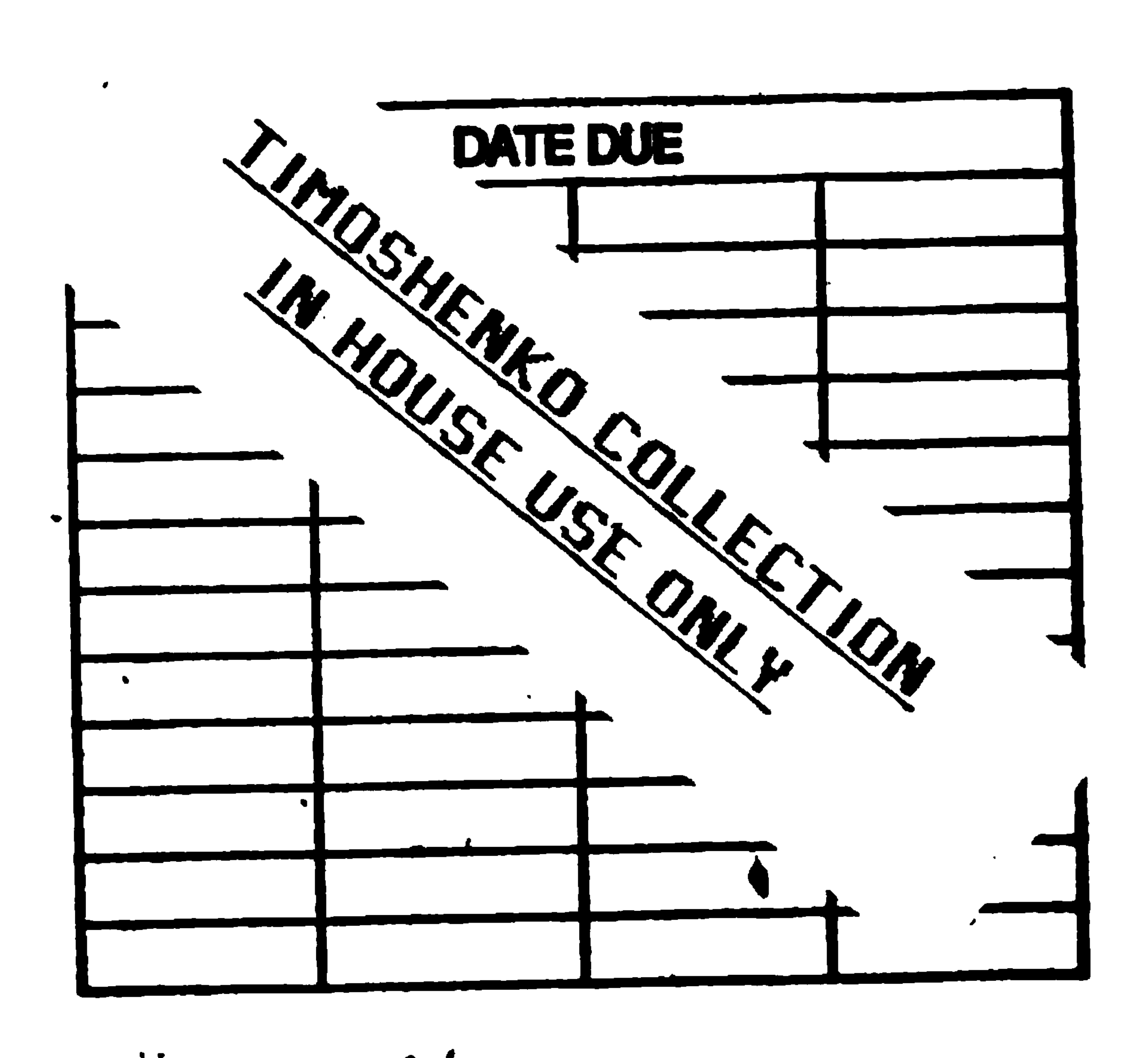
Wenn die Geschwindigkeit von 0 an wächst, so gehen Kugel und Scheibe in Rotationsellipsoide über, indem erstere sich abplattet und die Excentricität der letzteren abnimmt; der Cylinder aber wird ein dreiaxiges Ellipsoid, so zwar, dass der Kreisschnitt eine Ellipse wird, um deren kleinere Axe die Masse rotirt, während die grössere Axe zur kleineren Axe des Aequators wird.

Das Problem der Gleichgewichtsfiguren einer rotirenden Flüssigkeitsmasse hat einige Berühmtheit erlangt, einerseits wegen der Anwendung auf die Untersuchungen über die Gestalt der Erde, andererseits wegen der scheinbar paradoxen Existenz der dreiaxigen Gleichgewichtsfigur. Die Gleichung der Oberfläche der Gleichgewichtsfiguren überhaupt gab zuerst Clairaut (*Théorie de la figure de la terre* 2[ième] édit. p. 101), die Rotationsellipsoide fand Maclaurin (*Treatise on fluctions*, L. I, Cap. XIV, §. 641); das dreiaxige Ellipsoid rührt von Jacobi her (Ueber die Figur des Gleichgewichts in Poggendorff's Annalen Bd. XXXIII, S. 229 [1834]), woselbst sich auch verschiedene historische Notizen finden. Jacobi wurde, wie er einstmals in der Vorlesung (es war in der Vorlesung über allgemeine Theorie der Oberflächen und der Curven doppelter Krümmung, Winter 1849) erzählte, durch eine unvorsichtige Aeusserung von Pontécoulant, dass nur Rotationsflächen Gleichgewichtsformen sein könnten, zu seiner Untersuchung veranlasst (wie er sich ausdrückte: „vermöge des Geistes des Widerspruchs, dem er seine meisten Entdeckungen verdanke"). Der Jacobi'sche Satz wurde (20. Oct. 1834) der Pariser Akademie vorgelegt und Liouville gab in der folgenden Sitzung einen Beweis desselben, welcher unter dem Titel: *Note sur la figure d'une masse fluide homogène, en équilibre, et douée d'un mouvement de rotation* in Cah. XXIII. des Journ. de l'école polyt., p. 289 sich findet. Er behandelte dieselbe Frage in dem *Mémoire sur les figures ellipsoïdales à trois axes inégaux, qui peuvent convenir à l'équilibre d'une masse liquide homogène, douée d'un mouvement de rotation* [Addition à la Connaissance des Temps pour 1846 oder Journal de mathém. T. XVI, p. 241 (1851)]. Diese Arbeit ist im Grunde eine Bearbeitung der Hauptabhandlung, welche über diesen Gegenstand existirt, von C. O. Meyer, *de aequilibrii formis ellipsoidicis* [Crelle's Journ. Bd. XXIV, S. 44 (1842)], worin zuerst der Zusammenhang der sämmtlichen ellipsoidischen Gleichgewichtsformen dargelegt wurde. Eine andere frühere Arbeit ist von Ivory, *On the equilibrium of a mass of homogeneous fluid at liberty* (*Philosoph. Transact. f. th. y.* 1834, P. II, p. 491). Ueber diese und drei andere Arbeiten Ivory's vgl. Todhunter, *On Jacobi's Theorem respecting the relative equilibrium of a revolving ellipsoid of fluid, and on Ivory's discussion of the theorem.* (Proced. of the R. Society of London, Vol. XIX [1870—71], pp. 42—56), sowie über einen Irrthum Dahlanders: Todhunter *Note on an erroneous extension of Jacobi's Theorem.* (Ibid. Vol. XXI [1872—73], pp. 119—121). Für die numerische Berechnung der Ellipsoide ist von Bedeutung: Kostka, Ueber die Auffindung der ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren einer homogenen, um eine feste Axe rotirenden Flüssigkeitsmasse, wenn die Dichtigkeit und Umlaufszeit bekannt sind. (Monatsber. der Berl. Acad. 1870, S. 116 u. ffg.)

Ende des zweiten Bandes.




Stanford University Libraries
3 6105 014 651 868


DATE DUE
TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY

